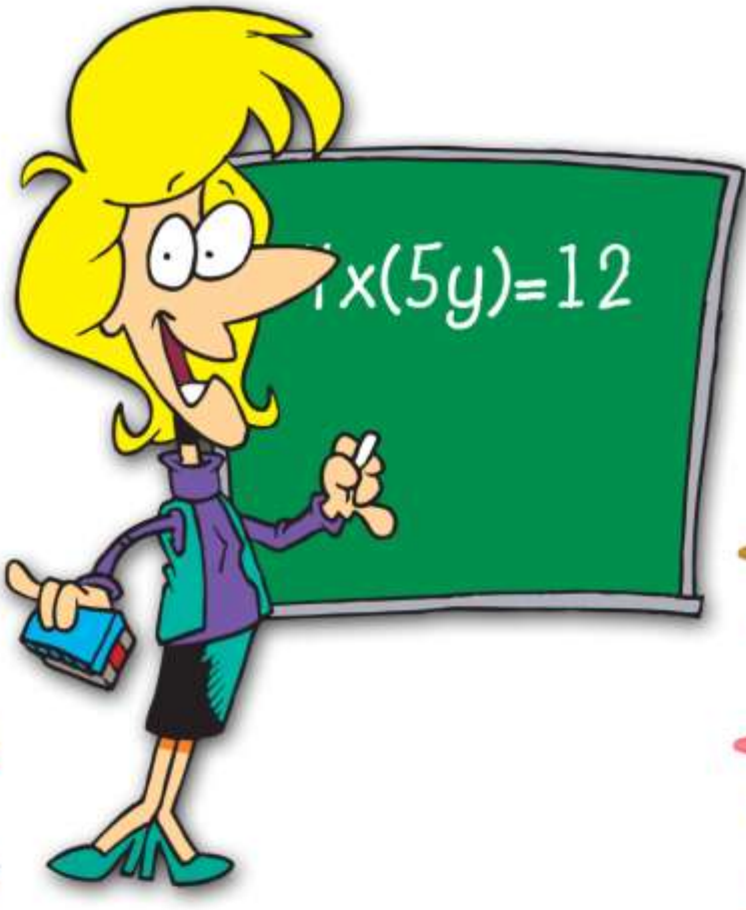
Μαθηματικά Γ Λυκείου

Μια συλλογή ασκήσεων στα μαθηματικά γενικής παιδείας



www.mathematica.gr

Α' Έκδοση: Πρώτη δημοσίευση .

<u>Η ομάδα εργασίας</u> <u>αποτελείται</u> **<u>από τους :</u>**

- ☑ Απόκη Γιώργο (Γιώργος Απόκης)
- ☑ Κακαβά Βασίλη (KAKABASBASILEIOS)
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη (ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΑΤΣΙΠΟΔΑΣ)
- ☑ Κανάβη Χρήστο (pana1333)
- ☑ Παντούλα Περικλή (perpant)
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα (Τηλέγραφος Κώστας)
- ☑ Τσιφάκη Χρήστο (xr.tsif)
- ☑ Χατζόπουλο Μάκη (Μάκης Χατζόπουλος)

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τι πιο όμορφο, από την συνεργασία ανθρώπων που πολλοί από αυτούς ούτε καν γνωρίζονται μεταξύ τους αλλά έχουν ένα κοινό χαρακτηριστκό, την αγάπη για τα μαθηματικά. Μια τέτοια λοιπόν συνεργασία από τα μέλη του **mathematica.gr** που με τον τρόπο αυτό παίρνει σάρκα και οστά είναι και η παρούσα συλλογή.

Η συλλογή αυτή είναι στην ουσία μια επιλογή ασκήσεων στα πλαίσια της ύλης των πανελλήνιων εξετάσεων για τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα για τα κεφάλαια της Ανάλυσης, της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, κατάλληλες για την επανάληψη ενόψει των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Κάποιες από αυτές είναι πρωτότυπες, καρπός επίπονης αλλά ταυτόχρονα δημιουργικής πνευματικής υπερπροσπάθειας και κάποιες άλλες, βασισμένες σε ιδέες επιτυχημένων και έμπειρων συγγραφέων με σημαντική προσφορά στην ελληνική βιβλιογραφία.

Η ομάδα εργασίας που συγκροτήθηκε με πρωτοβουλία και συντονισμό του **Κώστα Τηλέγραφου,** αποτελείται από ενεργούς Μαθηματικούς που συνεργάστηκαν με σκοπό την επεξεργασία και τον έλεγχο όλων των ασκήσεων που προτάθηκαν για την συλλογή αυτή καθώς και την όσο το δυνατόν αναλυτικότερη επίλυση τους δημιουργώντας μια πλήρη συλλογή.

Με αυτή τη συλλογή δίνεται η δυνατότητα, στο νέο καθηγητή να δει ασκήσεις που προτείνουν και λύνουν πεπειραμένοι συνάδελφοι, στον παλιό καθηγητή να αφουγκραστεί τη νέα γενιά και στο μαθητή να ωφεληθεί από τους καρπούς της αρμονικής αυτής συνύπαρξης. Η παρούσα συλλογή δεν έχει κανένα εμπορικό χαρακτήρα και, παρόλο τον έλεγχο, σίγουρα κάποια λάθη θα υπάρχουν και πιστεύουμε ότι ο καλύτερος τρόπος εύρεσης των λαθών είναι η επίλυση των ασκήσεων στο πίνακα. Μπορείτε να στέλνετε μήνυμα στο email της παρέας silogiaskiseon@yahoo.com, με τις διορθώσεις σας και γιατί όχι με λύσεις διαφορετικές, έτσι ώστε η συλλογή αυτή να διορθωθεί και να εμπλουτιστεί σε μελλοντική έκδοση.

