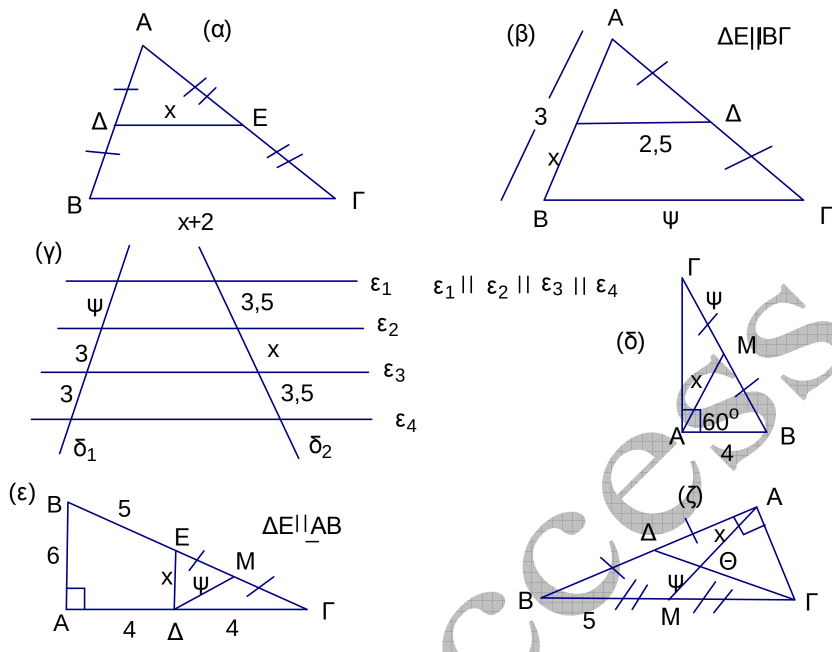
5.6 – 5.9

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 110 – 112

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και ψ



Απάντηση

Στο σχήμα (α) : $x = \dfrac{x+2}{2} \Leftrightarrow 2x = x + 2 \Leftrightarrow x = 2$

Στο σχήμα (β) : $x = 1{,}5$ και $2{,}5 = \dfrac{\psi}{2} \Leftrightarrow \psi = 5$

Στο σχήμα (γ): $x = 3{,}5$ και $\psi = 3$

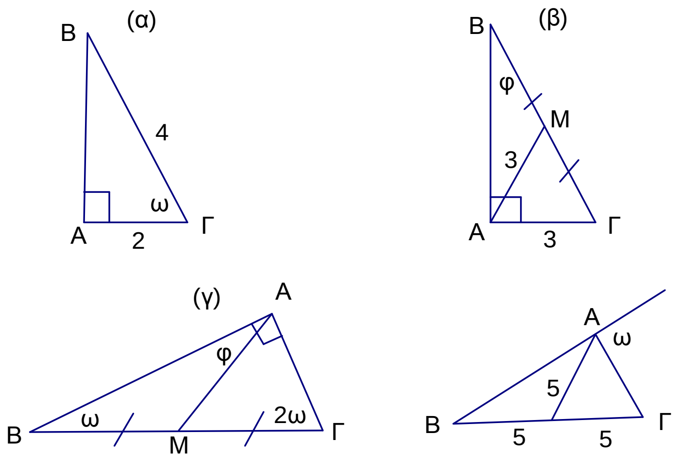
Στο σχήμα (δ): $x = MB = AB = 4$ και $\psi = 4$

Στο σχήμα (ε): $x = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ και $\psi = \dfrac{E\Gamma}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Στο σχήμα (ζ): $x = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{10}{3}$ και $\psi = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{5}{3}$

2.

Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω



Απάντηση

Στο σχήμα (α) : Αφού $A = 90^o$ και $A\Gamma = 2 = \frac{4}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$

θα είναι $\hat{B} = 30^o$ άρα $\hat{\omega} = 60^o$

Στο σχήμα (β) : Αφού $A = 90^o$ και $AM = \frac{B\Gamma}{2} = 3 = A\Gamma$, θα είναι $\hat{\phi} = 30^o$

Στο σχήμα (γ) : Είναι $A = 90^o$ άρα $\hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 90^o$

$\hat{\omega} = 30^o$

και επειδή $AM = MB$, θα είναι $\hat{\omega} = \hat{\phi} = 30^o$

Στο σχήμα (δ) : Η σχεδιασμένη διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς προς την οποία αντιστοιχεί, άρα $B\hat{A}\Gamma = 90^o$, οπότε $\hat{\omega} = 90^o$

3.

