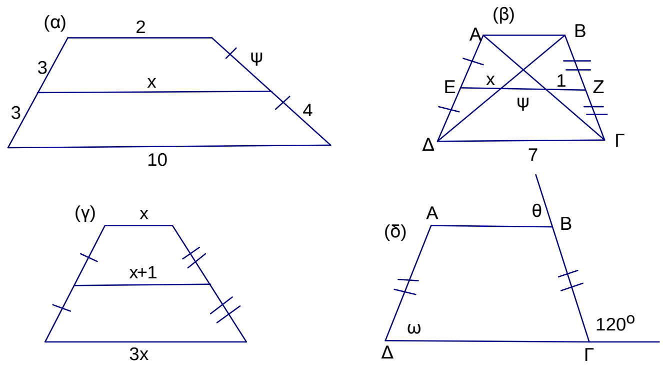
5.10 – 5.11

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 114 – 115

Ερωτήσεις κατανόησης σελίδας 114

1.

Στα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x , ψ ω, και θ



Απάντηση

Στο σχήμα (α) το τμήμα x είναι διάμεσος άρα $x = \dfrac{2+10}{2} = 6$ και $ψ = 4$

Στο σχήμα (β) η ΕΖ είναι διάμεσος, άρα $1 = \dfrac{AB}{2} = x \quad \Rightarrow \quad AB = 2$ και

$$ψ = \frac{ΔΓ - AB}{2} = \frac{7-2}{2} = 2{,}5$$

Στο σχήμα (γ) το τμήμα x + 1 είναι διάμεσος, άρα $x + 1 = \dfrac{x+3x}{2}$

$$2x + 2 = x + 3x$$
$$2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Στο σχήμα (δ) είναι $\hat{Γ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα είναι $\hat{ω} = \hat{Γ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Και αφού $\hat{θ} = \hat{Γ}$, θα είναι $\hat{θ} = 60^\circ$

2.

Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο;

Απάντηση

Αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο είναι τραπέζιο και στην συνέχει ότι :
Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες
ή οι διαγώνιες είναι ίσες
ή οι προσκείμενες σε μία βάση γωνίες είναι ίσες

3.

Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου ; Ποιες ιδιότητες έχει;

Απάντηση

Διάμεσος τραπεζίου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών

Ιδιότητες της διαμέσου είναι :

Είναι παράλληλη στις βάσεις

Είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων

Διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων

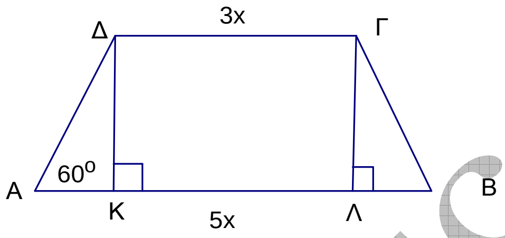
4.

Στο παρακάτω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 5x, ΔΓ = 3x και $\hat{A} = 60^o$.
Η περίμετρος του τραπεζίου είναι

i) 10x, ii) 11x, **iii)** 12x, **iv)** 13x, **v)** 14x

Απάντηση

Δικαιολογήστε την απάντηση σας



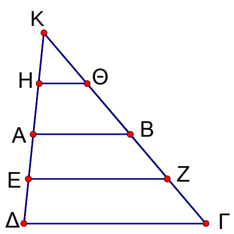
Φέρνοντας τα ύψη ΔΚ και ΓΛ προφανώς έχουμε ΚΛ = ΔΓ = 3x οπότε
ΑΚ = ΒΛ= x και επειδή $A\hat{\Delta}K = \Lambda\hat{\Gamma}B = 30^o$ θα είναι ΑΔ = ΒΓ = 2x
η περίμετρος λοιπόν είναι : 5x + 3x + 2x + 2x = 12x

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) και διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΛ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.