Μακάρι νέες συλλογές να δημιουργούνται κάθε χρόνο, με διαφορετικές ασκήσεις, με αυξανόμενη συμμετοχή από τα μέλη του **mathematica** και με πιο αναλυτικές λύσεις ώστε να γίνεται το έργο της παρέας του εκάστοτε φυλλαδίου ευκολότερο.

Την καλύτερη παρέα στους ασθενείς την κάνουν πάντοτε οι ομοιοπαθείς.
Και το συγκεκριμένο μικρόβιο δεν κρύβεται εύκολα.
Καλό ξεφύλλισμα.

<u>Η ομάδα εργασίας αποτελείται από τους :</u>

- ☑ Απόκη Γιώργο
- ☑ Κακαβά Βασίλη
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη
- ☑ Κανάβη Χρήστο
- ☑ Παντούλα Περικλή
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα
- ☑ Τσιφάκη Χρήστο
- ☑ Χατζόπουλο Μάκη

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

Εξώφυλλο: Μιχάλης Νάννος

Σχήματα: Τηλέγραφος Κώστας
Κατσίποδας Δημήτρης
Κανάβης Χρήστος

Περιεχόμενα.

Ανάλυση

Συλλογή 30 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 01/12/2011 – 09/12/2011

Πηγή – Απαντήσεις

Ανάλυση :–Μια συλλογή 30 ασκήσεων.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=20955

Έλυσαν οι:

Αποστόλης Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιώργος Απόκης
Δημήτριος Κατσίποδας
Ηλίας Καμπελής
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Τσιφάκης
Χρήστος Κανάβης
Parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 1

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}}$ με $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$ και $\mathbf{g(x)=x^2-2x-15}$.

Αν η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τον άξονα $\mathbf{y'y}$ στο σημείο με τεταγμένη $\mathbf{3}$ και διέρχεται από το σημείο $\mathbf{B(-1,2)}$:

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$.

Ε2. Να προσδιορίσετε τα $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$.

Για $\mathbf{\alpha=2}$ και $\mathbf{\beta=-3}$:

Ε3. Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to1}f(x)}$.

Ε4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g}$.

Ε5. Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)}{g(x)}}$.

Ε6. Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to1}\frac{g(3-x)-g(2)}{f(x)-3}}$.

Πηγή: Παπαδάκης Βασίλης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $\mathbf{f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}}$ με $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$,πρέπει $\mathbf{x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq1}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι το $\mathbf{R-\{1\}}$.

Ε2. Αφού η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τον άξονα $\mathbf{y'y}$ στο σημείο με τεταγμένη $\mathbf{3}$ και διέρχεται από το σημείο $\mathbf{B(-1,2)}$ τότε

$\mathbf{f(0)=3\Leftrightarrow\frac{0^2+\alpha\cdot0+\beta}{0-1}=3\Leftrightarrow-\beta=3\Leftrightarrow\beta=-3.}$ Ακόμη επειδή η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{B(-1,2)}$ έχουμε

$$\mathbf{f(-1)=2} \text{ άρα } \mathbf{\frac{1-\alpha+\beta}{-1-1}=2\overset{\beta=-3}{\Leftrightarrow}\frac{1-\alpha-3}{-2}=2\Leftrightarrow-\alpha-2=-4\Leftrightarrow\alpha=2.}$$

Ε3. Για $\mathbf{\alpha=2,\beta=-3}$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3,\ x\neq1}.$$

Για $\mathbf{x\neq1}$ είναι : $\mathbf{\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4}$.

Ε4. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq1$

Για να είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g πρέπει για $x\neq1$ να ισχύει $f(x)>g(x)\Leftrightarrow$

$x+3>x^2-2x-15\Leftrightarrow x+3-x^2+2x+15>0\Leftrightarrow -x^2+3x+18>0$.

Άρα από τον διπλανό πίνακα και επειδή πρέπει $x\neq1$ έχουμε πως $x\in(-3,1)\cup(1,6)$.

x	$-\infty$		-3		1		6		$+\infty$
$-x^2+3x+18$		-	0	+	‖	+	0	-	

Ε5. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq1$ και $g(x)=x^2-2x-15$.

Για $x\neq5$ και $x\neq-3$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x-5)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{(x-5)}=-\frac{1}{8}$$

Ε6. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq1$ και $g(x)=x^2-2x-15$

συνεπώς $g(2)=4-4-15=-15$ και

$$g(3-x)=(3-x)^2-2(3-x)-15=9-6x+x^2-6+2x-15=x^2-4x-12$$

Για $x\neq1$:

$$\lim_{x\to1}\frac{g(3-x)-g(2)}{f(x)-3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x-12-(-15)}{x+3-3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x}=\frac{1-4+3}{1}=\frac{0}{1}=0\ .$$

ΘΕΜΑ 2

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ε2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$ rad .

Ε4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε5. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\ln x}{x-1}=0$

β. $\lim_{x\to3}\frac{f''(x)+2\ln x+x}{x^2-9}=\frac{1}{6}$

Ε6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ στο σημείο της $\mathbf{M(e,f(e))}$.