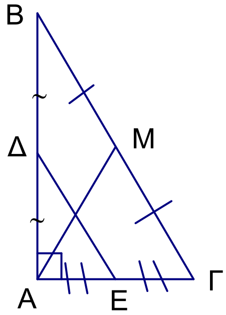
Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο να ταυτίζονται ;

Απάντηση

Ναι. Είναι το ισόπλευρο αφού τα ύψη του ταυτίζονται με τις διαμέσους του .

4.

Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα $AM = \Delta E$



Απάντηση

Αφού $\hat{A} = 90^o$ και AM διάμεσος στην υποτείνουσα,

θα είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Δ μέσο του AB και E μέσο του ΑΓ άρα $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$,

οπότε $AM = \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

5.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

Απάντηση

Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, τότε ισχύει $MA = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.

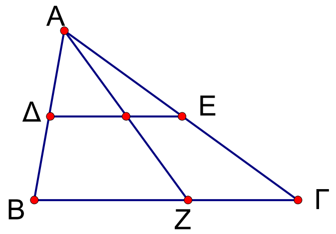
Οπότε ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται και από το Α.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

Λύση



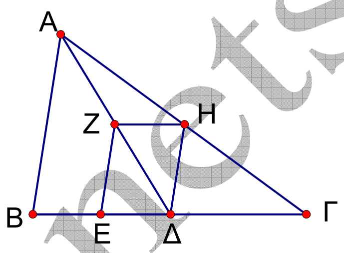
Δ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ $\Rightarrow$ ΔΕ || ΒΓ

Στο τρίγωνο ΑΒΖ η ΔΕ θα τμήσει την ΑΖ στο μέσο της.

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Στο τρίγωνο ΔΒΑ, επειδή τα Ζ, Ε είναι μέσα πλευρών $\Rightarrow$ $ZE = \parallel \frac{AB}{2}$ **(1)**

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $H\Delta = \parallel \frac{AB}{2}$ **(2)**

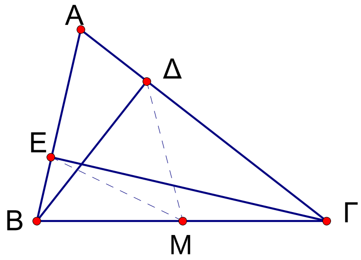
(1) και (2) $\Rightarrow$ $ZE = \parallel H\Delta$

άρα ΔΕΖΗ παραλληλόγραμμο.

3.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

Λύση



EM διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $EB\Gamma$, άρα $EM = \dfrac{B\Gamma}{2}$ **(1)**

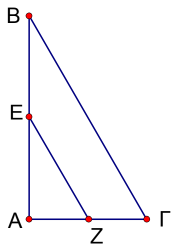
Ομοίως στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{2}$ **(2)**

(1) και (2) $\Rightarrow$ $EM = \Delta M$

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ με $\hat{B} = 30^o$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $EZ = A\Gamma$

Λύση



$\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 30^o$ $\Rightarrow$ $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$

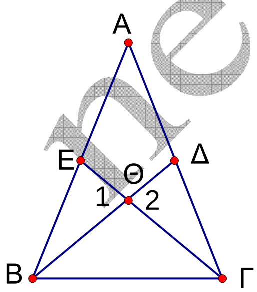
E, Z μέσα $\Rightarrow$ $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Άρα $EZ = A\Gamma$

5.

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

Λύση



Έστω $B\Delta = \mu_\beta$, $\Gamma E = \mu_\gamma$ και Θ το κέντρο βάρους.

