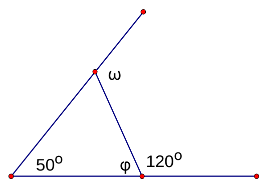
4.6 – 4.8
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 87 – 88

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Να υπολογίσετε την γωνία ω στο παρακάτω σχήμα

Απάντηση

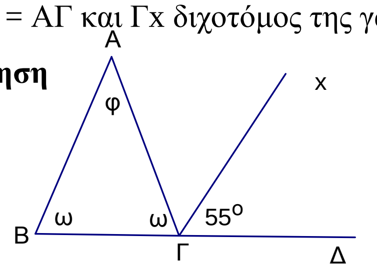


Είναι $\varphi = 180^o - 120^o = 60^o$ άρα

$\omega = 50^o + 60^o = 110^o$

2.
Αν ΑΒ = ΑΓ και Γx διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$, να υπολογίσετε την γωνία φ

Απάντηση



Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = 110^o$ άρα $\omega = 70^o$, οπότε

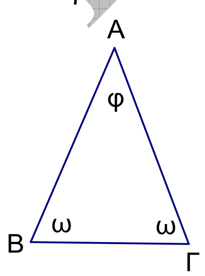
$\varphi = 180^o - 2\omega = 180^o - 140^o = 40^o$

3.
Υπάρχει κυρτό ν – γωνο ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του να ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του ;

Απάντηση

Ναι το τετράπλευρο

4.
Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μία γωνία του 60^o θα είναι ισόπλευρο



- Έστω $\omega = 60^o$ τότε
  $\varphi = 180^o - 2\omega = 180^o - 120^o = 60^o$
  Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις γωνίες του ίσες θα είναι ισόπλευρο
- Έστω $\varphi = 60^o$ τότε
  $2\omega = 180 - \varphi = 120^o$
  Άρα $\hat{\omega} = 60^o$, οπότε πάλι το τρίγωνο θα έχει τις γωνίες ίσες , οπότε θα είναι ισόπλευρο .

5.

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι

Α.180^o Β. 270^o Γ. 360^o Δ. 540^o Ε. τίποτα από αυτά

Επιλέξτε την σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντηση σας .

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η Γ, διότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών οποιουδήποτε $\nu-$γώνου ισούται με 360^o.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).

Λύση

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο με $\hat{A} = 90^o$

- Όταν $\hat{B} = \frac{2}{3}\hat{A}$, τότε $\hat{B} = \frac{2}{3}90^o = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$

  Ομοίως όταν $\hat{\Gamma} = \frac{2}{3}\hat{A}$

- Όταν $\hat{B} = \frac{2}{3}\hat{\Gamma}$, τότε $\hat{B} = \frac{2}{3}(90^o - \hat{B})$

$$3\hat{B} = 2(90^o - \hat{B})$$
$$3\hat{B} = 180^o - 2\hat{B}$$
$$5\hat{B} = 180^o$$
$$\hat{B} = 36^o \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 36^o = 54^o$$

2.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν Ι το έκκεντρο του τριγώνου, να υπολογισθεί η γωνία $B\hat{I}\Gamma$.

Λύση

Από εφαρμογή του σχ. Βιβλίου έχουμε $B\hat{I}\Gamma = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$ **(1)**

$\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 2\hat{A}$ **(2)**

τρ. ΑΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ **(3)**

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180^o \Rightarrow 5\hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 36^o$

(1) $\Rightarrow B\hat{I}\Gamma = 90^o + 18^o = 108^o$

3.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144^o$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

Λύση

$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow 144^o = 3\hat{B} + \hat{B} \Rightarrow 144^o = 4\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 36^o$

$\hat{\Gamma} = 180^o - \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^o - 144^o = 36^o$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow$ τρ.ΑΒΓ ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$.

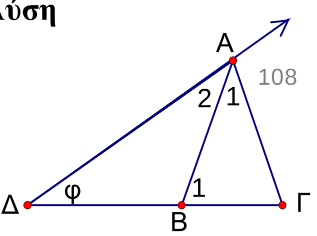
Λύση

Οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.

