

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 70

Γενικές ασκήσεις 3^{ου} Κεφαλαίου

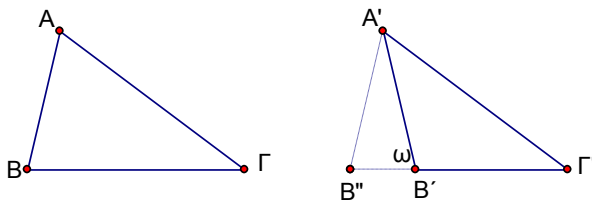
1.

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τέτοια ώστε $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\perp$.

i) Να αποδείξετε ότι $AB = A'B'$.

ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.

Λύση



i)

Πάνω στην ημιευθεία $\Gamma'B'$ θεωρούμε τμήμα $\Gamma'B'' = \Gamma B$.

Φέρουμε την $A'B''$.

$(\Pi - \Gamma - \Pi) \Rightarrow \text{τρ.} AB\Gamma = \text{τρ.} A'B''\Gamma' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}''$ και $AB = A'B''$

Η υπόθεση $\hat{B} + \hat{B}' = 2\perp \Rightarrow \hat{B}'' + \hat{B}' = 2\perp$

αλλά και $\omega + \hat{B}' = 2\perp$. Άρα $\hat{B}'' = \omega \Rightarrow A'B' = A'B''$

άρα και $AB = A'B'$

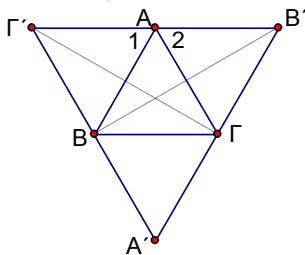
ii)

Αν δύο τρίγωνα έχουν πλευρά ίση, την προσκείμενη γωνία σε αυτή την πλευρά, ίση και την απέναντι γωνία σε αυτή την πλευρά παραπληρωματική, τότε έχουν ίση και την πλευρά που βρίσκεται απέναντι της ίσης γωνίας.

2.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και με πλευρές τις πλευρές του κατασκευάζουμε εξωτερικά του τρία ισόπλευρα τρίγωνα $A'\Gamma\Gamma'$, $AB'\Gamma'$ και $AB\Gamma''$. Να αποδείξετε ότι $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$.

Λύση



Για να αποδείξουμε ότι $BB' = \Gamma\Gamma'$
αρκεί να αποδείξουμε $\text{τρ.} ABB' = A\Gamma\Gamma'$

Είναι $AB = A\Gamma$ (1)

$AB' = A\Gamma'$ από τα ισόπλευρα (2)

$\text{τρ.} AB\Gamma'' = \text{τρ.} A\Gamma B' \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow$

$B\hat{A}B' = \Gamma\hat{A}\Gamma'$ (3)

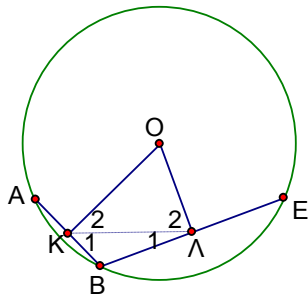
Από τις (1), (2), (3) $\Rightarrow \text{τρ.} ABB' = A\Gamma\Gamma'$

Ομοίως $\Gamma\Gamma' = AA'$.

3.

Αν OK , OL είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών AB , $\Gamma\Delta$ κύκλου (O, R) , να αποδείξετε ότι $AB < \Gamma\Delta$ αν και μόνο αν $OK > OL$

Λύση



Μεταφέρουμε τη χορδή $\Gamma\Delta$ στη θέση BE , οπότε δεν αλλάζει το απόστημα, αφού ίσες χορδές έχουν ίσα αποστήματα.

Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία:

$$AB < BE \Leftrightarrow OK > OL$$

Φέρνουμε το τμήμα KL .

$$AB < BE \Leftrightarrow$$

$$KB < BL \Leftrightarrow \quad (\text{τα μισά τους})$$

$$\hat{\Lambda}_1 < \hat{K}_1 \Leftrightarrow (\text{απέναντι μικρότερης πλευράς μικρότερη γωνία στο } BKL)$$

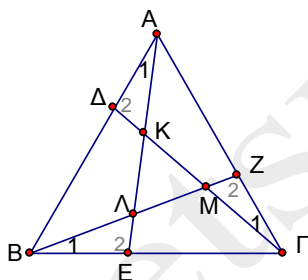
$$\hat{\Lambda}_2 > \hat{K}_2 \Leftrightarrow (\text{συμπληρωματικές των } \hat{\Lambda}_1, \hat{K}_1)$$

$$OK > OL \quad (\text{απέναντι μεγαλύτερης γωνίας μεγαλύτερη πλευρά}).$$

4.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$, ΓA αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \Gamma Z$. Αν K , Λ , M τα σημεία τομής των AE , $\Gamma\Delta$ και BZ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

Λύση



$$(\Pi-\Gamma-\Pi) \Rightarrow \text{τρ.} ABE = \text{τρ.} B\Gamma Z = \text{τρ.} \Gamma A\Delta \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \quad \text{και} \quad \hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2 = \hat{Z}_2$$

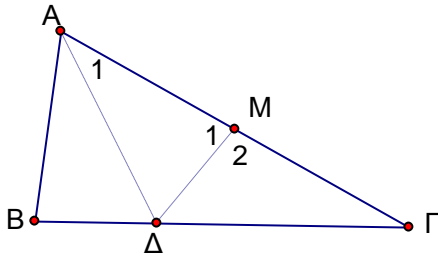
$$(\Gamma-\Pi-\Gamma) \Rightarrow \text{τρ.} A\Delta K = \text{τρ.} BE\Lambda = \text{τρ.} \Gamma ZM \Rightarrow \hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{M} \Rightarrow$$

$$\text{ίσες οι κατά κορυφή τους} \Rightarrow \text{τρ.} K\Lambda M \text{ ισόπλευρο.}$$

5.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 1\text{L}$ και $A\Gamma = 2AB$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} < \frac{\hat{A}}{2}$.