Είναι $B\Theta = \dfrac{2}{3}\mu_\beta$ και $\Gamma\Theta = \dfrac{2}{3}\mu_\gamma$ άρα $B\Theta = \Gamma\Theta$ **(1)**

$\Theta\Delta = \dfrac{1}{3}\mu_\beta$ και $\Theta E = \dfrac{1}{3}\mu_\gamma$ άρα $\Theta E = \Theta\Delta$ **(2)**

$\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$ **(3)**

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ τρ.ΘEB = τρ.$\Theta\Delta\Gamma$ $\Rightarrow$

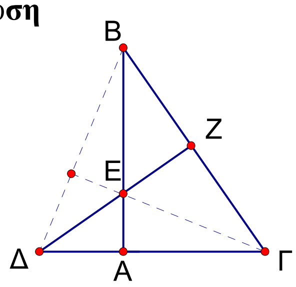
$EB = \Delta\Gamma$ $\Rightarrow$

$AB = A\Gamma$

6.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$. Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΗ \perp ΒΓ$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $ΓΕ \perp ΔΒ$.

Λύση

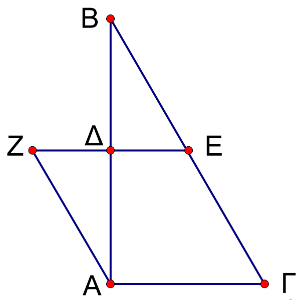


Τα ΒΑ, ΔΖ είναι ύψη του τριγώνου ΔΒΓ, άρα το Ε είναι ορθόκεντρό του.
Άρα η ευθεία ΓΕ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους, δηλαδή $ΓΕ \perp ΔΒ$.

7.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ με $\hat{B} = 30^o$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ.. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Λύση



$ΔΕ = || \dfrac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΖΕ = || ΑΓ$

Άρα το ΑΓΕΖ είναι παρ/μμο **(1)**

$\hat{B} = 30^o$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε

$ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΕΓ$ **(2)**

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

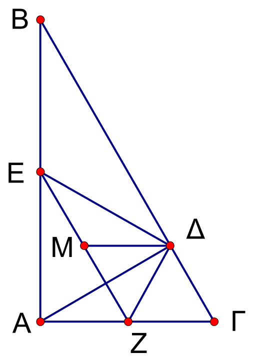
1.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και το ύψος του ΑΔ.

i) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^o$.

ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

Λύση



i)

ΔΕ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ $\Rightarrow$

$\Delta E = \dfrac{AB}{2}$ **(1)**

ΔΖ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ $\Rightarrow$

$\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$ **(2)**

(1) και (2) $\Rightarrow$ τρ.ΔΕΖ = τρ.ΑΕΖ (ΕΖ κοινή)

Άρα $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^o$

ii)

ΔΜ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΖ $\Rightarrow$ $\Delta M = \dfrac{EZ}{2}$

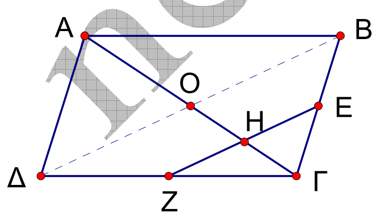
Αλλά $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$ αφού ενώνει τα μέσα Ε και Ζ στο τρίγωνο ΑΒΓ

Άρα $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$

2.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \dfrac{A\Gamma}{4}$.

Λύση



Φέρουμε και τη διαγώνιο ΒΔ.

Στο τρίγωνο ΓΒΔ θα έχουμε ΖΕ || ΔΒ,

άρα και ΖΗ || ΔΟ,

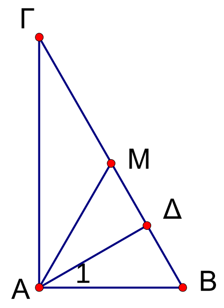
και αφού Ζ μέσο, στο τρίγωνο ΓΟΔ θα έχουμε και το Η μέσο του ΓΟ $\Rightarrow$

$\Gamma H = \dfrac{\Gamma O}{2} = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{\Gamma A}{4}$

3.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσό του AM και το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Λύση



$M\hat{A}\Delta = M\hat{A}B - \hat{A}_1$ **(1)**

AM διάμεσος του ορθ. τριγώνου $AB\Gamma$ $\Rightarrow$

$AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = MB$ δηλαδή MAB τρίγωνο ισοσκελές,

άρα $M\hat{A}B = \hat{B}$ **(2)**

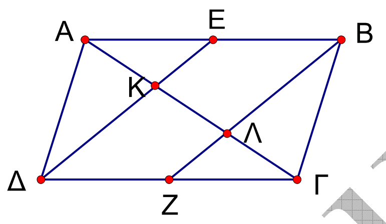
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ **(3)** (οξείες με κάθετες πλευρές)

$(1) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

4.

