

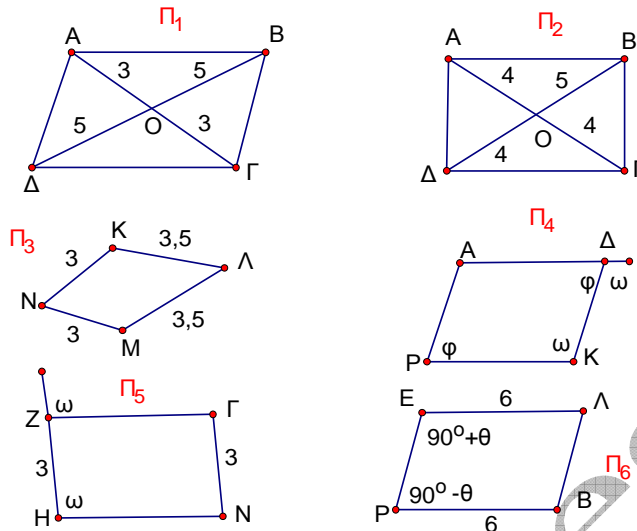
## 5.1 – 5.2

### Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 99 – 100

### Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα ποια όχι και γιατί;



#### Απάντηση

Είναι το  $\Pi_1$  διότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται

Δεν είναι το  $\Pi_2$  διότι οι διαγώνιοι δεν διχοτομούνται

Δεν είναι το  $\Pi_3$  διότι οι απέναντι πλευρές του δεν είναι ίσες

Είναι το  $\Pi_4$  διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες αφού  $\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^\circ$

Δεν είναι το  $\Pi_5$  διότι δεν ξέρουμε αν οι απέναντι πλευρές του ΖΗ και ΓΝ είναι παράλληλες ή αν η ΖΓ είναι ίση με την ΗΝ

Είναι το  $\Pi_6$  διότι οι απέναντι πλευρές του ΕΛ και ΡΒ είναι ίσες και παράλληλες αφού  $90^\circ + \hat{\theta} + 90^\circ - \hat{\theta} = 180^\circ$

2.

Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;  
Αποδεικνύουμε ένα από τα παρακάτω

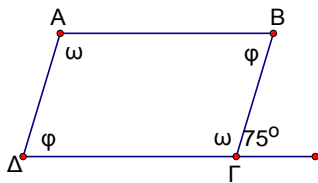
Απάντηση

- i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι παράλληλες
- ii) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες
- iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες
- iv) Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες
- v) Οι διαγώνιες διχοτομούνται

3.

Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω παραλληλογράμμου .

Απάντηση



$$\hat{\omega} + 75^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 105^\circ$$

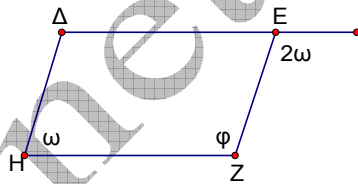
$$\text{Άρα } \hat{\Gamma} = \hat{A} = 105^\circ$$

$$\text{Και } \hat{\phi} = 75^\circ \text{ οπότε } \hat{\Delta} = \hat{B} = 75^\circ$$

4.

Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  του παρακάτω παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ

Απάντηση



Είναι

$$\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ \text{ και } \hat{\phi} = 2\hat{\omega} \text{ άρα}$$

$$3\hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ \text{ οπότε } \hat{\phi} = 120^\circ$$

5.

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες



ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές



iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες



v) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες



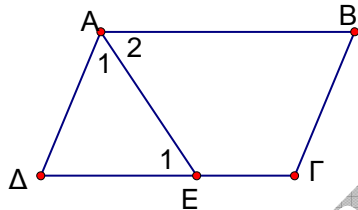
σημειώστε X σε κάθε σωστή απάντηση

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Η διχοτόμος της  $\hat{A}$  τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο  $E$ .  
Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = B\Gamma$ .

Λύση



$$AE \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{A}_2$$

$$\text{Άρα } \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow$$

τρ.  $\Delta A E$  ισοσκελές με  $\Delta E = \Delta A$

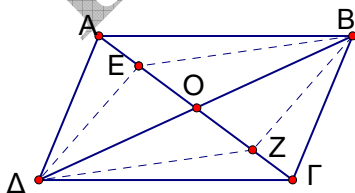
Αλλά, από το παρ/μμο έχουμε  $B\Gamma = \Delta A$

Άρα  $\Delta E = B\Gamma$ .

2.

