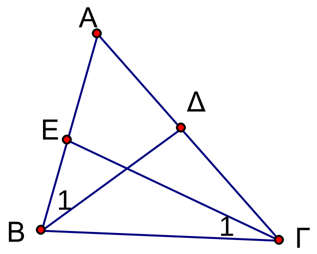
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 88

Γενικές ασκήσεις $4^{ου}$ Κεφαλαίου

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^o$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$.

Λύση



Στο τρ.ΑΔΒ έχουμε $\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow$

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 60^o + \frac{\hat{B}}{2}$$

Στο τρ.ΒΕΓ έχουμε $\hat{E}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow$

$$\Gamma\hat{E}A = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $60^o + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

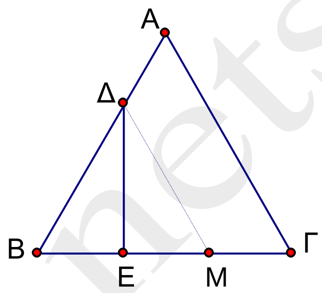
$$60^o = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$$

$120^o = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = 60^o$.

2.

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και τα σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \frac{1}{3}\alpha$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$.

Λύση



Φέρουμε ΔΜ//ΑΓ

Τότε $\hat{M} = \hat{\Gamma} = 60^o$ και αφού $\hat{B} = 60^o$,
το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισόπλευρο $\Rightarrow$

$$BM = B\Delta = \frac{2}{3}\alpha$$

Και επειδή $BE = \frac{1}{3}\alpha$, το Ε είναι μέσο του ΒΜ.

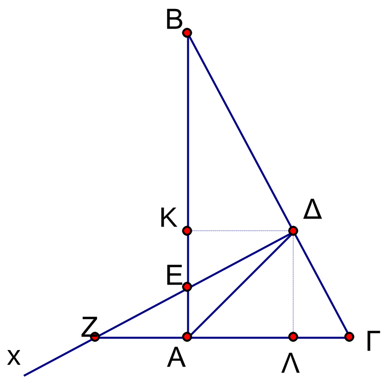
Έτσι, το ΔΕ είναι διάμεσος του τρ.ΔΒΜ,

άρα και ύψος.

3.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε $\Delta x \perp B\Gamma$, που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την προέκταση της ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΖΓ.

Λύση



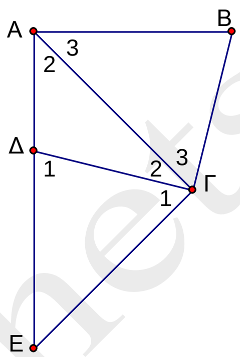
Αρκεί να δειχθεί ότι τρ.ΔΒΕ = τρ.ΔΖΓ.
Αυτά είναι ορθογώνια και έχουν
$\hat{B} = \hat{Z}$ (οξείες με πλευρές κάθετες), οπότε
αρκεί να δειχθεί ότι ΔΒ = ΔΖ.

Πάμε να εκμεταλλευθούμε την ιδιότητα της διχοτόμου.
Φέρουμε $\Delta K \perp AB$ και $\Delta\Lambda \perp A\Gamma \Rightarrow$
ΔΚ = ΔΛ οπότε
τρ.ΔΚΒ = τρ.ΔΛΖ (αφού είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{Z}$)
Άρα ΔΒ = ΔΖ.

4.

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$ και ΒΓ = ΓΔ. Στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma \perp \Gamma E$.

Λύση



Αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_3$, ή ότι
τρ.ΔΓΕ = τρ.ΑΒΓ
και επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες,
αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$.

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma}_2$$
$$= 90^o - \hat{A}_3 + 90^o - \hat{\Gamma}_3$$
$$= 180^o - \hat{A}_3 - \hat{\Gamma}_3 = \hat{B}$$

5.