Λύση:

Ε1. Πρέπει $\mathbf{x \neq 0}$ και $\mathbf{\frac{1}{x} > 0}$ οι οποίες συναληθεύουν για κάθε $\mathbf{x > 0}$.

Άρα $\mathbf{x \in (0,+\infty)}$.

Ε2. Είναι $\mathbf{f(1) = 1^2 \ln\frac{1}{1} = 1\ln 1 = 1 \cdot 0 = 0}$

Άρα η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A(1,0)}$.

Ε3. Είναι $\mathbf{f(x) = x^2 \ln\frac{1}{x} = x^2(\ln 1 - \ln x) = x^2(0 - \ln x) = -x^2 \ln x.}$

Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

παράγωγο $\mathbf{f'(x) = (-x^2)' \ln x - x^2(\ln x)' = -2x\ln x - x^2\frac{1}{x} = -2x\ln x - x.}$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{A(1,0)}$ σχηματίζει με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ γωνία $\mathbf{\omega}$ με εφαπτομένη

$$\mathbf{\varepsilon\varphi\omega = f'(1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -2\ln 1 - 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) \overset{0\le\omega<\pi}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{3\pi}{4} rad}.$$

Ε4. Είναι $\mathbf{f'(x) = -2x\ln x - x = -x(2\ln x + 1), x > 0}$

$$\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x(2\ln x + 1) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}}$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	-∞		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		+∞
-x		+	0	-		-	
2lnx+1		-		-	0	+	
f΄(x)		-		+		-	
f(x)				↗	Ο.μ	↘	

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$\mathbf{2\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2\ln x < -1 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}}$$

Επομένως η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = e^{-\frac{1}{2}}$ με τιμή

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-\frac{2}{2}} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln e = \frac{1}{2e} \ .$$

Ε5. **α.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^2\ln x+\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\ln x(x^2-1)}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to1}\frac{-\ln x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}[-\ln x(x+1)] = -2\ln1(1+1) = 0 \ .$$

β. Η συνάρτηση $\mathbf{f'}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = (-2x)'\ln x - 2x(\ln x)' - (x)' = -2\ln x - 2x\frac{1}{x} - 1 =$$

$$= -2\ln x - 2 - 1 = -2\ln x - 3$$

Επομένως το ζητούμενο όριο γίνεται,

$$\lim_{x\to3}\frac{f''(x)+2\ln x+x}{x^2-9} = \lim_{x\to3}\frac{-2\ln x-3+2\ln x+x}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

$f(e) = -e^2\ln e = -e^2$ και $f'(e) = -2e\ln e - e = -2e - e = -3e$.

Ε6.

1ος Τρόπος

Έχουμε $f(e) = -e^2\ln e = -e^2$ και $f'(e) = -2e\ln e - e = -2e - e = -3e$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $\mathbf{M(e, f(e))}$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(e) = -3e$.

Συνεπώς

$$y = \lambda x + \beta \overset{\lambda=-3e}{\Rightarrow} y = -3ex + \beta$$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M(e, f(e)) = \left(e, -e^2\right)$

$$y = -3ex + \beta \overset{(x,y)=(e,-e^2)}{\Rightarrow} -e^2 = -3ee + \beta \Leftrightarrow -e^2 + 3e^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 2e^2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta=-2e^2}{\overset{\lambda=-3e}{\Rightarrow}} y = -3ex + 2e^2 \ .$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathbf{M(e,f(e))}$ είναι η $\mathbf{y-f(e)=f'(e)(x-e)}$

$$\underset{f'(e)=-3e}{\overset{f(e)=-e^2}{\Rightarrow}} y-(-e^2)=-3e(x-e)\Leftrightarrow y+e^2=-3ex+3e^2\Leftrightarrow y=-3ex+2e^2 .$$

ΘΕΜΑ 3 — Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ με τύπους $\mathbf{f(x)=\frac{e^x}{x}}$ και $\mathbf{g(x)=\frac{x^4}{x}}$.

Ε1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των $\mathbf{f,g}$.

Ε2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\mathbf{h=f\cdot g}$.

Διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής από την αρχή των αξόνων;

Ε3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{f(x)g(x)}$

β. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(f(x)-1\right)x$

γ. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-xf(x)}{x-1}$

Ε4. Δίνεται συνάρτηση $\mathbf{q}$ με τύπο $q(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xf(x)}-1}{e^x-1}, & x\in \mathbb{R}^*\\ \ln\kappa+\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

Να βρεθεί ο αριθμός $\mathbf{\kappa}$ ώστε η συνάρτηση $\mathbf{q}$ να είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$.

Είναι η συνάρτηση $\mathbf{q}$ συνεχής για $\mathbf{x\neq 0}$;

Ε5. Αν ισχύει ότι $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(f(x)-x^{-1}\right)=1$ και $s(x)=\begin{cases}xf(x) & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$, να βρεθεί ο αριθμός $\mathbf{s'(0)}$.

Ε6. Να βρεθεί η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{h}$.

Ε7. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{f(g(x))}$.

Ε8. Να δείξετε ότι $\displaystyle f'(x)\left(\ln f(x)\right)'-\frac{(x+1)^2e^x}{g(x)}=-4\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$.

Ε9. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της $\mathbf{C_g}$ που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=-\frac{x}{3}+1}$.