Έστω  $O$  το κέντρο παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Αν  $E$  και  $Z$  σημεία των  $OA$  και  $OG$  αντίστοιχα, ώστε  $OE = OZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BE\Delta Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



$$\left. \begin{array}{l} OB=OA \\ OE=OZ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{οι διαγώνιοι του}$$

τετραπλεύρου  $BE\Delta Z$  διχοτομούνται,  
άρα είναι παραλληλόγραμμο.

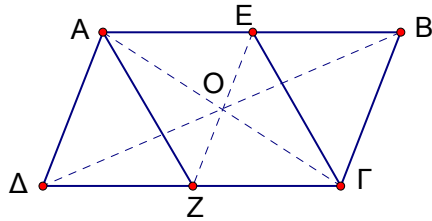
3.

Έστω  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι

i) το τετράπλευρο  $A\epsilon\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο

ii) οι  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $EZ$  συντρέχουν.

Λύση



i)

$AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο  $\Rightarrow$   
 $AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow AE \parallel Z\Gamma \Rightarrow$   
 $A\epsilon\Gamma Z$  παραλληλόγραμμο

ii)

$AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο  $\Rightarrow$   
 οι διαγωνιοί του  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  διχοτομούνται σε σημείο  $O$ .

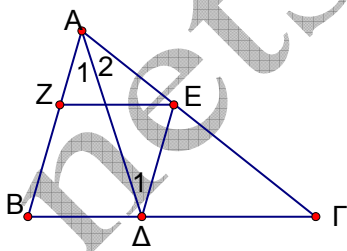
$A\epsilon\Gamma Z$  παραλληλόγραμμο  $\Rightarrow$  οι διαγωνιοί του  $A\Gamma$ ,  $EZ$  διχοτομούνται στο  $O$ , το οποίο ήδη είναι μέσο της  $A\Gamma$ .

Άρα οι  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $EZ$  συντρέχουν και μάλιστα στο κοινό μέσο τους.

4.

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $\Delta\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Αν η παράλληλη από το  $E$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $AE = BZ$ .

Λύση



$Z\epsilon\Delta B$  παρ/μμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες  
 Άρα  $BZ = \Delta E$

Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι  $AE = E\Delta$ , δηλαδή ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Delta$  είναι ισοσκελές, ή αρκεί  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ .

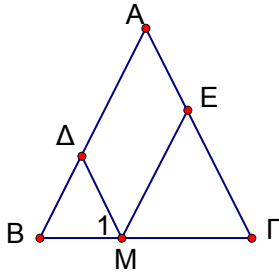
$$\left. \begin{array}{l} \Delta\Delta \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \Delta E \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2.$$

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $ME \parallel AB$  ( $E$  σημείο του  $A\Gamma$ ) και  $M\Delta \parallel A\Gamma$  ( $\Delta$  σημείο του  $AB$ ). Να αποδείξετε ότι  $M\Delta + ME = AB$

Λύση



$\Delta M E$  παρ/μμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες

Άρα  $ME = \Delta A$

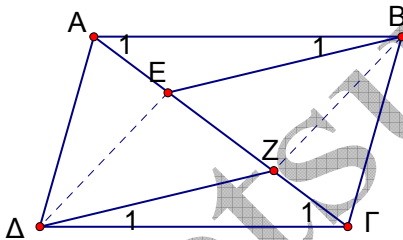
Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι  $M\Delta = \Delta B$  δηλαδή ότι το τρίγωνο  $\Delta B M$  είναι ισοσκελές, ή αρκεί  $\hat{M}_1 = \hat{B}$ .

$$\left. \begin{array}{l} AB = A\Gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ M\Delta \parallel \Gamma A \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{\Gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}.$$

2.

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $E$  σημείο της  $A\Gamma$ . Φέρουμε  $\Delta Z \parallel BE$  ( $Z$  σημείο του  $A\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel BZ$

Λύση



$AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο  $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

Άρα μία οξεία και μία αμβλεία.

Έστω  $\hat{B}$  οξεία. Τότε και η  $\hat{B}_1$  οξεία.

Ομοίως και η  $\hat{\Delta}_1$ .