Αν E, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB, $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$.

Λύση



$EB =\parallel \Delta Z$ $\Rightarrow$ $EBZ\Delta$ παρ/μμο $\Rightarrow$

$B\Lambda Z \parallel EK\Delta$

Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta K$, Z μέσο και $Z\Lambda \parallel \Delta K$ $\Rightarrow$

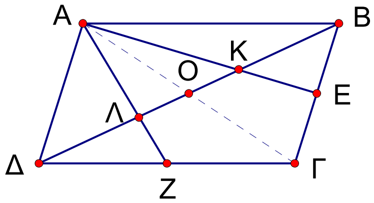
Λ μέσο της ΓK

Ομοίως ……………………K μέσο της $A\Lambda$

5.

Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.

Λύση



Έστω Ο το κέντρο του παρ/μμου.
ΒΟ και ΑΕ είναι διάμεσοι του τρ.ΑΒΓ, άρα το σημείο τομής τους Κ είναι κέντρο βάρους του τριγώνου $\Rightarrow$

$$ΚΟ = \frac{1}{2}\ ΒΚ = \frac{1}{3}ΒΟ \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως $ΛΟ = \frac{1}{2}\ ΔΛ = \frac{1}{3}ΔΟ$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $ΚΟ + ΛΟ = \frac{1}{3}(ΒΟ + ΔΟ)$ $\Rightarrow$ $ΚΛ = \frac{1}{3}\ ΒΔ$ **(3)**

Κ κέντρο βάρους $\Rightarrow$ $ΒΚ = \frac{2}{3}\ ΒΟ = \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}ΒΔ = \frac{1}{3}\ ΒΔ$ **(4)**

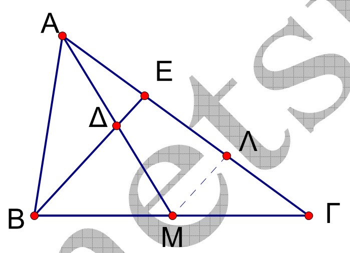
Ομοίως ……… $ΔΛ =$ ………………… $= \frac{1}{3}\ ΒΔ$ **(5)**

(3), (4), (5) $\Rightarrow$ $ΑΚ = ΚΛ = ΛΓ$

6.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΑΕ = \frac{ΕΓ}{2}$.

Λύση



Φέρουμε $ΜΛ \parallel ΒΕ$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΑΕ = ΕΛ = ΛΓ$

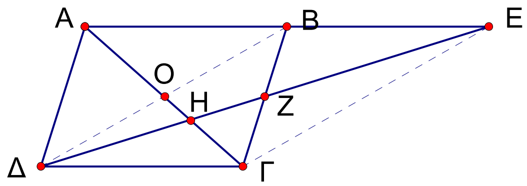
Στο τρίγωνο ΑΜΛ, Δ μέσο και $ΔΕ \parallel ΜΛ$ $\Rightarrow$
$ΑΕ = ΕΛ$
Στο τρίγωνο ΓΒΕ, Μ μέσο και $ΜΛ \parallel ΒΕ$ $\Rightarrow$
$ΕΛ = ΛΓ$

7.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι

i) ΒΖ = ΖΓ, **ii)** $ΓΗ = \dfrac{ΑΗ}{2}$

Λύση



Φέρουμε τις ΒΔ, ΕΓ
Ο το κέντρο του παρ/μμου

i)
ΒΕ = || ΔΓ $\Rightarrow$ ΒΕΓΔ παρ/μμο.
άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Ζ, δηλαδή ΒΖ = ΖΓ.

ii)
Οι ΔΖ και ΓΟ είναι διάμεσοι του τρ.ΒΓΔ,
άρα το Η είναι το κέντρο βάρους του $\Rightarrow$

