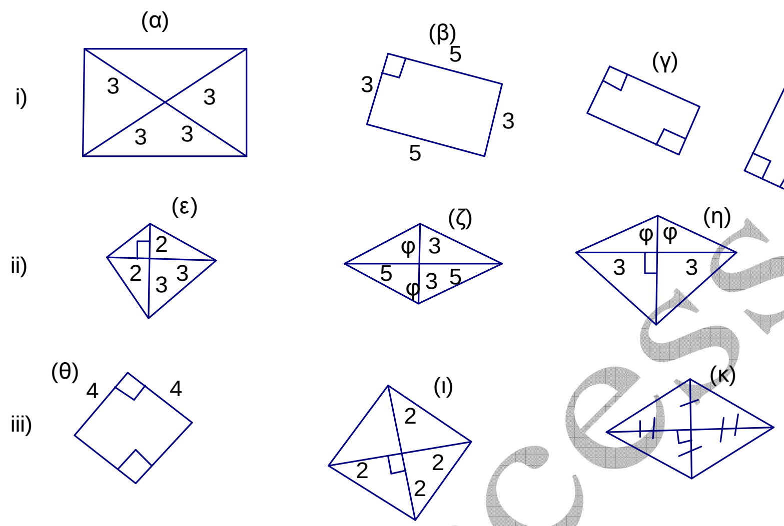
5.3 – 5.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 103 – 104

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι

i) Ορθογώνια, **ii)** ρόμβοι, **iii)** τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;



i)
Είναι το (α) διότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο, είναι και ίσες οπότε είναι ορθογώνιο.
Είναι το (β) διότι οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο, έχει και μία γωνία ορθή, άρα είναι ορθογώνιο
Δεν είναι το (γ). Δεν ξέρουμε αν είναι παραλληλόγραμμο.
Είναι το (δ) διότι τρείς γωνίες του είναι ορθές

ii)
Ρόμβος είναι μόνο το (ζ), διότι είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
Τα άλλα τετράπλευρα δεν είναι παραλληλόγραμμα

iii)
Τετράγωνο είναι μόνο το (ι), αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται, είναι ίσες και τέμνονται κάθετα
Το (θ) δεν ξέρουμε αν είναι παραλληλόγραμμο.
Το (κ) ενώ είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιες δεν ξέρουμε αν αυτές είναι και ίσες.

2.

Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι

i) Ορθογώνιο **ii)** Ρόμβος

Απάντηση

i)

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω

α) Είναι παραλληλόγραμμο με μία γωνία ορθή

β) Είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες

γ) Έχει τρεις γωνίες ορθές

δ) Όλες του οι γωνίες είναι ίσες

ii)

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω

α) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες

β) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες

γ) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του είναι κάθετες

δ) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του .

3.

Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγώνιες τους ;

i) Ορθογώνιο, **ii)** Ρόμβος, **iii)** Τετράγωνο

Απάντηση

i)

Σε 4 ισοσκελή ανά δύο ίσα

ii)

Σε 4 ορθογώνια ίσα μεταξύ τους

iii)

Σε τέσσερα ορθογώνια και ισοσκελή ίσα μεταξύ τους

4.

Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές , γωνίες ή διαγώνιες μεταξύ των ζευγών των σχημάτων

i) Τετράγωνο – ρόμβος
ii) Τετράγωνο – ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

Απάντηση

i)
Ομοιότητες: Ίσες πλευρές, κάθετες διαγώνιες
Διαφορές: Στο τετράγωνο οι γωνίες είναι ορθές , ενώ στον ρόμβο δεν είναι
Στο τετράγωνο οι διαγώνιες είναι ίσες ενώ στον ρόμβο όχι

ii)
Ομοιότητες: Ορθές γωνίες, διαγώνιες διχοτομούνται
Διαφορές : Στο τετράγωνο οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του, ενώ στο ορθογώνιο δεν συμβαίνει αυτό

iii)
Ομοιότητες: Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και οι διαγώνιες διχοτομούνται
Διαφορές: Στο ρόμβο όλες οι πλευρές είναι ίσες και οι διαγώνιες του είναι κάθετες, ενώ στο ορθογώνιο δεν συμβαίνει τίποτα από τα δύο .