5.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = A\Gamma = \Delta B$ και $x\hat{A}\Gamma = 108^o$. Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

Λύση



$BA = B\Delta \;\Rightarrow\; \hat{A}_2 = \varphi$

$\hat{B}_1$ εξωτερική του τριγώνου ΒΑΔ $\Rightarrow$

$\hat{B}_1 = \varphi + \hat{A}_2 = \varphi + \varphi = 2\varphi$

$AB = A\Gamma \;\Rightarrow\; \hat{\Gamma} = \hat{B}_1 = 2\varphi$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 180^0 \;\Rightarrow$

$\hat{A}_1 + 2\varphi + 2\varphi = 180^0 \Rightarrow \;\; \hat{A}_1 = 180^0 - 4\varphi$

Αλλά $\hat{A}_2 + \hat{A}_1 + 108^o = 180^o \;\Rightarrow$

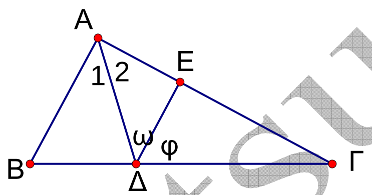
$\varphi + 180^o - 4\varphi + 108^o = 180^o \;\Rightarrow$

$3\varphi = 108^o \;\Rightarrow\; \varphi = 36^o$

6.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 90^0$, ΑΔ διχοτόμος, $\Delta E \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20^o μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.

Λύση



Υπόθεση: $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^o$

Αλλά $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \;\Rightarrow$

$\hat{\Gamma} + 20^o + \hat{\Gamma} = 90^o \;\Rightarrow$

$2\hat{\Gamma} = 70^o \;\Rightarrow$

$\hat{\Gamma} = 35^o$ και $\hat{B} = 55^o$

$\Delta E \parallel AB \;\Rightarrow\; \varphi = \hat{B} = 55^o$ και $\omega = \hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2} = 45^o$

7.

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900^o. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.

Λύση

Έστω ν το πλήθος των πλευρών.

$(2\nu - 4)\,90 = 900 \;\Leftrightarrow\; 2\nu - 4 = 10 \;\Leftrightarrow\; 2\nu = 14$

$\nu = 7$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ

Λύση

$$\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{\Gamma} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$2\hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180^0 + \hat{A}$$

$$\hat{A} = 180^0 - 2\hat{\Gamma}$$

$$180^0 - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^0 - 2\hat{\Gamma}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{B} \quad \Rightarrow \quad AB = A\Gamma$$

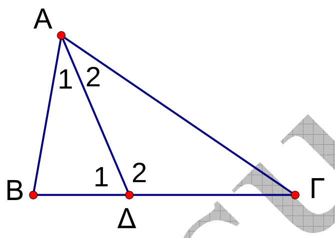
2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι

i) $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

ii) $A\hat{\Delta}B = 90^0 - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$, $\quad A\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

Λύση



i)

ΑΔ διχοτόμος $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$

$\hat{\Delta}_1$ εξωτερική του τριγώνου ΑΔΓ $\Rightarrow$

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2}$ **(1)**

$\hat{\Delta}_2$ εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_2 = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}$ **(2)**

$(2) - (1) \Rightarrow \hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

ii)

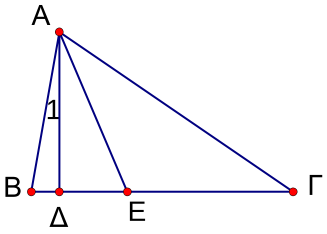
Η (1) $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} + 90^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^0 - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

Ομοίως για τη $\hat{\Delta}_2$

3.

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{B} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$ και τη διχοτόμο $ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Α}Ε = \dfrac{\hat{B}-\hat{Γ}}{2}$.