Ε10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f_1(x)=\frac{h(x)}{e^x}$ στο σημείο $(x_0,f_1(x_0))$ και το εμβαδόν $E(x_0)$ του τριγώνου OAB που σχηματίζεται από την ευθεία εφαπτομένης και τους άξονες $x'x, y'y$.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(x_0)$ του τριγώνου OAB για $x_0=2$.

Ε11. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση h, $x<0$.

Ε12. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(g(x))$, $x>0$.

Ε13. Δίνεται η συνάρτηση $f_2(x)=\frac{g(x)}{x}+\frac{2\alpha f(x)}{e^x}+\beta$, $x\in R^*$ και $\alpha,\beta\in R$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι παράλληλη στον άξονα των x και ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $f_2(x)=0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$ και $\beta=-17$.

Έπειτα για τις τιμές των α και β που βρήκατε να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. $f(x)=\frac{e^x}{x}$ και $g(x)=\frac{x^4}{x}$. Και για τις δύο συναρτήσεις πρέπει $x\neq 0$.

Οπότε $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ε2. $h(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ με $x\in D_f\cap D_g$.

Άρα $h(x)=\frac{e^x}{x}\frac{x^4}{x}=e^x x^2$ με $x\neq 0$.

Αφού $x\neq 0$, η C_h δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε3. α. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{e^x x^2}=1$

β. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x}{x}x=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)=1$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)-xf(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x x^2-e^x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x(x-1)(x+1)}{(x-1)}=2e$

Ε4. Για να είναι η q συνεχής στο 0 πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = q(0)$.

Για $x \neq 0$:

$$q(x) = \frac{\sqrt{xf(x)}-1}{e^x-1} = \frac{\sqrt{x\frac{e^x}{x}}-1}{e^x-1} = \frac{\sqrt{e^x}-1}{e^x-1} = \frac{\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{e^x}^2-1^2\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} = \frac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{e^x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{e^x}+1} = \frac{1}{\sqrt{e^0}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = q(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\kappa = 0 \Leftrightarrow \ln\kappa = \ln 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Για $x \neq 0$:

Η συνάρτηση $\sqrt{e^x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $\sqrt{x}$ και e^x

οπότε η $q(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}+1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ε5. **1ος Τρόπος**

Ισχύει πως $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$

Είναι $s(x) = \begin{cases} xf(x) = x\frac{e^x}{x} = e^x & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Έχουμε $s'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{s(0+h)-s(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{s(h)-s(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

2ος Τρόπος

$$s(x) = \begin{cases} xf(x) & , x\neq 0 \\ 1 & , x = 0\end{cases} = \begin{cases} x\frac{e^x}{x} & , x\neq 0 \\ 1 & , x = 0\end{cases} = \begin{cases} e^x & , x\neq 0 \\ 1 & , x = 0\end{cases} = \begin{cases} e^x & , x\neq 0 \\ e^0 & , x = 0\end{cases} = e^x, x \in R$$

$s'(x) = \left(e^x\right)' = e^x \Rightarrow s'(0) = e^0 = 1$.

Ε6. $h(x) = x^2e^x$ για $x \neq 0$

$h'(x) = \left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x$ για $x \neq 0$

$h''(x) = (2x)'e^x + 2x\left(e^x\right)' + \left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x$

Επομένως είναι,

$h''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$ για $x \neq 0$.

Ε7. **1ος Τρόπος**

$$\kappa(x) = f(g(x)) \overset{g(x)=x^3}{=} f(x^3) \overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=} \frac{e^{x^3}}{x^3} \text{ για } x \neq 0$$

2ος Τρόπος

$$\kappa(x) = f(g(x)) \overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=} \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \overset{g(x)=x^3}{=} \frac{e^{x^3}}{x^3} \text{ για } x \neq 0$$

Κοινή συνέχεια

οπότε

$$\kappa'(x) = \left(\frac{e^{x^3}}{x^3}\right)' = \frac{\left(e^{x^3}\right)'x^3 - e^{x^3}\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{3x^2e^{x^3}x^3 - e^{x^3}3x^2}{x^6} = \frac{3x^2e^{x^3}\left(x^3-1\right)}{x^6}$$

Επομένως είναι,

$$\kappa'(x) = \frac{3e^{x^3}\left(x^3-1\right)}{x^4} \text{ για } x \neq 0$$

Ε8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ για $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\left(e^x\right)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, x \neq 0.$$

Για $x > 0$ έχουμε $\ln(f(x)) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = \ln e^x - \ln x = x - \ln x$

$$\left(\ln f(x)\right)' = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x)\cdot\left(\ln f(x)\right)' - \frac{(x+1)^2e^x}{g(x)} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x} - \frac{(x+1)^2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-1)^2}{x^3} - \frac{(x+1)^2e^x}{x^3} =$$

$$= \frac{e^x(x^2-2x+1-x^2-2x-1)}{x^3} = \frac{-4xe^x}{x^3} = -\frac{4e^x}{x^2} = -\frac{4}{x}\frac{e^x}{x} - 4\frac{f(x)}{x}.$$

Ε9. Η $g(x) = x^3$ με $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 3x^2$ για $x \neq 0$.