5.

Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση

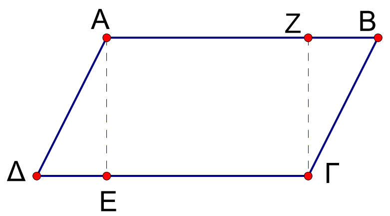
i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες ……………. **x**
ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες
iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο …… **x**
iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος ……………………….. **x**

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε $ΑΕ \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.

Λύση

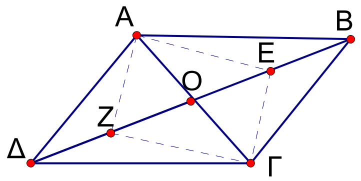


$ΑΕ \perp ΔΓ \Rightarrow ΑΕ \perp ΑΒ$
$ΓΖ \perp ΑΒ \Rightarrow ΓΖ \perp ΔΓ$

Άρα το τετράπλευρο ΑΖΓΕ έχει τέσσερις ορθές γωνίες, άρα είναι ορθογώνιο.

2.
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2 ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση

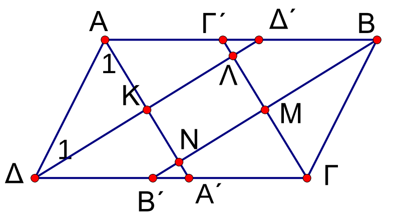


Το Ο είναι μέσο των ΑΓ, ΒΔ και ΖΕ
ΒΔ = 2 ΑΓ $\Rightarrow$ ΖΕ = ΑΓ

Έτσι, οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΕ του ΑΕΓΖ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

3.
Να αποδείξετε ότι, αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

Λύση



Έστω ΑΑ΄ και ΔΔ΄ οι διχοτόμοι των $\hat{A}$, $\hat{\Delta}$
Είναι

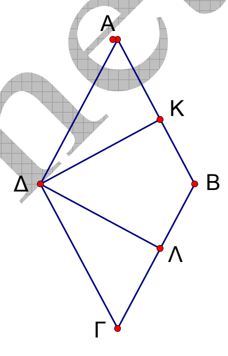
$$\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}=\frac{180^0}{2}=90^0$$

Άρα, στο τρίγωνο ΚΑΔ, έχουμε $\hat{K}=90^o$
Ομοίως $\hat{\Lambda}=\hat{M}=\hat{N}=90^0$.

Άρα ΚΛΜΝ ορθογώνιο.

4.
Να αποδείξετε ότι, ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Λύση



Έστω το παρ/μμο ΑΒΓΔ και ΔΚ, ΔΛ οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του.

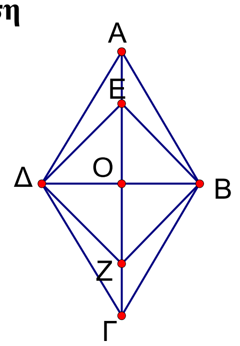
Ευθύ: Όταν ΔΚ = ΔΛ
Τα τρίγωνα ΔΚΑ και ΔΛΓ είναι ίσα, διότι είναι ορθογώνια και έχουν ΔΚ = ΔΛ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.
Άρα ΔΑ = ΔΓ, οπότε το παρ/μμο είναι ρόμβος.

Αντίστροφο: Όταν ΑΒΓΔ ρόμβος.
Τα τρίγωνα ΔΚΑ και ΔΛΓ είναι ίσα, διότι είναι ορθογώνια και έχουν ΔΑ = ΔΓ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.
Άρα ΔΚ = ΔΛ

5.

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.

Λύση

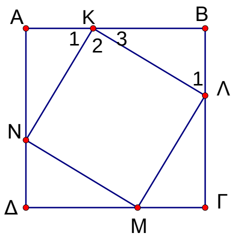


Στο ΔΕΒΖ οι διαγώνιοί του:
διχοτομούνται, άρα είναι παρ/μμο
και είναι κάθετες, άρα είναι ρόμβος
και είναι ίσες, άρα και ορθογώνιο.
Άρα τετράγωνο.

6.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΛΚ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες.