τρ.  $AEB =$  τρ.  $\Gamma Z\Delta$  διότι

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ , οξείες με πλευρές παράλληλες

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ , εντός εναλλάξ, και

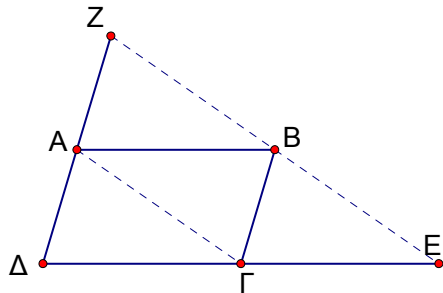
$AB = \Delta\Gamma$ , από το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$

Έτσι είναι  $EB = \Delta Z$ . Και επειδή είναι και παράλληλα, το  $BZ\Delta E$  θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $\Delta E \parallel BZ$ .

3.

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε τη  $\Delta\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\epsilon = \Delta\Gamma$  και τη  $\Delta A$  κατά τμήμα  $AZ = \Delta A$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Z$ ,  $B$  και  $\epsilon$  είναι συνευθειακά.

Λύση

Γράφουμε τα τμήματα  $BE$ ,  $BZ$  και  $A\Gamma$ 

$$\begin{aligned} AB\Gamma\Delta \text{ παρ/μμο} &\Rightarrow \\ AB = \parallel \Delta\Gamma &\Rightarrow AB = \parallel \Gamma\epsilon \Rightarrow \\ AB\epsilon\Gamma \text{ παρ/μμο} &\Rightarrow BE \parallel A\Gamma \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB\Gamma\Delta \text{ παρ/μμο} &\Rightarrow \\ B\Gamma = \parallel A\Delta &\Rightarrow B\Gamma = \parallel ZA \Rightarrow \\ B\Gamma AZ \text{ παρ/μμο} &\Rightarrow BZ \parallel A\Gamma \quad (2) \end{aligned}$$

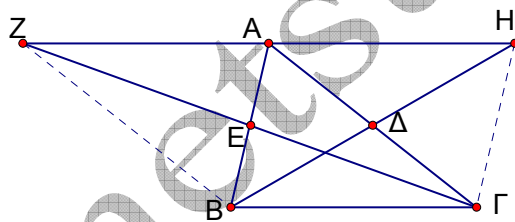
Από τις (1), (2)  $\Rightarrow ZBE$  ευθεία παράλληλη στην  $A\Gamma$ .

4.

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των διαμέσων  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$  παίρνουμε σημεία  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $\Delta H = B\Delta$  και  $Z\epsilon = \Gamma\epsilon$ . Να αποδείξετε ότι

i)  $AH = AZ$ ii) τα σημεία  $Z$ ,  $A$  και  $H$  είναι συνευθειακά.

Λύση



Έχουμε διχοτόμηση των τμημάτων  $A\Gamma$  και  $BH$  άρα  $AH\Gamma B$  παρ/μμο  
Άρα  $AH = \parallel B\Gamma$  (1)

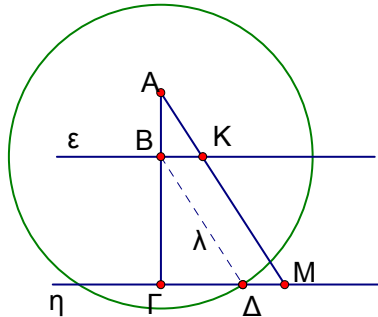
Έχουμε διχοτόμηση των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma Z$  άρα  $A\Gamma B Z$  παρ/μμο  
Άρα  $AZ = \parallel B\Gamma$  (2)

Από τις (1) και (2)  $\Rightarrow$  i)  $AH = AZ$  και  
ii) τα σημεία  $Z$ ,  $A$  και  $H$  ανήκουν σε ευθεία  $\parallel B\Gamma$

## 5.

Από σημείο  $A$  να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα  $\lambda$ .

## Λύση



Έστω  $\epsilon, \eta$  οι δοσμένες παράλληλες ευθείες  
Γράφουμε  $AB \perp \epsilon$  στις  $\epsilon$  και  $\eta$ .

Με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $\lambda$  γράφουμε κύκλο, που τέμνει την ευθεία  $\eta$  σε σημείο  $\Delta$ .

Γράφουμε το τμήμα  $B\Delta$  και από το  $A$  ευθεία παράλληλη στο  $B\Delta$ , η οποία τέμνει την  $\epsilon$  στο  $K$  και την  $\eta$  στο  $M$ .

Η  $AKM$  είναι η ζητούμενη

Πράγματι, είναι  $KM = B\Delta = \lambda$  σαν παράλληλα ευθ. τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών.

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει να είναι  $\lambda \geq B\Gamma$ , ώστε ο κύκλος  $(B, \lambda)$  να έχει κοινό σημείο με την ευθεία  $\eta$ .