Έστω $M(x_o, g(x_o))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης $(\varepsilon\varphi)$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = g'(x_o)$ και έστω (ε) η ευθεία $y = -\dfrac{x}{3} + 1$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon}=-\dfrac{1}{3}$. Τότε αφού οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες θα ισχύει πως

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\frac{-1}{3}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=3\Leftrightarrow g'(x_o)=3\Leftrightarrow 3x_o^2=3\Leftrightarrow x_o^2=1\Leftrightarrow x_o=\pm1.$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι $M_1(1,g(1))=(1,1)$ και $M_2(-1,g(-1))=(-1,-1)$.

1ος Τρόπος

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_1(1,g(1))=(1,1)$ είναι μια ευθεία της μορφής

$y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=g'(1)=3\cdot1^2=3$

συνεπώς $y=\lambda x+\beta\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}y=3x+\beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M_1(1,g(1))=(1,1)$

$$y=3x+\beta\overset{(x,y)=(1,1)}{\Rightarrow}1=3\cdot1+\beta\Leftrightarrow1-3=\beta\Leftrightarrow\beta=-2$$

$$y=\lambda x+\beta\underset{\beta=-2}{\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}}y=3x-2.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_2(-1,g(-1))=(-1,-1)$ είναι μια ευθεία της μορφής

$y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=g'(-1)=3(-1)^2=3$

συνεπώς $y=\lambda x+\beta\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}y=3x+\beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M_2(-1,g(-1))=(-1,-1)$

$$y=3x+\beta\overset{(x,y)=(-1,-1)}{\Rightarrow}-1=3(-1)+\beta\Leftrightarrow-1=-3+\beta\Leftrightarrow-1+3=\beta\Leftrightarrow\beta=2$$

$$y=\lambda x+\beta\underset{\beta=2}{\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}}y=3x+2$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M_1(1,g(1))=(1,1)$ είναι η

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\underset{g'(1)=3}{\overset{g(1)=1}{\Rightarrow}}y-1=3(x-1)\Leftrightarrow y-1=3x-3\Leftrightarrow y=3x-2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M_2(-1,g(-1))=(-1,-1)$ είναι η

$$y-g(-1)=g'(-1)(x-(-1))\underset{g'(1)=3}{\overset{g(-1)=-1}{\Rightarrow}}y-(-1)=3(x+1)\Leftrightarrow y+1=3x+3\Leftrightarrow y=3x+2$$

Ε10. Για την f_1 έχουμε $f_1(x)=\dfrac{h(x)}{e^x}=\dfrac{e^x x^2}{e^x}=x^2$ με $x\neq0$.

Η $f_1(x)=x^2$ με $x\neq0$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική για $x\neq0$ με παράγωγο $f_1'(x)=2x$.

1ος Τρόπος

Η εφαπτομένη της C_{f_1} στο σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right) = \left(x_o, x_o^2\right)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda, \beta \in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f_1'(x_o) = 2x_o$

συνεπώς $y = \lambda x + \beta \overset{\lambda = 2x_o}{\Rightarrow} y = 2x_o x + \beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right) = \left(x_o, x_o^2\right)$

$$y = 2x_o x + \beta \overset{(x,y)=\left(x_o, x_o^2\right)}{\Rightarrow} x_o^2 = 2x_o \cdot x_o + \beta \Leftrightarrow x_o^2 - 2x_o^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = -x_o^2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta = -x_o^2}{\overset{\lambda = 2x_o}{\Rightarrow}} y = 2x_o x - x_o^2$$

2^ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right)$ είναι η

$y - f_1(x_o) = f_1'(x_o)(x - x_o)$ οπότε αφού $f_1(x_o) = x_o^2$ και $f_1'(x_o) = 2x_o$ τότε

$y - x_o^2 = 2x_o(x - x_o) \Leftrightarrow y - x_o^2 = 2x_o x - 2x_o^2 \Leftrightarrow y = 2x_o x - x_o^2$.

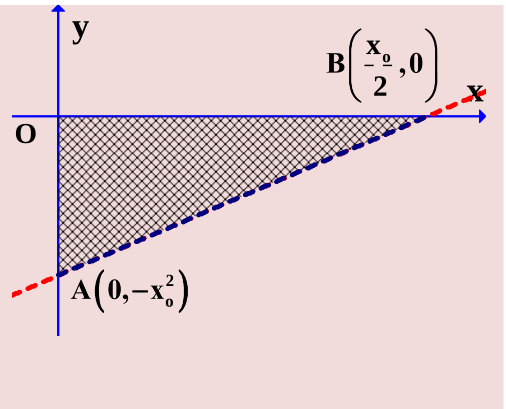
Κοινή συνέχεια

Τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ προκύπτουν για $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα , οπότε έχουμε

$y = 2x_o x - x_o^2 \overset{x=0}{\Rightarrow} y = 2x_o \cdot 0 - x_o^2 = 0 - x_o^2 = -x_o^2$, το $A\left(0, -x_o^2\right)$ σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ και

$y = 2x_o x - x_o^2 \overset{y=0}{\Rightarrow} 0 = 2x_o x - x_o^2 \Leftrightarrow 2x_o x = x_o^2 \overset{x_o \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\cancel{2x_o} x}{\cancel{2x_o}} = \frac{x_o^{\cancel{2}}}{2\cancel{x_o}} \Leftrightarrow x = \frac{x_o}{2}$, το

$B\left(\frac{x_o}{2}, 0\right)$ σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.



Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\left|-x_o^2\right|\left|\frac{x_o}{2}\right| = \frac{1}{4}\left|x_o^3\right|$ τ.μ.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού για $x_o = 2$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης εμβαδού στην τιμή $x_o = 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{4}x^3$ με $x > 0$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $E'(x) = \frac{3}{4}x^2$ για $x > 0$.

Οπότε ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $E'(2) = \frac{3}{4}2^2 = \frac{3}{4}4 = 3$.

Ε11. Η $\mathbf{h(x)=e^x x^2}$ με $\mathbf{x<0}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $\mathbf{x<0}$ με παράγωγο

$$\mathbf{h'(x)=\left(e^x\right)'x^2+e^x\left(x^2\right)'=e^x x^2+e^x 2x=e^x\left(x^2+2x\right)=e^x x\left(x+2\right)}\ .$$

Είναι $\mathbf{h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x x\left(x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left\{x=0, x=-2\right\}}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{h'}$ και μεταβολών της $\mathbf{h}$.

Η $\mathbf{h}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(-\infty,-2]}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[-2,0)}$.

Η $\mathbf{h}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\mathbf{x_o=-2}$ στο $\mathbf{(-\infty,0)}$

με τιμή $\mathbf{h(-2)=e^{-2}(-2)^2=4e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}}$.

x	-∞		-2		0		+∞
e^x		+		+		+	
x		-		-	0	+	
x+2		-	0	+		+	
h′(x)		+	0	-		+	
h(x)		↗	Ο.μ	↘			

Ε12. Για $\mathbf{x>0}$ θέτουμε

1ος Τρόπος

$$\mathbf{\omega(x)=f(g(x))\overset{g(x)=x^3}{=}f(x^3)\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}}\ \text{για } \mathbf{x>0}$$

2ος Τρόπος

$$\mathbf{\omega(x)=f(g(x))\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{g(x)}}{g(x)}\overset{g(x)=x^3}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}}\ \text{για } \mathbf{x>0}$$

Κοινή συνέχεια

Η $\mathbf{\omega\left(x\right)}$ είναι παραγωγίσιμη για $\mathbf{x>0}$ με παράγωγο

$$\mathbf{\omega'(x)=\left(\frac{e^{x^3}}{x^3}\right)'=\frac{\left(e^{x^3}\right)'x^3-e^{x^3}\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^2e^{x^3}x^3-e^{x^3}3x^2}{x^6}=\frac{x^2\left(3x^3e^{x^3}-3e^{x^3}\right)}{x^6}}$$

$$\mathbf{\omega'(x)=\frac{3x^3e^{x^3}-3e^{x^3}}{x^4}=\frac{3e^{x^3}(x^3-1)}{x^4}}\ \text{για } \mathbf{x>0}.$$

Είναι $\mathbf{\omega'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3e^{x^3}(x^3-1)}{x^4}=0 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{\omega'}$ και μεταβολών της $\mathbf{\omega}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3e^{x^3}$		+	‖	+		+	
x^3-1		-	‖	-	0	+	
x^4		+	0	+		+	
$\omega'(x)$		-	‖	-	0	+	
$\omega(x)$			‖	↘	Ο.ε	↗	

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$x^3-1>0 \Leftrightarrow x^3>1 \Leftrightarrow x^3>1^3 \overset{x^3 \nearrow}{\Leftrightarrow} x>1$$

Επομένως η $\omega(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η $\omega(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ στο $(0,+\infty)$ με τιμή $\omega(1)=\dfrac{e^{1^3}}{1^3}=\dfrac{e}{1}=e$.

Ε13. $f_2(x)=\dfrac{g(x)}{x}+\dfrac{2\alpha f(x)}{e^x}+\beta=\dfrac{x^3}{x}+\dfrac{2\alpha\frac{e^x}{x}}{e^x}+\beta=x^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\beta$ με $x\neq 0$

Η f_2 είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\neq 0$ με παράγωγο $f_2'(x)=2x-\dfrac{2\alpha}{x^2}$

$$f_2(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+\frac{2\alpha}{1}+\beta=0 \Leftrightarrow 1+2\alpha+\beta=0 \ (1)$$

$$f_2'(2)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2-\frac{2\alpha}{2^2}=0 \Leftrightarrow 4-\frac{2\alpha}{4}=0 \Leftrightarrow \alpha=8 \ (2)$$

οπότε από την (1) έχουμε $\beta=-17$

Για $\alpha=8, \beta=17$:

$$f_2(x)=x^2+\frac{16}{x}-17 \text{ με } x\neq 0$$

$$f_2'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2\left(x^3-8\right)}{x^2} \text{ με } x\neq 0.$$

Είναι $f_2'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x^3=2^3 \Leftrightarrow x=2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f_2' και μεταβολών της f_2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^3-8		-	‖	-	0	+	
x^2		+	0	+		+	
$f_2'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f_2(x)$		↘	‖	↘	Τ.ε	↗	

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$x^3-8>0 \Leftrightarrow x^3>8 \Leftrightarrow x^3>2^3 \overset{x^3 \nearrow}{\Leftrightarrow} x>2$$

Επομένως η f_2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,2]$. Η f_2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=2$ στο $(0,+\infty)$ με τιμή $f_2(2)=2^2+\frac{16}{2}-17=4+8-17=-5$.

ΘΕΜΑ 4

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω οι συνάρτησεις $f(x)=\frac{1}{x}$ με $x>0$ και $g(x)=\begin{cases}(\sqrt{x+1}-1)f(x) & ,x>0\\ \alpha & ,x=0\end{cases}$.