Άρα είναι ίσα. $\Rightarrow$ $\hat{\mathrm{K}}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και ΚΝ = ΚΛ

Όμως, από το ορθ. τρίγωνο ΒΚΛ έχουμε

$\hat{\Lambda}_1 + \hat{\mathrm{K}}_3 = 90^o$

Άρα $\hat{\mathrm{K}}_1 + \hat{\mathrm{K}}_3 = 90^o$.

Τότε $\hat{\mathrm{K}}_2 = 90^o$

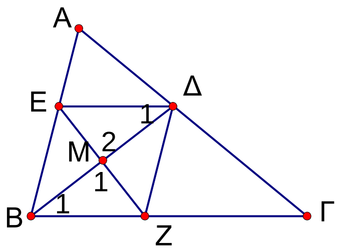
Ομοίως για τις άλλες γωνίες και τις πλευρές του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ.
Έχει, λοιπόν, ορθές γωνίες και ίσες πλευρές, άρα είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.

Λύση



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΒΖ

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{M}_2 = \hat{M}_1$ κατά κορυφή

$M\Delta = MB$

Άρα είναι ίσα $\Rightarrow$ $E\Delta = BZ$, αλλά και $\parallel$.

Άρα το ΕΒΖΔ είναι παρ/μμο.

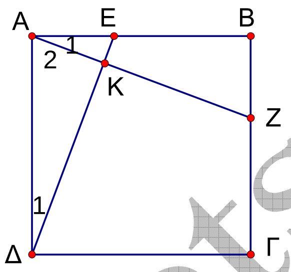
Η διαγώνιος ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}Z$, άρα το παρ/μμο ΕΒΖΔ γίνεται ρόμβος.

2.

Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι

i) $AZ = \Delta E$ ii) $AZ \perp \Delta E$

Λύση



i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΑ έχουν κάθετες πλευρές ίσες, άρα είναι ίσα $\Rightarrow$

$AZ = \Delta E$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$

ii) Αλλά $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$

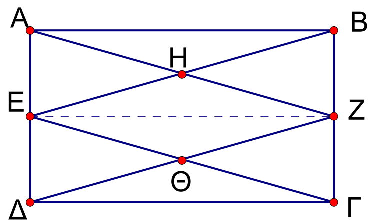
Άρα $\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = 90^O$

Τότε, στο τρ.ΚΑΔ έχουμε $\hat{K} = 90^o$,

δηλ. $AZ \perp \Delta E$

3.
Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

Λύση



Φέρουμε την ΕΖ.
ΑΒΖΕ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΗΕ = ΗΖ **(1)**

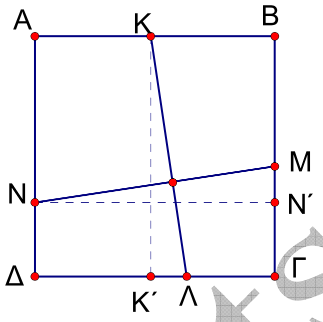
ΑΕ $=\parallel$ ΖΓ $\Rightarrow$ ΑΕΓΖ παρ/μμο $\Rightarrow$
ΗΖ $\parallel$ ΕΘ **(2)**

ΕΔ $=\parallel$ ΒΖ $\Rightarrow$ ΕΔΖΒ παρ/μμο $\Rightarrow$
ΕΗ $\parallel$ ΘΖ **(3)**

(2) και (3) $\Rightarrow$ ΕΘΖΗ παρ/μμο. Και λόγω της (1) ρόμβος.

4.
Να αποδείξετε ότι, αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Λύση



Έστω ΚΛ και ΝΜ τα κάθετα τμήματα.

Φέρουμε ΚΚ΄ $\perp$ ΔΓ και ΝΝ΄ $\perp$ ΒΓ
Τότε ΚΚ΄ $= \perp$ ΝΝ΄= πλευρά του τετραγώνου

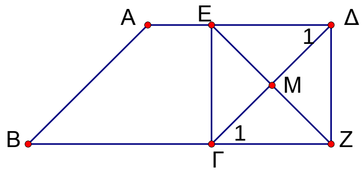
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΚ΄Λ, ΝΝ΄Μ είναι ίσα, διότι έχουν ΚΚ΄=ΝΝ΄ και
$\hat{K} = \hat{N}$ (οξείες με πλευρές κάθετες).
Άρα ΚΛ = ΝΜ.