## Σύνθετα Θέματα

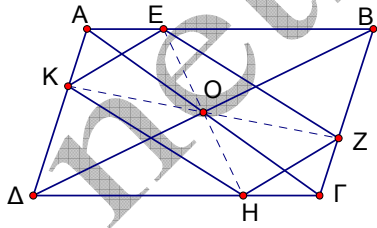
## 1.

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα σημεία  $E, Z, H$  και  $K$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  και  $\Delta A$  αντίστοιχα, ώστε  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta K$ .

Να αποδείξετε ότι

- i) το τετράπλευρο  $EZH K$  είναι παραλληλόγραμμο
- ii) οι  $A\Gamma, B\Delta, E H$  και  $K Z$  συντρέχουν.

## Λύση



Έστω  $O$  το κέντρο του παρ/μμου  $AB\Gamma\Delta$

$AE = \Gamma H \Rightarrow AEGH$  παρ/μμο  $\Rightarrow$   
οι  $A\Gamma, E H$  διχοτομούνται στο  $O$ .

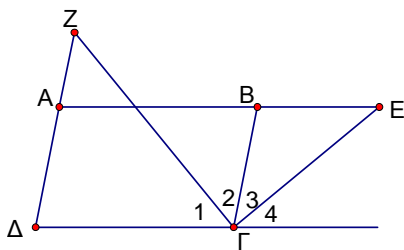
$BZ = \Delta K \Rightarrow BZ\Delta K$  παρ/μμο  $\Rightarrow$   
οι  $B\Delta, K Z$  διχοτομούνται στο  $O$ .

- i) Αφού οι  $E H, K Z$  διχοτομούνται (στο  $O$ ), το  $EZH K$  θα είναι παρ/μμο
- ii) Ταυτόχρονα αποδείχθηκε ότι οι  $A\Gamma, B\Delta, E H$  και  $K Z$  συντρέχουν στο  $O$ .

2.

Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  κατά τμήμα  $BE = B\Gamma$  και επί της ημιευθείας  $\Delta A$  θεωρούμε σημείο  $Z$ , ώστε  $\Delta Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$ .

Λύση



$$\text{τρ. } \Delta Z\Gamma \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}$$

$$\Gamma B \parallel \Delta Z \Rightarrow \hat{\Gamma}_2 = \hat{Z}$$

$$\text{Άρα} \quad \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$$

$\Gamma Z$  διχοτόμος της  $B\hat{\Gamma}\Delta$

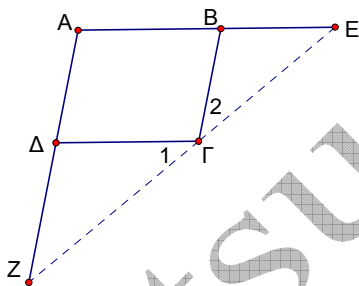
$$\text{Ομοίως} \quad \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$$

Άρα  $\Gamma Z \perp \Gamma E$  σαν διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών.

3.

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = B\Gamma$  και την  $A\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Z$ ,  $\Gamma$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

Λύση



Φέρουμε τα τμήματα  $\Gamma E$  και  $\Gamma Z$ .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_2 = 180^\circ$$

Είναι  $\hat{\Delta} = \hat{Z} + \hat{\Gamma}_1$  σαν εξωτερική του τρ.  $\Delta Z\Gamma$

$$\text{αλλά τρ. } \Delta Z\Gamma \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}$$

$$\text{Άρα} \quad \hat{\Delta} = 2 \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Delta}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως} \quad \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Παραλληλόγραμμο } AB\Gamma\Delta \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{A}, \hat{B} = \hat{\Delta} \text{ και } \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ. \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2} + \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Delta} + \hat{A} = 180^\circ.$$



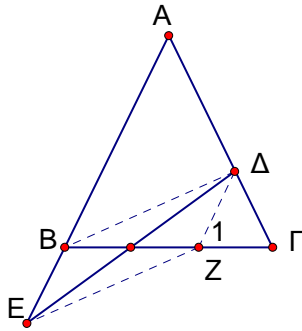
4.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $\Delta$  της  $A\Gamma$ .

Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = \Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η  $B\Gamma$

διχοτομεί τη  $\Delta E$ .

**Λύση**



Από το  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη στην  $AB$ , η οποία

τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $Z \Rightarrow \hat{Z}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

Άρα  $\text{τρ.}\Delta Z\Gamma$  ισοσκελές με  $\Delta Z = \Delta\Gamma = BE$ .