Λύση

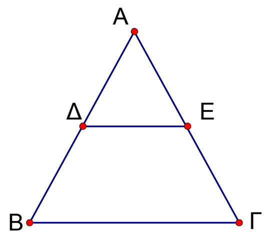


ΗΘ || ΑΒ (ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΚΑΒ)
ΕΖ || ΑΒ (διάμεσος του τραπεζίου)
Άρα ΗΘ || ΕΖ, οπότε ΗΘΖΕ τραπέζιο.

2.

Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



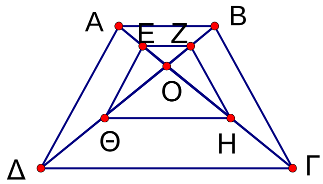
ΔΕ || ΒΓ (ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ),
οπότε ΔΕΓΒ τραπέζιο.

τρ.ΑΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Άρα ΔΕΓΒ ισοσκελές τραπέζιο.

3.

Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Στο τρίγωνο ΟΔΓ είναι ΘΗ || ΔΓ

Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι ΕΖ || ΑΒ

Άρα ΘΗ || ΕΖ, οπότε ΕΖΗΘ τραπέζιο

ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο $\Rightarrow$ ΑΓ = ΒΔ $\Rightarrow$

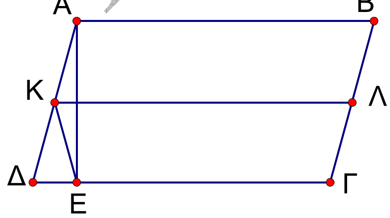
$$\frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow EH = Z\Theta$$

άρα ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



ΚΛ μεσοπαράλληλος των ΑΒ, ΔΓ $\Rightarrow$
ΚΛΓΕ τραπέζιο.

ΕΚ διάμεσος του ορθ. τριγώνου ΕΔΑ $\Rightarrow$

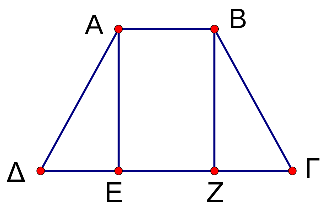
$$EK = \frac{A\Delta}{2} = K\Delta = \Lambda\Gamma$$

Άρα ΚΛΓΕ ισοσκελές τραπέζιο.

5.

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ < ΓΔ$ και τα ύψη του $ΑΕ$ και $ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΓΖ = \dfrac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

Λύση



Προφανώς τρ.$ΑΕΔ$ = τρ.$ΒΖΓ$ $\Rightarrow$ $ΔΕ = ΖΓ$

$ΑΒΖΕ$ ορθογώνιο $\Rightarrow$ $ΕΖ = ΑΒ$

Είναι $ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = ΔΓ \Rightarrow$

$ΔΕ + ΖΓ = ΔΓ - ΕΖ$

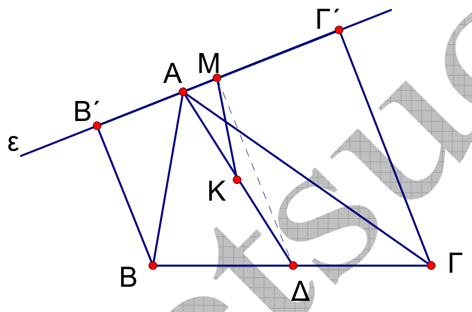
$2ΔΕ = ΔΓ - ΑΒ$

$ΔΕ = \dfrac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

6.

Από την κορυφή $Α$ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε ευθεία $ε$ που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι $ΒΒ'$ και $ΓΓ'$ οι αποστάσεις των $Β$ και $Γ$ από την ευθεία $ε$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της $Β'Γ'$ και $Κ$ το μέσο της διαμέσου $ΑΔ$, να αποδείξετε ότι $ΜΚ = \dfrac{ΑΔ}{2}$.