Λύση



$Δ\hat{Α}Ε = Β\hat{Α}Ε - \hat{A}_1$

αλλά $Β\hat{Α}Ε = \dfrac{\hat{A}}{2}$ λόγω της διχοτόμου

και $\hat{A}_1 = 90^o - \hat{B}$ από το ορθ. τρίγωνο $ΑΔΒ$

Άρα $Δ\hat{Α}Ε = \dfrac{\hat{A}}{2} - (90^o - \hat{B})$

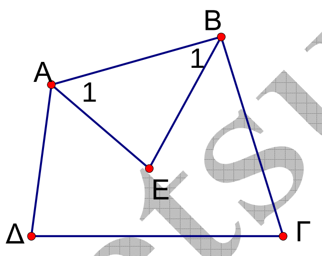
$$= \frac{\hat{A}}{2} - 90^o + \hat{B} =$$

$$= \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{Γ}}{2} + \hat{B} = \frac{\hat{B}-\hat{Γ}}{2}$$

4.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται σε σημείο $Ε$, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Ε}Β = \dfrac{\hat{Γ}+\hat{Δ}}{2}$

Λύση



Από το τρίγωνο $ΕΑΒ$ έχουμε

$$Α\hat{Ε}Β = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{B}_1 = 180^o - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2}$$

$$= \frac{360^0 - \hat{A} - \hat{B}}{2}$$

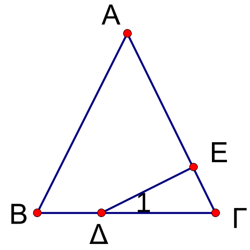
Επειδή το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου είναι 360^o, θα έχουμε

$$Α\hat{Ε}Β = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{Γ}+\hat{Δ}-\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{\hat{Γ}+\hat{Δ}}{2}$$

5.

Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τη $\Delta E \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 2\, E\hat{\Delta}\Gamma$

Λύση



$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0 \;\Rightarrow\; \hat{A}+2\hat{\Gamma}=180^0$ **(1)**

τρ. $\Delta E\Gamma$: $\hat{\Gamma}=90^0-\hat{\Delta}_1$

(1) $\Rightarrow$ $\hat{A} + 2\,(90^0-\hat{\Delta}_1) = 180^o \;\Rightarrow$

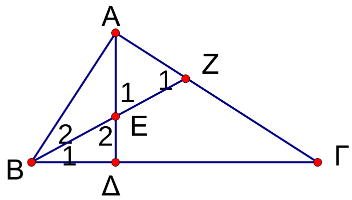
$\hat{A} + 180^o - 2\,\hat{\Delta}_1 = 180^o \;\Rightarrow$

$\hat{A} = 2\,\hat{\Delta}_1$

6.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^o$) το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BZ τέμνονται σε σημείο E. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Λύση



Τρ. ΔBE ορθογώνιο:

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^o - \hat{B}_1 = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ **(1)**

Τρ. ABZ ορθογώνιο:

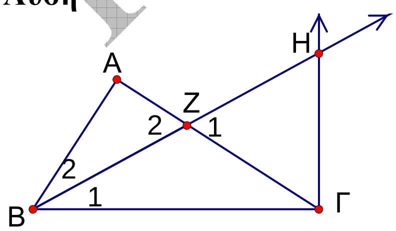
$\hat{Z}_1 = 90^o - \hat{B}_2 = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 \;\Rightarrow$ τρ. AEZ ισοσκελές.

7.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^o$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και την κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο Γ, στο H. Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = \Gamma H$

. **Λύση**



Τρ. $HB\Gamma$ ορθογώνιο:

$\hat{H} = 90^o - \hat{B}_1 = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ **(1)**

Τρ. AZB ορθογώνιο:

$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = 90^o - \hat{B}_2 = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ **(2)**

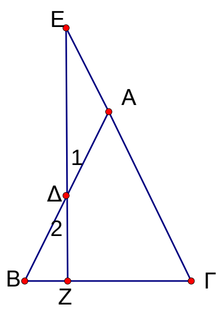
Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{H} = \hat{Z}_1 \;\Rightarrow$ τρ. ΓHZ ισοσκελές.