$ΓΗ = \dfrac{2}{3}ΓΟ = \dfrac{1}{3}ΓΑ = \dfrac{1}{3}δ$ **(1)** και

$ΗΟ = \dfrac{1}{3}ΓΟ = \dfrac{1}{6}ΓΑ = \dfrac{1}{6}δ$ (όπου $δ = ΓΑ$)

$ΑΗ = ΑΟ + ΟΗ = \dfrac{δ}{2} + \dfrac{δ}{6} = \dfrac{4δ}{6} = \dfrac{2}{3}δ$ **(2)**

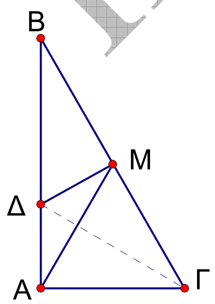
Από τις (1) και (2) $ΓΗ = \dfrac{ΑΗ}{2}$

8.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 30^o$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξουμε ότι

i) ΜΔ = ΑΔ, **ii)** $ΜΔ = \dfrac{ΑΒ}{3}$.

Λύση



i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{Β} = 30^o \Rightarrow ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$

Φέρουμε τη ΔΓ.
τρ.ΜΔΓ = τρ.ΑΔΓ διότι είναι ορθογώνια με ΔΓ κοινή και ΜΓ = ΑΓ
Οπότε ΜΔ = ΑΔ

ii) Στο τρίγωνο ΜΒΔ, $\hat{Β} = 30^o \Rightarrow$

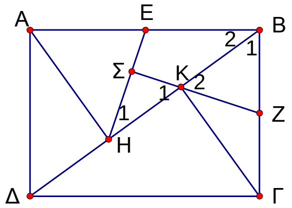
$ΜΔ = \dfrac{1}{2}ΒΔ \overset{(i)}{\Rightarrow} ΑΔ = \dfrac{1}{2}ΒΔ.$

Άρα $ΑΔ = \dfrac{1}{3}ΑΒ \overset{(i)}{\Rightarrow} ΜΔ = \dfrac{1}{3}ΑΒ$

9.

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η, Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΕΗ \perp ΚΖ$.

Λύση



Έστω Σ η τομή των ΕΗ, ΚΖ.
Από το τρίγωνο ΣΚΗ, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\hat{Η}_1 + \hat{Κ}_1 = 90^o$$

ΗΕ διάμεσος του ορθ. τριγώνου ΗΑΒ $\Rightarrow$

$ΗΕ = \dfrac{ΑΒ}{2} = ΕΒ \;\Rightarrow\; \hat{Η}_1 = \hat{Β}_2$ **(1)**

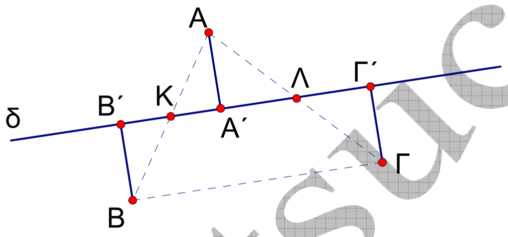
ΚΖ διάμεσος του ορθ. τριγώνου ΚΒΓ $\Rightarrow$ $ΚΖ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΖΒ \;\Rightarrow\; \hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2 = \hat{Β}_1$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow \hat{Η}_1 + \hat{Κ}_1 = \hat{Β}_2 + \hat{Β}_1 = 90^o$.

10.

Τρία χωριά, που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ανήκουν στον ίδιο δήμο.
Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

Λύση



Ας είναι Α, Β, Γ οι θέσεις των τριών χωριών.

Ανάλυση

Έστω δ ο ζητούμενος δρόμος και Κ, Λ τα σημεία τομής του με τις ΑΒ, ΑΓ.
Τότε οι αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ των τριών χωριών από το δρόμο θα είναι ίσες.