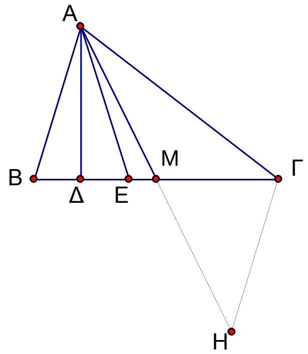
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Να αποδείξετε ότι :

i) Το ύψος $Α\Delta = υ_α$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.

ii) Η διάμεσος $ΑΜ = μ_α$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.

iii) Το ύψος $υ_α$ και η διάμεσος $μ_α$ βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου $ΑΕ = δ_α$.

Λύση



i)

$\Delta\hat{Α}Β < \Delta\hat{Α}Γ \Leftrightarrow$

$90^o - \hat{Β} < 90^o - \hat{Γ} \Leftrightarrow$ (από τα ορθ. τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ)

$\hat{Γ} < \hat{Β}$ το οποίο ισχύει αφού ΑΒ < ΑΓ

ii)

Θα αποδείξουμε ότι $Μ\hat{Α}Β > Μ\hat{Α}Γ$.

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΗ = ΑΜ

(Π – Γ – Π) $\Rightarrow$ τρ.ΜΓΗ = τρ.ΜΒΑ $\Rightarrow$

$Μ\hat{Α}Β = \hat{Η}$ και ΑΒ = ΓΗ

Στο τρ.ΑΓΗ είναι ΓΗ = ΑΒ < ΑΓ $\Rightarrow$

$Μ\hat{Α}Γ < \hat{Η} = Μ\hat{Α}Β$

iii)

Από το i) $\Rightarrow$ $\Delta\hat{Α}Β < \dfrac{\hat{Α}}{2} = Β\hat{Α}Ε$ **(1)**

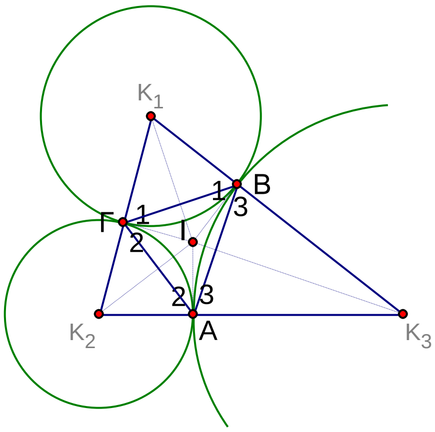
Από το ii) $\Rightarrow$ $Μ\hat{Α}Β > \dfrac{\hat{Α}}{2} = Β\hat{Α}Ε$ **(2)**

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ το ύψος $υ_α$ και η διάμεσος $μ_α$ βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου $ΑΕ = δ_α$.

6.

Τρεις κύκλοι με κέντρα K_1, K_2, K_3 εφάπτονται εξωτερικά στα A, B, Γ. Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $K_1K_2K_3$.

Λύση



Έστω I το έκκεντρο του τριγώνου $K_1K_2K_3$

Τότε IK_1 διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}_1$ και ομοίως για τις IK_2, IK_3

Φέρουμε τις IA, IB, IΓ.

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ.IK_1B = τρ.$IK_1\Gamma$ **(1)**

Άρα IB = IΓ

Ομοίως IΓ = IA

και IA = IB.

Άρα το I είναι περίκεντρο του τρ.ΑΒΓ.

Φανταζόμαστε τον περιγεγραμμένο κύκλο (I, IA) του τριγώνου ΑΒΓ.