Λύση



$ΒΒ'$ και $ΓΓ' \perp ε$ $\Rightarrow$ $ΒΒ' \parallel ΓΓ'$

Άρα $Β'Γ'ΓΒ$ τραπέζιο με διάμεσο $ΔΜ$ παράλληλη των βάσεων $ΒΒ'$ και $ΓΓ'$, άρα $\perp ε$.

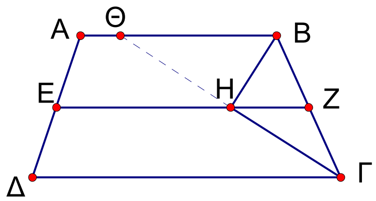
Έτσι το τρίγωνο $ΜΑΔ$ είναι ορθογώνιο με διάμεσο $ΜΚ$, άρα $ΜΚ = \dfrac{ΑΔ}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει τη διάμεσο ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι $B\hat{H}\Gamma = 90^o$.

Λύση

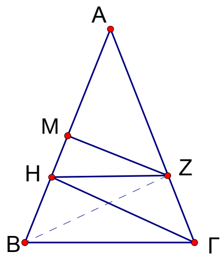


Η προέκταση της ΓΗ τέμνει την ΑΒ σε σημείο Θ.
Τότε η ΕΖ τέμνει και το τμήμα ΘΓ στο μέσο του Η.
Έτσι, το ΒΗ είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΒΘΓ, άρα και ύψος.

2.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.

Λύση



Φέρουμε τη ΖΒ.

Λόγω της μεσοκαθέτου ΜΖ έχουμε ΖΑ = ΖΒ **(1)**

ΗΖΓΒ τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές,

αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

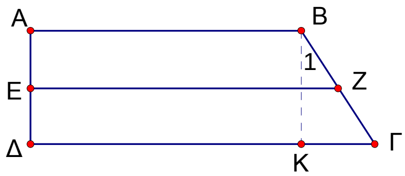
Άρα έχει ίσες διαγωνίους ΗΓ = ΖΒ **(2)**.

Από τις (1) και (2) έχουμε ΖΑ = ΗΓ.

3.

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και $\hat{B} = 120^o$. Αν $AB = 2\alpha$ και $B\Gamma = \alpha$, να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ, ως συνάρτηση του α.

Λύση



Επειδή $EZ = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2}$ αρκεί να υπολογίσουμε τη $\Delta\Gamma$.
Φέρουμε $BK \perp \Delta\Gamma$.
Τότε $\Delta K = AB = 2\alpha$ και $\hat{B}_1 = 30^o$.

Στο $BK\Gamma$ ορθ. τρίγωνο θα έχουμε $K\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Έτσι $\Delta\Gamma = \Delta K + K\Gamma = 2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$.

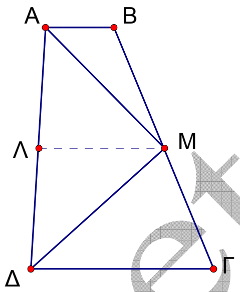
Άρα $EZ = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \dfrac{2\alpha + \dfrac{5\alpha}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{9\alpha}{2}}{2} = \dfrac{9\alpha}{4}$.

4.

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι

$A\hat{M}\Delta = 90^o$.

Λύση



Φέρουμε τη διάμεσο $M\Lambda$ του τραπεζίου.

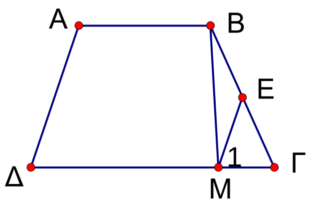
Τότε $M\Lambda = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \dfrac{A\Delta}{2}$

Έτσι η διάμεσος $M\Lambda$ του τριγώνου $MA\Delta$ είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς $A\Delta$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο M.

5.

Από το μέσο E της πλευράς $B\Gamma$ ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ φέρουμε παράλληλη προς την $A\Delta$, που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο M. Να αποδείξετε ότι $BM \perp \Delta\Gamma$.