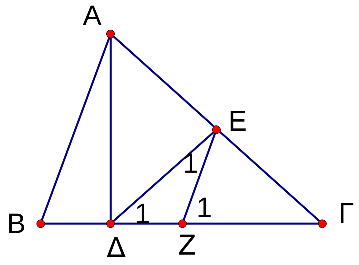
Θα είναι τρ.ΑΑ΄Κ = τρ.ΒΒ΄Κ (ορθογώνια με ΑΑ΄= ΒΒ΄ και κατά κορυφή γωνίες στο Κ).
Τότε ΚΑ = ΚΒ δηλαδή το Κ θα είναι μέσο του τμήματος ΑΒ.
Ομοίως το Λ θα είναι μέσο του τμήματος ΑΓ.
Ο δρόμος, λοιπόν θα είναι η ευθεία που ορίζεται από τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ,
ή από τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ,
ή από τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ.
Έτσι, θα υπάρχουν τρεις τέτοιοι δρόμοι.

Σύνθετα Θέματα

1.

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$. Αν $Ε$ και $Ζ$ τα μέσα των $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Ε}Ζ = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

Λύση



Είναι $\hat{Ζ}_1 = \hat{Δ}_1 + \hat{Ε}_1$ ($\hat{Ζ}_1$ εξωτερική του τρ. $ΔΖΕ$)

Άρα $\hat{Ε}_1 = \hat{Ζ}_1 - \hat{Δ}_1$ **(1)**

$ΖΕ \parallel ΒΑ \Rightarrow \hat{Ζ}_1 = \hat{Β}$

$ΔΕ$ διάμεσος του ορθ. τριγώνου $ΑΔΓ$ $\Rightarrow$

τρ. $ΕΔΓ$ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}$

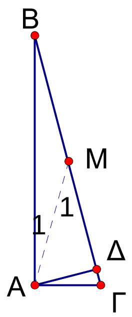
(1) $\Rightarrow$ $\hat{Ε}_1 = \hat{Β} - \hat{Γ}$

2.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^o$) φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{Β} = 15^o$, τότε $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$ και αντίστροφα.

(Υπόδειξη : Φέρουμε τη διάμεσο $ΑΜ$)

Λύση



Συμπεράσματα που ισχύουν και για το ευθύ και για το αντίστροφο.

$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΜ = ΜΓ$ $\Rightarrow$ τρ.$ΜΒΑ$ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{Α}_1 = \hat{Β}$

Αλλά $\hat{Μ}_1 = \hat{Α}_1 + \hat{Β}$ (εξωτερική του τρ. $ΜΑΒ$) $\Rightarrow$

$\hat{Μ}_1 = \hat{Β} + \hat{Β} = 2\hat{Β}$

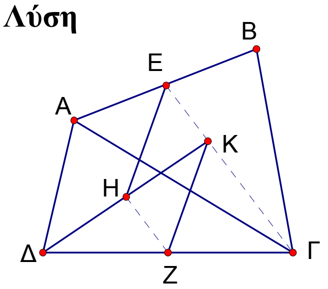
Αποδεικνύουμε το ευθύ και το αντίστροφο ταυτόχρονα, με ισοδυναμίες.

$$\hat{Β} = 15^o \Leftrightarrow \hat{Μ}_1 = 30^o \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{ΜΑ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$$

3.

Σε κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε το βαρύκεντρο $Κ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ και τα μέσα $Ε$, $Ζ$ και $Η$ των $ΑΒ$, $ΓΔ$ και $ΚΔ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΕΗ \parallel ΚΖ$

Λύση



Φέρουμε τη διάμεσο $ΓΕ$ και τη $ΖΗ$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΕΚΖΗ$ παρ/μμο,
ή ότι $ΚΕ =\parallel ΖΗ$.

$Κ$ βαρύκεντρο του τρ. $ΑΒΓ$ $\Rightarrow$ $ΚΕ = \frac{ΓΚ}{2}$ **(1)**

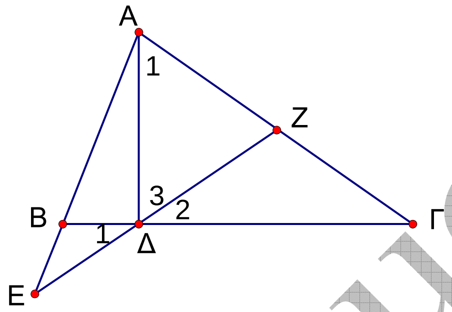
$Η$, $Ζ$ μέσα πλευρών του τρ.$ΔΚΓ$ $\Rightarrow$ $ΖΗ =\parallel \frac{ΓΚ}{2}$ **(2)**

(1) και (2) $\Rightarrow$ $ΚΕ =\parallel ΖΗ$.