Για να είναι αυτός ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $K_1K_2K_3$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $IA \perp K_2K_3$ και ομοίως $IB \perp K_3K_1$, $I\Gamma \perp K_1K_2$

(1) $\Rightarrow$ $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και ομοίως $\hat{\Gamma}_2 = \hat{A}_2$, $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$ **(2)**

$$\text{αλλά} \begin{cases} \hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=180^0 \\ \hat{B}_1+\hat{B}_3=180^0 \\ \hat{A}_2+\hat{A}_3=180^0 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} \hat{B}_1+\hat{A}_2=180^0 \\ \hat{B}_1+\hat{A}_3=180^0 \\ \hat{A}_2+\hat{A}_3=180^0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \hat{B}_1+\hat{A}_2=\hat{B}_1+\hat{A}_3 \\ \hat{A}_2+\hat{A}_3=180^0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \hat{A}_2=\hat{A}_3 \\ \hat{A}_2+\hat{A}_3=180^0 \end{array} \right. \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 90^o.$$

7.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τον εγγεγραμμένο κύκλο του (Ι, ρ) και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του (I_α, ρ_α). Ονομάζουμε Δ, Ε, Ζ και Δ΄, Ε΄, Ζ΄ τα σημεία επαφής των (Ι, ρ) και (I_α, ρ_α) με τις ευθείες ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.

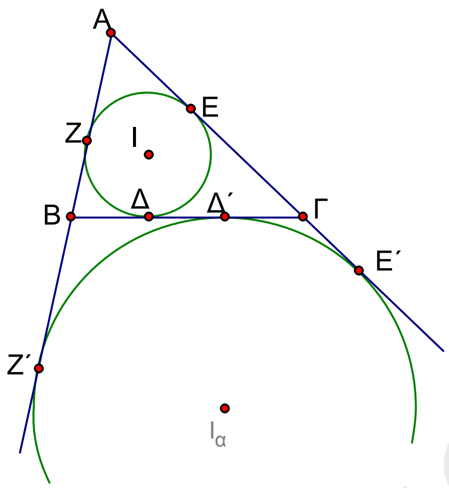
Να αποδείξετε ότι :

i) $ΑΖ = ΑΕ = \tau - \alpha$, $ΒΔ = ΒΖ = \tau - \beta$, $ΓΔ = ΓΕ = \tau - \gamma$

ii) $ΑΖ' = ΑΕ' = \tau\alpha$

iii) $ΖΖ' = ΕΕ' = \alpha$, $ΔΔ' = \beta - \gamma$

Λύση



i)
$ΑΖ = ΑΕ$, $ΒΖ = ΒΔ$, $ΓΔ = ΓΕ$ σαν εφαπτομενικά τμήματα .

$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 2\tau \Rightarrow$

$ΑΖ + ΒΖ + ΒΔ + ΓΔ + ΓΕ + ΑΕ = 2\tau \Rightarrow$

$ΑΖ + ΒΔ + ΒΔ + ΓΔ + ΓΔ + ΑΖ = 2\tau \Rightarrow$

$2ΑΖ + 2ΒΔ + 2ΓΔ\ 2\tau \Rightarrow$

$ΑΖ + ΒΔ + ΓΔ = \tau \Rightarrow$

$ΑΖ + \alpha = \tau \Rightarrow$ $ΑΖ = \tau - \alpha = ΑΕ$

Ομοίως $ΒΔ = \tau - \beta = ΒΖ$

και $ΓΔ = \tau - \gamma = ΓΕ$

ii)
$ΑΖ' = ΑΕ'$, $ΒΔ' = ΒΖ'$, $ΓΔ' = ΓΕ'$ σαν εφαπτομενικά τμήματα .

$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 2\tau \Rightarrow$

$ΑΖ' - ΒΖ' + ΒΓ + ΑΕ' - ΓΕ' = 2\tau \Rightarrow$

$ΑΖ' - ΒΔ' + ΒΓ + ΑΖ' - ΓΔ' = 2\tau \Rightarrow$

$2ΑΖ' - ΒΓ + ΒΓ = 2\tau \Rightarrow ΑΖ' = \tau = ΑΕ'$

iii)
$ΖΖ' = ΑΖ' - ΑΖ = \tau - (\tau - \alpha) = \tau - \tau + \alpha = \alpha = ΕΕ'$

$ΔΔ' = ΒΔ' - ΒΔ = ΒΖ' - (\tau - \beta) = ΑΖ' - ΑΒ - \tau + \beta = \tau - \gamma - \tau + \beta = \beta - \gamma.$