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{B} = 45^o$. Από το μέσο $Μ$ της $ΓΔ$ φέρουμε κάθετο πάνω στη $ΓΔ$ και έστω $Ε$ και $Ζ$ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο.

Λύση



Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΔΕ$, $ΜΓΖ$ είναι ίσα διότι

$\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{B} = 45^o$ (εντός εναλλάξ)

και $ΜΓ = ΜΔ$

Άρα $ΜΕ = ΜΖ$

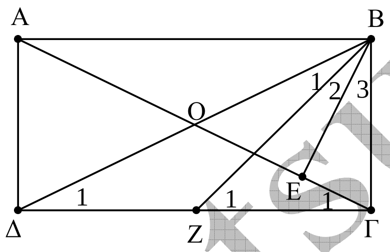
Έτσι, οι $ΔΓ$, $ΕΖ$ διχοτομούνται, είναι και κάθετες άρα το $ΔΕΓΖ$ είναι ρόμβος
Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει και ίσες διαγώνιες.

Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΜΓΖ$ έχει $\hat{Γ}_1 = 45^o$, άρα είναι και ισοσκελές με $ΜΓ = ΜΖ$ άρα και $ΔΓ = ΕΖ$.

2.

Σε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ φέρουμε $ΒΕ \perp ΑΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{B}Ε$ τέμνει τη $ΓΔ$ στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι $ΒΓ = ΓΖ$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{Z}_1 = \hat{B}_2 + \hat{B}_3$

$\hat{Z}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΖΒΔ$, άρα

$\hat{Z}_1 = \hat{Δ}_1 + \hat{B}_1$.

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\hat{Δ}_1 + \hat{B}_1 = \hat{B}_2 + \hat{B}_3$, δηλαδή ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_3$,

Πράγμα που ισχύει αφού $ΟΔ = ΟΓ \Rightarrow \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ και $\hat{Γ}_1 = \hat{B}_3$ ως οξείες με πλευρές κάθετες.

3.

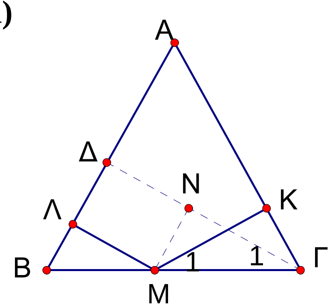
Να αποδείξετε ότι :

i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του).

ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του, είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

Λύση

i)



Μ το τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ

ΜΚ, ΜΛ οι αποστάσεις από τις ΑΒ, ΑΓ

ΓΔ ύψος

Θα αποδείξουμε ότι ΜΚ + ΜΛ = ΓΔ

Φέρουμε ΜΝ ⊥ ΓΔ

ΜΝΔΛ ορθογώνιο (τρεις γωνίες ορθές) ⇒

ΜΛ = ΝΔ

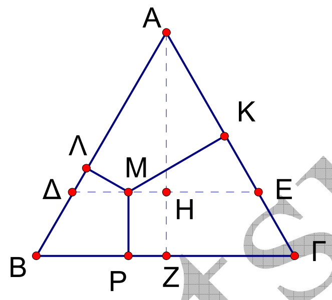
Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι ΜΚ = ΓΝ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΝΜΓ, ΚΜΓ.

Είναι ορθογώνια με κοινή την υποτείνουσα ΜΓ και $N\hat{M}\Gamma = \hat{B}$ (εντός εναλλάξ) $= \hat{\Gamma}$.

Είναι, λοιπόν, ίσα, άρα ΜΚ = ΓΝ.

ii)



Μ το τυχαίο εσωτερικό σημείο

ΜΚ, ΜΛ, ΜΡ οι αποστάσεις από τις πλευρές

Φέρουμε το ύψος ΑΖ και ΔΜΗΕ || ΒΓ

Τότε τρ.ΑΔΕ ισόπλευρο και ΜΡ = ΗΖ **(1)**

Εφαρμόζουμε το i) στο τρ.ΑΔΕ, οπότε

ΜΚ + ΜΛ = ΑΗ **(2)** (το ισόπλευρο τρίγωνο έχει ίσα ύψη)

(1) + (2) ⇒ ΜΚ + ΜΛ + ΜΡ = ΑΖ