Λύση

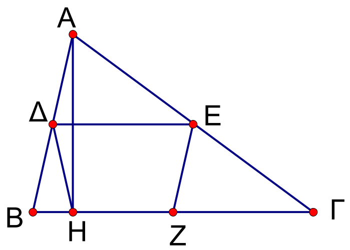


$EM \parallel A\Delta \;\Rightarrow\; \hat{M}_1 = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} \;\Rightarrow$
τρ.$EM\Gamma$ ισοσκελές με $EM = E\Gamma = EB$

Έτσι η διάμεσος ME του τριγώνου $MB\Gamma$ είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς $B\Gamma$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο M.

6.
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



ΔΕ || ΒΓ και ΕΖ || ΑΒ $\Rightarrow$
ΔΕΖΒ παρ/μμο και ΔΕΖΗ τραπέζιο. **(1)**

Από το παρ/μμο έχουμε ΕΖ = ΒΔ

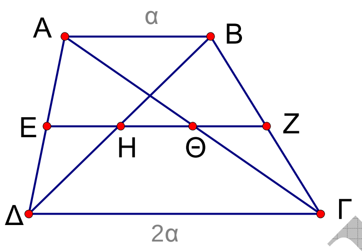
Αλλά $Η\Delta = \dfrac{AB}{2} = B\Delta$

Άρα ΕΖ = ΔΗ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7.
Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

Λύση



Έστω το τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις
ΑΒ = α, ΓΔ = 2α και διάμεσο ΕΖ
η οποία τέμνει τις διαγώνιες στα Η, Θ.

Στο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $EH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ **(1)**

Στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε $\Theta Z = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ **(2)**

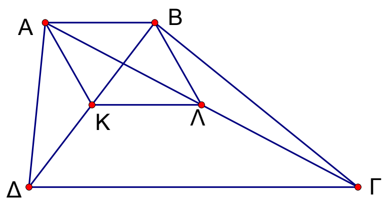
Στο τραπέζιο έχουμε $H\Theta = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \dfrac{2\alpha - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) $\Rightarrow$ ΕΗ = ΗΘ = ΘΖ.

8.

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΓΔ = 3ΑΒ$ και $Κ$, $Λ$ τα μέσα των διαγωνίων του $ΔΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΑΚΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;

Λύση



$$ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} = \frac{3ΑΒ - ΑΒ}{2} = \frac{2ΑΒ}{2} = ΑΒ$$

Αλλά και $ΚΛ \parallel ΑΒ$

Άρα το $ΑΚΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Για να είναι ορθογώνιο, θα πρέπει να έχει ίσες διαγωνίους, δηλαδή $ΑΛ = ΒΚ$,

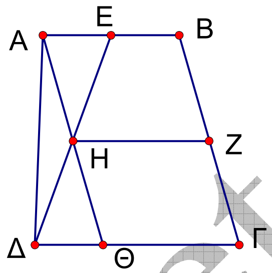
άρα $ΑΓ = ΒΔ$,

δηλαδή το τραπέζιο να είναι ισοσκελές.

9.

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΓΔ = \frac{3}{2}ΑΒ$. Αν $Ε$, $Ζ$, $Η$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$ και $ΔΕ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΒΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Αν η προέκταση της $ΑΗ$ τέμνει τη $ΓΔ$ στο $Θ$, τότε
$ΘΔ = ΔΓ - ΑΒ$.