Ε1. Να βρείτε το $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$ είναι κάθετη στη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.

Ε3. Από τυχαίο σημείο $M(x,y)$ της C_f φέρνουμε παράλληλες ευθείες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες η απόσταση $B\Gamma$ γίνεται ελάχιστη.

Πηγή: Δ.Γεωργακίλας (εκδόσεις Τομή)

Λύση:

Ε1. Για να είναι η g συνεχής στο $x_0=0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$.

Για $x>0$:

$$g(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

τελικά $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\alpha$.

Ε2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι η παράγωγος της f στο $x_0=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με παράγωγο

$\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$ για $\mathbf{x > 0}$.

Άρα $\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

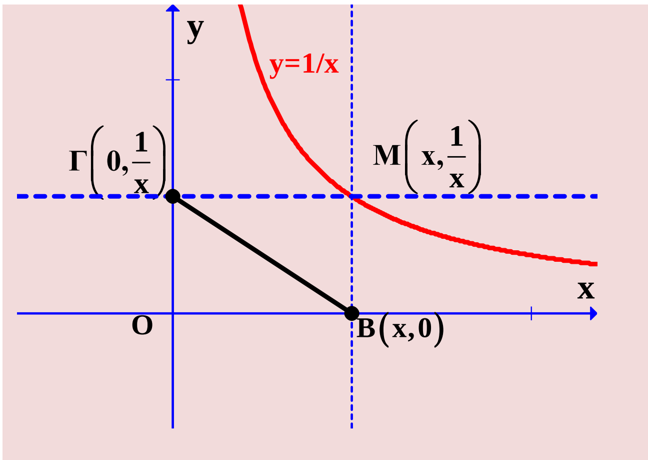
Επιπλέον η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου είναι η ευθεία $\mathbf{y = x}$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = 1$.

Επειδή $\lambda_{\varepsilon\phi} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \cdot 1 = -1$ έπεται ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στη διχοτόμο.

Ε3.

Αν $M(x,y) \in C_f$, τότε $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

Οι παράλληλες από το $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$ προς τους άξονες, τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $B(x,0)$ και $\Gamma\left(0, \frac{1}{x}\right)$ αντίστοιχα.



1ος Τρόπος

Το τρίγωνο $\mathbf{OB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{O}$ κι επειδή $OB = x > 0$ και $O\Gamma = \frac{1}{x} > 0$

από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $\mathbf{OB\Gamma}$:

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ με } x > 0$$

άρα $(B\Gamma) = \sqrt{(B\Gamma)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ με $x > 0$.

2ος Τρόπος

Από τον τύπο της απόστασης δυο σημείων :

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + \left(\frac{1}{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \text{ με } x > 0.$$

Κοινή συνέχεια

Η ποσότητα $(B\Gamma) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ με $x > 0$ γίνεται ελάχιστη

όταν η ποσότητα $x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x > 0$ γίνεται ελάχιστη.

Θέτουμε $\mathbf{d(x)=x^2+\frac{1}{x^2}}$ με $\mathbf{x>0}$.

Η $\mathbf{d(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$\mathbf{d'(x)=\left(x^2+x^{-2}\right)'=2x-2x^{-3}=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}=\frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=}$$

$$\mathbf{=\frac{2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^3}}.$$

Είναι

$$\mathbf{d'(x)=0\Leftrightarrow 2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\{x=1,x=-1\}}.$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{d'}$ και μεταβολών της $\mathbf{d}$.

$\mathbf{x}$	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$\mathbf{x^2-1}$	+	0	-		-	0	+
$\mathbf{x^2+1}$	+		+		+		+
$\mathbf{x^3}$	-		-	0	+		+
$\mathbf{d'(x)}$	-	0	+		-	0	+
$\mathbf{d(x)}$					↘	Ο.ε	↗

Επομένως η $\mathbf{d}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[1,+\infty)}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(0,1]}$. Η $\mathbf{d}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=1}$ στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ Άρα και η απόσταση $\mathbf{ΒΓ}$ δέχεται ελάχιστο για $\mathbf{x_0=1}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{M(1,1)}$.

ΘΕΜΑ 5

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha}$ όπου $\mathbf{\alpha\in R}$.

Να αποδείξετε ότι:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Ε2. Το τοπικό ελάχιστο της $\mathbf{f}$ είναι μικρότερο από το τοπικό μέγιστο για κάθε τιμή του $\mathbf{\alpha\in R}$.

Ε3. Υπάρχει ακριβώς μια τιμή $\mathbf{x_0}$ για την οποία η εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $\mathbf{M(x_0,f(x_0))}$, έχει το μεγαλύτερο συντελεστή διεύθυνσης.

Ε4. Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}}$.

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{f'(x)=-3x^2-6x+9}$.

Είναι $\mathbf{f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow\{x=1\text{ ή }x=-3\}}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ 1 $\quad +\infty$
$f'(x)=-3x^2-6x+9$	- $\quad 0 \quad$ + $\quad 0 \quad$ -
$f(x)$	$\searrow$ τ.ε $\nearrow$ τ.μ $\searrow$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-3]$, $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=-3$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2=1$ με τιμές

$$f(-3)=-(-3)^3-3(-3)^2+9(-3)+\alpha^2-4\alpha=-(-27)-3\cdot 9+9(-3)+\alpha^2-4\alpha=$$
$$=27-27-27+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha-27$$

και $f(1)=-1^3-3\cdot 1^2+9\cdot 1+\alpha^2-4\alpha=-1-3+9+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha+5$.