4.

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} = 2\hat{Γ} < 90^0$ και το ύψος του $ΑΔ$. Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι η $ΔΕ$ διχοτομεί την πλευρά $ΑΓ$.

Λύση



Η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την $ΑΓ$ σε σημείο $Ζ$.

Τρ. $ΒΔΕ$ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{Ε} = \hat{Δ}_1$

Αλλά $\hat{Β} = \hat{Ε} + \hat{Δ}_1$ (εξωτερική του $ΒΕΔ$)

Άρα $\hat{Β} = 2\hat{Ε}$ $\Rightarrow$ $2\hat{Γ} = 2\hat{Ε}$ $\Rightarrow \hat{Γ} = \hat{Ε}$

Έτσι $\hat{Ε} = \hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}$

$\hat{Δ}_2 = \hat{Γ}$ $\Rightarrow$ τρ.$ΖΔΓ$ ισοσκελές με $ΖΔ = ΖΓ$ **(1)**

Από το ορθ. τρίγωνο $ΑΔΓ$, η $\hat{Α}_1$ είναι συμπληρωματική της $\hat{Γ}$.

Λόγω του ύψους $ΑΔ$, η $\hat{Δ}_3$ είναι συμπληρωματική της $\hat{Δ}_2$.

Άρα $\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_3$ $\Rightarrow$ τρ.$ΖΑΔ$ ισοσκελές με $ΖΔ = ΖΑ$ **(2)**

Από τις (1) , (2) $\Rightarrow$ $ΖΓ = ΖΑ$.

5.

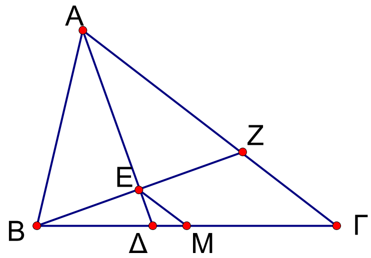
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του $ΑΔ$ και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$.

Αν $Ε$ η προβολή του $Β$ στη διχοτόμο $ΑΔ$, να αποδείξετε ότι :

i) $ΕΜ \parallel ΑΓ$

ii) $ΕΜ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

Λύση



Προεκτείνουμε τη $ΒΕ$ και τέμνει την $ΑΓ$ σε σημείο $Ζ$.
Το $ΑΕ$ είναι ύψος και διχοτόμος του τρ.$ΑΒΖ$, άρα και διάμεσος και το τρίγωνο ισοσκελές με $ΑΖ = ΑΒ$
Έτσι, το $Ε$ είναι μέσο του τμήματος $ΒΖ$.

i)

$Ε$, $Μ$ μέσα πλευρών του τριγώνου $ΒΖΓ$ $\Rightarrow$ $ΕΜ =\parallel \dfrac{ΖΓ}{2}$

ii)

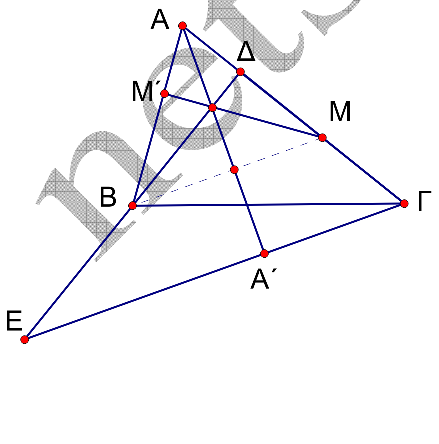
$$ΕΜ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΖ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$$

6.

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, το ύψος του $ΒΔ$ και $Μ$ το μέσο του τμήματος $ΓΔ$.

Προεκτείνουμε τη $ΔΒ$ κατά τμήμα $ΒΕ = ΔΒ$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το $Μ$ στην $ΑΒ$, η κάθετη από το $Α$ στην $ΕΓ$ και η $ΒΔ$ συντρέχουν.