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της ΓΑ, προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ \perp ΒΓ$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{Δ}_2 + \hat{Β} = 90^0$

$ΑΕ = ΑΔ \quad \Rightarrow \quad \hat{Δ}_1 = \hat{Ε}$

Αλλά $\hat{Α} = \hat{Δ}_1 + \hat{Ε}$ σαν εξωτερική του τρ. ΑΔΕ

Άρα $\hat{Α} = 2\hat{Δ}_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{Δ}_1 = \dfrac{\hat{Α}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{Δ}_2 = \dfrac{\hat{Α}}{2}$ (1)

$ΑΒ = ΑΓ \quad \Rightarrow \quad \hat{Β} = \hat{Γ}$. Αλλά $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o$

Άρα $\hat{Α} + 2\hat{Β} = 180^o \quad \Rightarrow \quad 2\hat{Β} = 180^0 - \hat{Α} \quad \Rightarrow$

$\hat{Β} = 90^0 - \dfrac{\hat{Α}}{2}$ (2)

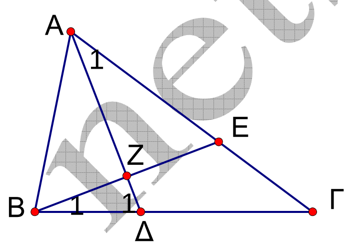
(1) + (2) $\quad \Rightarrow \quad \hat{Δ}_2 + \hat{Β} = 90^0$

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι

$Ε\hat{Β}Γ = \dfrac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$

Λύση



Τρ. ΖΒΔ ορθογώνιο $\Rightarrow \quad \hat{Β}_1 = 90^o - \hat{Δ}_1$

Αλλά $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ} + \hat{Α}_1 = \hat{Γ} + \dfrac{\hat{Α}}{2}$ σαν εξωτερική του τριγώνου ΑΔΓ

Άρα $\hat{Β}_1 = 90^o - \left(\hat{Γ} + \dfrac{\hat{Α}}{2} \right) =$

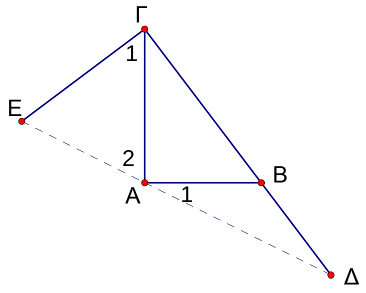
$= \dfrac{\hat{Α}}{2} + \dfrac{\hat{Β}}{2} + \dfrac{\hat{Γ}}{2} - \hat{Γ} - \dfrac{\hat{Α}}{2} =$

$= \dfrac{\hat{Β}}{2} - \dfrac{\hat{Γ}}{2} = \dfrac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$

3.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή – προς το μέρος του Α – τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

Λύση



Φέρουμε τα τμήματα ΑΔ, ΑΕ.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^o$ ή αρκεί

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$ αφού $\hat{A} = 90^o$

$\hat{B}$ εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΔ $\Rightarrow$

$\hat{B} = 2\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ **(1)**

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΕ έχουμε $\hat{E} = \hat{A}_2$ και $\hat{E} + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma}_1 = 180^o \Rightarrow$

$2\hat{A}_2 = 180^o - \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}_1}{2}$ **(2)**

Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}$ σαν οξείες με πλευρές κάθετες

(2) $\Rightarrow \hat{A}_2 = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$ **(3)**

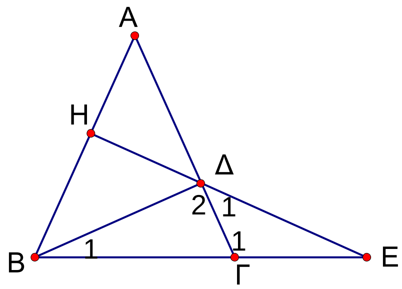
(1) + (3) $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$

4.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΒΔ. Φέρουμε ΔΗ ⊥ ΑΒ, που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι

i) ΒΔ = ΔΕ **ii)** ΒΓ > ΓΕ

Λύση



i)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{E}$

Ορθ. τρίγωνο ΒΓΔ : $\hat{B}_1 = 90^o - \hat{\Gamma}$

Ορθ. τρίγωνο ΗΒΕ : $\hat{E} = 90^o - \hat{B}$

Ισοσκελές ΑΒΓ : $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}$

ii)

Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΓΕ έχουν δύο πλευρές ίσες.