Λύση



Έστω $ΑΒ = α$, οπότε $ΓΔ = \frac{3}{2}α$

Στο τραπέζιο $ΕΒΓΔ$ έχουμε

$$ΗΖ = \frac{ΕΒ + ΔΓ}{2} = \frac{\frac{α}{2} + \frac{3α}{2}}{2} = \frac{\frac{4α}{2}}{2} = α = ΑΒ$$

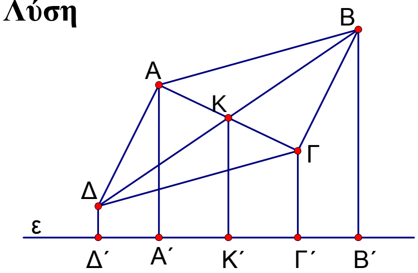
Αλλά είναι και $ΗΖ \parallel ΑΒ$, οπότε το $ΑΒΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο

$ΑΒΖΗ$ παρ/μμο $\Rightarrow$ $ΑΗΘ \parallel ΒΖΓ$, αλλά και $ΑΒ \parallel ΘΓ$, οπότε
$ΑΒΓΘ$ παρ/μμο, άρα $ΘΓ = ΑΒ$
Έχουμε $ΘΔ = ΓΔ - ΓΘ = ΓΔ - ΑΒ$.

10.

Αν $Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Κ΄$ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου $Κ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ αντίστοιχα σε ευθεία $ε$ που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι $ΑΑ΄+ ΒΒ΄+ ΓΓ΄+ ΔΔ΄= 4ΚΚ΄$.

Λύση



$ΑΑ΄Γ΄Γ$ τραπέζιο με διάμεσο $ΚΚ΄ \Rightarrow$
$ΑΑ΄+ ΓΓ΄= 2ΚΚ΄$

$ΒΒ΄Δ΄Δ$ τραπέζιο με διάμεσο $ΚΚ΄ \Rightarrow$
$ΒΒ΄+ ΔΔ΄= 2ΚΚ΄$

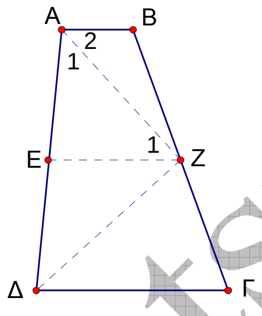
Άρα $ΑΑ΄+ ΒΒ΄+ ΓΓ΄+ ΔΔ΄= 4ΚΚ΄$.

Σύνθετα Θέματα

1.

Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ έχουμε $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται στη $ΒΓ$.

Λύση



Επειδή γίνεται λόγος για το άθροισμα των βάσεων, θεωρούμε τη διάμεσο $ΕΖ$.

Τότε $ΕΖ = \dfrac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \dfrac{ΑΔ}{2} = ΑΕ = ΕΔ$

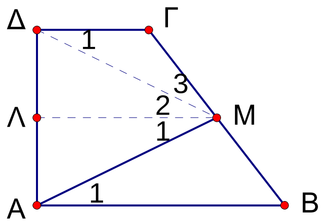
Τρ. $ΕΑΖ$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{Α}_1 = \hat{Ζ}_1$
$ΑΒ \parallel ΕΖ$ $\Rightarrow \hat{Α}_2 = \hat{Ζ}_1$

Άρα $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ δηλαδή $ΑΖ$ διχοτόμος της $\hat{Α}$.
Ομοίως $ΔΖ$ διχοτόμος της $\hat{Δ}$.

2.

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^{o}$ και $ΒΓ = 2ΓΔ$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Γ = 3Μ\hat{Α}Β$.

Λύση



Φέρουμε τη διάμεσο $ΜΛ$ του τραπεζίου, η οποία σαν παράλληλη στις βάσεις θα είναι $\perp ΔΑ$.