Λύση



Φέρουμε τη $ΒΜ$, η οποία ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τρ. $ΔΕΓ$, άρα $ΒΜ \parallel ΕΓ$.

Έστω $ΑΑ΄ \perp ΕΓ$. Τότε $ΑΑ΄ \perp ΒΜ$, δηλαδή η $ΑΑ΄$ είναι φορέας ύψους του τριγώνου $ΑΒΜ$.

Φορείς υψών του ίδιου τριγώνου είναι και οι $ΜΜ΄ \perp ΑΒ$, $ΒΔ \perp ΑΓ$.

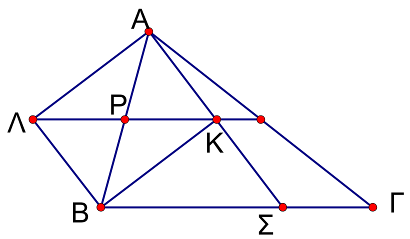
Άρα διέρχονται από το ίδιο σημείο-ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΜ$, δηλαδή συντρέχουν.

7.
Αν $Κ$ και $Λ$ είναι οι προβολές της κορυφής $Α$ τριγώνου $ΑΒΓ$ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

i) το $ΑΚΒΛ$ είναι ορθογώνιο

ii) η ευθεία $ΚΛ$ διέρχεται από το μέσο της $ΑΓ$.

Λύση



i)
Είναι $ΒΛ \perp ΒΚ$ σαν διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών.
Έτσι το τετράπλευρο $ΑΚΒΛ$ έχει τρεις γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο.

ii)
Συμβολίζουμε $Σ$ την τομή των $ΑΚ$, $ΒΓ$ και $Ρ$ την τομή των $ΑΒ$, $ΛΚ$.
Το $ΒΚ$ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου $ΒΑΣ$, άρα και διάμεσος,
δηλαδή το $Κ$ είναι μέσο του $ΑΣ$.
$ΑΚΒΛ$ ορθογώνιο $\Rightarrow$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή
το $Ρ$ είναι μέσο του $ΑΒ$
Στο τρίγωνο, λοιπόν, $ΑΒΣ$ θα είναι $ΡΚ \parallel ΒΣ$, άρα και $ΛΡΚ \parallel ΒΓ$, οπότε η $ΛΚ$ θα διέλθει από το μέσο της $ΑΓ$.

8.

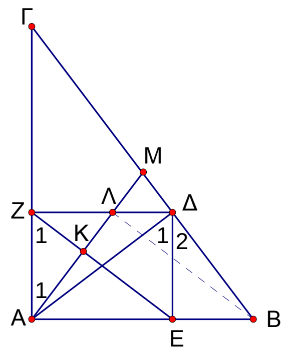
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι

i) ΑΔ = ΕΖ

ii) ΑΜ ⊥ ΕΖ

iii) η διάμεσος ΑΜ, το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Λύση



i)

Το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις γωνίες ορθές ⇒ έχει ίσες διαγωνίους.

ii)

Έστω Κ η τομή των ΑΜ, ΕΖ.

Στο τρίγωνο ΚΑΖ, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = 90^o$$

Είναι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma \Rightarrow$

τρ.ΜΑΓ ισοσκελές ⇒ $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$. **(1)**

τρ.ΖΑΕ = τρ.ΔΑΕ ⇒ $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$. Αλλά $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (οξείες με ⊥ πλευρές).

Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ **(2)**

(1) + (2) ⇒ $\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{B}$ ⇒ $\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = 90^o$

iii)

Έστω Λ η τομή των ΑΜ, ΖΔ..

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΒΛ ∥ ΕΖ, ή αρκεί ότι το ΒΛΖΕ είναι παρ/μμο.

Επειδή, όμως, ΖΛΔ ∥ ΑΕΒ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΖΛ = ΕΒ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΖΛ και ΔΕΒ.

Είναι ορθογώνια με ΑΖ = ΔΕ και

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (από την (1)) = $\hat{\Delta}_2$ (εντός- εκτός – επί τα αυτά). Άρα τρ. ΑΖΛ= τρ.ΔΕΒ.