Για να είναι ΒΓ > ΓΕ, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Delta}_2 > \hat{\Delta}_1$.

Επειδή, όμως, $\hat{\Delta}_2 = 90^o$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\hat{\Delta}_1$ είναι οξεία.

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma}$ οξεία, άρα $\hat{\Gamma}_1$ αμβλεία.

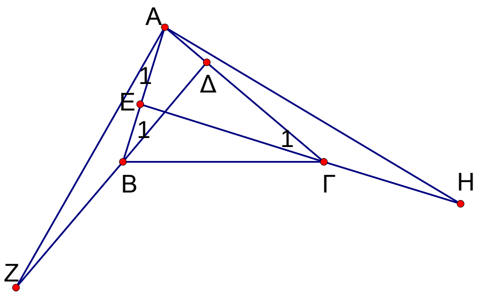
Έτσι, στο τρίγωνο ΔΓΕ η $\hat{\Delta}_1$ είναι οξεία.

5.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα ΒΖ = ΑΓ και ΓΗ = ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i) ΑΖ = ΑΗ **ii)** $ΑΖ \perp ΑΗ$

Λύση



i)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΖ, ΑΓΗ.

Έχουν ΑΒ = ΓΗ και ΒΖ = ΑΓ

Για να είναι ίσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $Α\hat{Β}Ζ = Α\hat{Γ}Η$, ή αρκεί $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ αφού είναι παραπληρωματικές τους.

Αυτό ισχύει διότι, από τα ορθ. τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ, οι γωνίες $\hat{Β}_1$ και $\hat{Γ}_1$ είναι συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

ii)

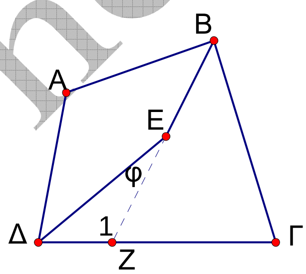
τρ.ΑΒΖ = τρ.ΑΓΗ $\Rightarrow$ $\hat{Α}_1 = \hat{Η}$

Στο ορθ. τρίγωνο ΑΕΗ, η $\hat{Η}$ είναι συμπληρωματική της $Ε\hat{Α}Η$, άρα και η $\hat{Α}_1$.

6.

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} > \hat{Γ}$ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$. Να αποδείξετε ότι $φ = \dfrac{\hat{Α} - \hat{Γ}}{2}$

Λύση



Στο τρίγωνο ΕΔΖ είναι $φ = 180^o - \hat{Ζ}_1 - \dfrac{\hat{Δ}}{2}$

$\hat{Ζ}_1 = \hat{Γ} + \dfrac{\hat{Β}}{2}$ σαν εξωτ. του τριγώνου ΒΖΓ

Άρα $φ = 180^o - (\hat{Γ} + \dfrac{\hat{Β}}{2}) - \dfrac{\hat{Δ}}{2} \Rightarrow$

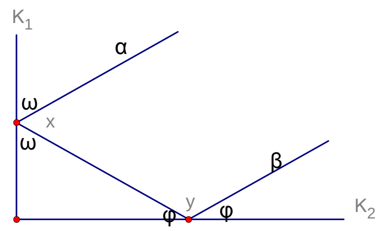
$$φ = \frac{\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}}{2} - \hat{Γ} - \frac{\hat{Β}}{2} - \frac{\hat{Δ}}{2} \Rightarrow$$

$$φ = \frac{\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}-2\hat{Γ}-\hat{Β}-\hat{Δ}}{2} = \frac{\hat{Α}-\hat{Γ}}{2}$$

7.

Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1, K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι α || β.
Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x + y = 180^o$.

Είναι $\omega + x + \omega = 180^o$ **(1)**
και $\varphi + y + \varphi = 180^o$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $2\omega + 2\varphi + x + y = 360^o$
$x + y = 360^o - 2(\omega + \varphi)$

Αλλά $\omega + \varphi = 90^o$ αφού $K_1 \perp K_2$

Άρα $x + y = 360^o - 2 \cdot 90^o$ $\Rightarrow$
$x + y = 180^o$