Έτσι, η $ΜΛ$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $ΜΑΔ$ άρα και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$. **(1)**

$ΒΓ = 2ΓΔ \Rightarrow ΓΜ = ΓΔ \Rightarrow \hat{Μ}_3 = \hat{Δ}_1$

και $ΜΛ \parallel ΓΔ \Rightarrow \hat{Μ}_2 = \hat{Δ}_1$

Έτσι, $\hat{Μ}_2 = \hat{Μ}_3$ **(2)**

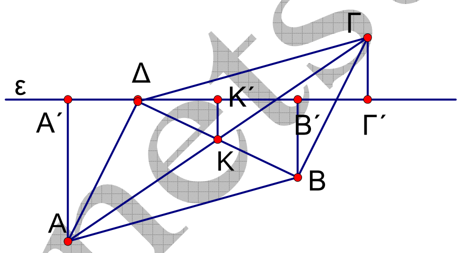
$ΜΛ \parallel ΒΑ \Rightarrow \hat{Μ}_1 = \hat{Α}_1$ **(3)**

(1), (2), (3) $\Rightarrow Α\hat{Μ}Γ = 3Μ\hat{Α}Β$.

3.

Μια ευθεία $ε$ διέρχεται από την κορυφή $Δ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές $Β$ και $Γ$. Αν $Α΄$, $Β΄$ και $Γ΄$ οι προβολές των $Α$, $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα στην ευθεία $ε$, να αποδείξετε ότι $ΑΑ΄ - ΓΓ΄ = ΒΒ΄$ (με $ΑΑ΄ > ΓΓ΄$).

Λύση



Οι διαγώνιοι του παρ/μμου διχοτομούνται σε σημείο $Κ$.
Φέρουμε $ΚΚ΄ \perp ε$

$ΑΑ΄ΓΓ΄$ τραπέζιο $\Rightarrow ΚΚ΄ = \dfrac{ΑΑ΄ - ΓΓ΄}{2}$

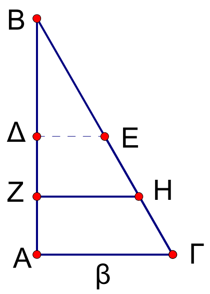
τρ.$ΔΒΒ΄$ $\Rightarrow ΚΚ΄ = \dfrac{ΒΒ΄}{2}$

Άρα $ΑΑ΄ - ΓΓ΄ = ΒΒ΄$

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Αν $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$, να υπολογισθεί η γωνία $\hat{B}$.

Λύση



Έστω ΑΓ = β

Είναι $\Delta E =\parallel \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$

ΔΕΓΑ τραπέζιο με διάμεσο ΖΗ $\Rightarrow$

$ZH = \frac{A\Gamma + \Delta E}{2} \Rightarrow 2ZH = \beta + \frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$2.\frac{3}{8}B\Gamma = \frac{3\beta}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\beta$.

Έτσι, η υποτείνουσα ΒΓ είναι διπλάσια της ΑΓ, άρα $\hat{B} = 30^o$.

5.

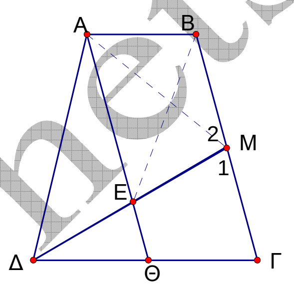
Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) αν ΔΜ = ΔΓ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε ΑΜ = ΒΕ

ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε $AE = \frac{3}{4}B\Gamma$.

Λύση

i)



Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τραπέζιο ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές.

τρ.ΔΜΓ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$

Αλλά $\hat{M}_2$ παραπληρωματική της $\hat{M}_1$ και

$\hat{B}$ παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}$ από το τραπέζιο

Άρα $\hat{M}_2 = \hat{B}$

Έτσι ΑΒΜΕ ισοσκελές τραπέζιο

ii) Η ΑΕ τέμνει τη ΔΓ σε σημείο Θ και επειδή ΕΘ || ΜΓ από το μέσο Ε,

θα είναι $E\Theta = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

ΑΒΓΘ παρ/μμο $\Rightarrow A\Theta = B\Gamma$

Έτσι $AE = A\Theta - E\Theta = B\Gamma - \frac{B\Gamma}{4} = \frac{3}{4}B\Gamma$.