Λύση



Έστω M το μέσο της AG .
Τότε $AB = AM = MG$.

Φέρουμε τη διχοτόμο AD του $\text{τρ.}AB\Gamma$
($\Pi - \Gamma - \Pi$) \Rightarrow $\text{τρ.}AM\Delta = \text{τρ.}AB\Delta \Rightarrow$

$$\hat{M}_1 = \hat{B} < 1\text{L} \Rightarrow$$

$$\hat{M}_2 > 1$$

Στο $\text{τρ.}M\Delta\Gamma \Rightarrow \Delta\Gamma > M\Gamma$.

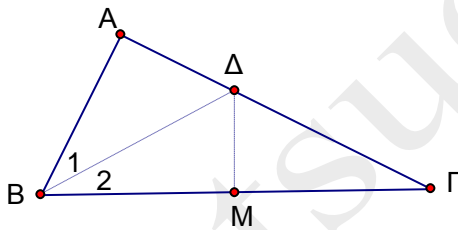
Τα τρίγωνα $M\Delta A$, $M\Delta\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και περιεχόμενες γωνίες άνισες, άρα $A\Delta < \Delta\Gamma$, οπότε

στο $\text{τρ.}\Delta A\Gamma$ θα είναι $\hat{\Gamma} < \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$

6.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\text{L}$.

Λύση



Έστω M το μέσο της $B\Gamma$.
Τότε $AB = BM = M\Gamma$.

Φέρουμε τη διχοτόμο BD του $\text{τρ.}AB\Gamma$

$$\text{Τότε } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$$

$$(\Pi - \Gamma - \Pi) \Rightarrow \text{τρ.}BM\Delta = \text{τρ.}BA\Delta \Rightarrow$$

$$\hat{M} = \hat{A}$$

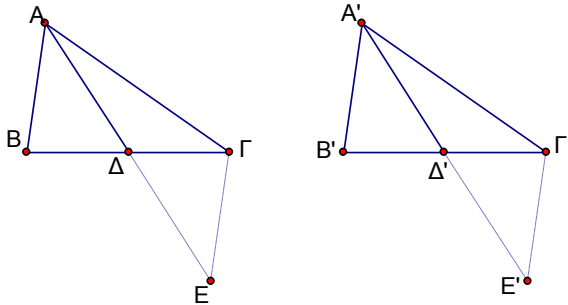
$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \text{τρ.}\Delta B\Gamma$ ισοσκελές \Rightarrow η διάμεσός του ΔM είναι και ύψος.

Άρα $\hat{M} = 1\text{L}$, οπότε και $\hat{A} = 1\text{L}$.

7.

Να αποδείξετε ότι, δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Λύση



Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και διαμέσους $AD = A'D'$

Προεκτείνουμε τις διαμέσους κατά ίσα τους τμήματα ΔE , $\Delta'E'$ αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} (\Pi-\Gamma-\Pi) &\Rightarrow \text{τρ.}\Delta\Gamma E = \text{τρ.}\Delta B A \text{ και} \\ &\text{τρ.}\Delta'\Gamma'E' = \text{τρ.}\Delta'B'A' \\ &\Rightarrow \Gamma E = BA = B'A' = \Gamma'E' \end{aligned}$$

$$(\Pi-\Pi-\Pi) \Rightarrow \text{τρ.}A\Gamma E = \text{τρ.}A'\Gamma'E' \Rightarrow \text{έχουν ίσες αντίστοιχες διαμέσους.}$$

$$\text{Άρα } \Gamma\Delta = \Gamma'\Delta' \Rightarrow \Gamma B = \Gamma'B'.$$

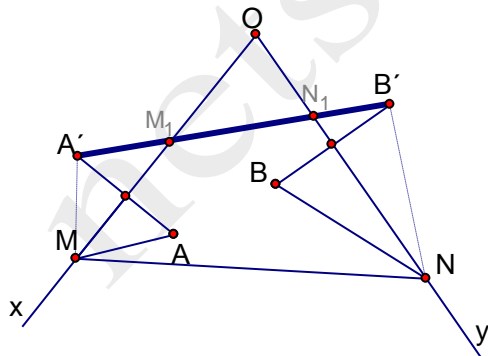
$$(\Pi-\Pi-\Pi) \Rightarrow \text{τρ.}AB\Gamma = \text{τρ.}A'B'\Gamma'.$$

8.

Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και δύο εσωτερικά της σημεία A και B . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την Ox και B' το συμμετρικό του B ως προς την Oy . Αν M , N είναι τυχαία σημεία των Ox , Oy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$.

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής, να βρείτε τις θέσεις των M , N , για τις οποίες το άθροισμα $AM + MN + NB$ είναι το μικρότερο δυνατό.

Λύση



$$\begin{aligned} \text{Από τις συμμετρίες έχουμε} \\ AM = A'M \text{ και } BN = B'N \quad \Rightarrow \\ AM + MN + NB = A'M + MN + NB'. \end{aligned}$$

Έστω Σ το άθροισμα $AM + MN + NB$. Τότε $\Sigma = A'M + MN + NB' \geq A'B'$.

Η μικρότερη, λοιπόν, τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα Σ , είναι $A'B'$. Σε αυτή την περίπτωση τα M , N θα είναι τα σημεία τομής της AB με τις Ox , Oy αντίστοιχα, δηλαδή τα M_1 , N_1 .