Είναι, λοιπόν  $\Delta Z = BE$  άρα το τετράπλευρο

$\Delta ZEB$  είναι παρ/μμο, άρα οι διαγώνιοί του

διχοτομούνται.

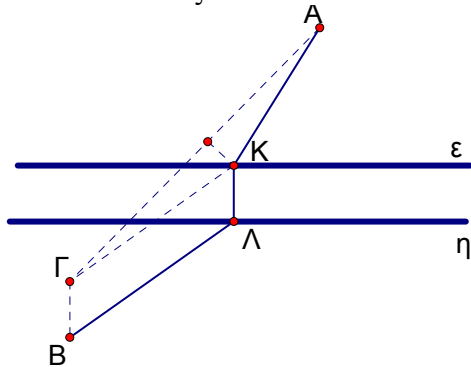
netsuccess.gr

## 5.

Ένας ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας.

## Λύση

Ας είναι  $A, B$  οι θέσεις των δύο χωριών αντίστοιχα,  $\epsilon, \eta$  οι όχθες του ποταμού και  $\alpha$  το πλάτος του.



## Ανάλυση.

Έστω  $ΚΛ$  η θέση της γέφυρας.

Τότε  $AK = BL$  και  $ΚΛ = \alpha$

Θεωρούμε τμήμα  $BΓ \parallel AK$ .

Τότε  $ΚΛΒΓ$  παρ/μμο  $\Rightarrow ΚΓ = ΛΒ$

άρα και  $ΚΓ = ΚΑ$

Έτσι το  $K$  θα ισαπέχει από τα άκρα του ευθ. τμήματος  $ΓΑ$ , άρα το  $K$  θα ανήκει στη μεσοκάθετο του  $ΓΑ$ .

## Σύνθεση.

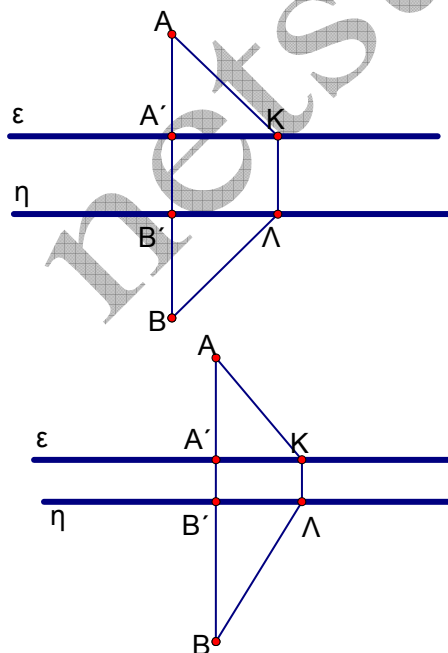
Φέρουμε τμήμα  $BΓ = \alpha$  κάθετο στις όχθες και πλησιάζοντας αυτές.

Φέρουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος  $ΓΑ$ , η οποία τέμνει την όχθη  $\epsilon$  σε σημείο  $K$ . Τέλος φέρουμε  $ΚΛ \perp \epsilon$ , που θα είναι και η θέση της γέφυρας.

## Διερεύνηση.

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει η μεσοκάθετος του  $ΓΑ$  να τέμνει την  $\epsilon$ , δηλαδή να μην είναι παράλληλη στην  $\epsilon$ , που σημαίνει  $ΓΑ$  όχι κάθετο στην  $\epsilon$ , άρα και  $ΒΑ$  όχι κάθετο στην  $\epsilon$ .

Στην περίπτωση που  $AB \perp \epsilon$ , διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις



i) όταν η απόσταση  $AA'$  του  $A$  από την  $\epsilon$  ισούται με την απόσταση  $BB'$  του  $B$  από την  $\eta$ , τότε η θέση της γέφυρας  $ΚΛ$  είναι οποιαδήποτε, αφού ισχύει  $AK = BL$  λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοπαράλληλη των  $\epsilon, \eta$ .

ii) όταν  $AA' \neq BB'$ , τότε το πρόβλημα είναι αδύνατο, διότι:

Αν  $ΚΛ$  ήταν θέση της γέφυρας, θα είχαμε  $AK = BL$  και  $A'K = B'\Lambda$ , οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $AA'K, BB'\Lambda$  θα ήταν ίσα, άρα θα ήταν  $AA' = BB'$ , το οποίο είναι άτοπο