Ε2. Έστω ότι $f(-3)<f(1)\Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha-27<\alpha^2-4\alpha+5\Leftrightarrow -27<5$ που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ε3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $M(x,f(x))$ είναι ίσος με $f'(x)=-3x^2-6x+9$.

Θεωρούμε συνάρτηση $\delta(x)=-3x^2-6x+9$ (συντελεστής διεύθυνσης της f).
Η $\delta(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\delta'(x)=-6x-6$.
Είναι $\delta'(x)=0\Leftrightarrow -6x-6=0\Leftrightarrow x=-1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της δ' και μεταβολών της δ.

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$\delta'(x)=-6x-6$	+ $\quad 0 \quad$ -
$\delta(x)$	$\nearrow$ Ο.μ $\searrow$

Επομένως η δ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,+\infty)$. Η δ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=-1$.

Οπότε το σημείο με τη μέγιστη κλίση είναι το $M(-1,f(-1))$.

$$f(-1)=-(-1)^3-3(-1)^2+9(-1)+\alpha^2-4\alpha=-(-1)-3\cdot 1+9(-1)+\alpha^2-4\alpha=$$
$=1-3-9+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha-11$ δηλαδή το $M(-1,\alpha^2-4\alpha-11)$.

Ε4. $f(x)=-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha$, $f(1)=\alpha^2-4\alpha+5$

$$\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=$$

$$=\frac{-x^3-3x^2+9x+\cancel{\alpha^2}-\cancel{4\alpha}-\cancel{\alpha^2}+\cancel{4\alpha}-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-x^3-3x^2+9x-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=$$

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho=-5$*).*

$$\frac{(x+5)\left(-x^2+2x-1\right)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-(x+5)\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\sqrt{x^2+3}^2-2^2}=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4}=$$

$$=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-(x-1)(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)}=\frac{-(x-1)^2(x+5)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+5)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1}=\frac{-(1-1)(1+5)(\sqrt{1^2+3}+2)}{1+1}=0.$$

ΘΕΜΑ 6

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Ένας βιομήχανος μπορεί να στείλει αμέσως σε πελάτες φορτίο **200** τόνων με κέρδος **30.000** ευρώ τον τόνο. Αν καθυστερήσει λίγο καιρό θα προσθέτει στο φορτίο **10** τόνους την εβδομάδα αλλά το κέρδος του θα μειώνεται κατά **1.000** ευρώ τον τόνο κάθε εβδομάδα από όλο το φορτίο. Πότε πρέπει να στείλει το φορτίο ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος;

Λύση:

- Αν στείλει τώρα το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  200·30.000 ευρώ
- Αν στείλει σε μία εβδομάδα το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $(200+1\cdot 10)\cdot(30.000-1.000\cdot 1)$ ευρώ
- Αν στείλει σε δύο εβδομάδες το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $(200+2\cdot 10)\cdot(30.000-1.000\cdot 2)$ ευρώ
- Άρα, αν στείλει σε x εβδομάδες το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $(200+x\cdot 10)\cdot(30.000-1.000\cdot x)$ ευρώ.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x)=(200+10x)(30.000-1.000x)=10(20+x)\cdot 1000(30-x)$$

$K(x)=10.000(-x^2+10x+600)$ με $x\geq 0$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$K'(x)=10.000(-2x+10)$

Είναι $K'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+10=0 \Leftrightarrow x=5$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της K' και μεταβολών της K.

x	0	5	$+\infty$
$K'(x)=10.000(-2x+10)$		+ 0 -	
$K(x)$		$\nearrow$ Ο.μ $\searrow$	

Επομένως η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5,+\infty)$.

Η K παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=5$.

Οπότε πρέπει να στείλει το φορτίο σε 5 εβδομάδες για να έχει το μέγιστο κέρδος.

ΘΕΜΑ 7

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ με $\alpha>0$

Ε1. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.

Ε2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(0,f(0))$ να σχηματίζει γωνία 45^o με τον $x'x$.

Ε3. Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Ε4. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ελάχιστο της f να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$

οπότε $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}=\frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha}$.

Η συνάρτηση $e^{\alpha x+\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων e^x και $\alpha x+\alpha$ με $\alpha>0$.

Η $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=(x)'e^{\alpha x+\alpha}+x\left(e^{\alpha x+\alpha}\right)'=e^{\alpha x+\alpha}+\alpha xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$.

Οπότε $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=e^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}+\alpha xe^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}=e^{1+\alpha}+e^{1+\alpha}=2e^{1+\alpha}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha^2 xe^{\alpha x+\alpha}=2\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha^2 xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$. Οπότε $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\alpha e^{1+\alpha}+\alpha e^{1+\alpha}=3\alpha e^{1+\alpha}$.

Άρα $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=3\alpha e^{1+\alpha}-2\alpha e^{1+\alpha}-\alpha^2\frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha}=$

$=3\alpha e^{1+\alpha}-2\alpha e^{1+\alpha}-\alpha e^{1+\alpha}=3\alpha e^{1+\alpha}-3\alpha e^{1+\alpha}=0$.

Ε2. Είναι $f'(0)=e^{\alpha\cdot 0+\alpha}+\alpha\cdot 0e^{\alpha\cdot 0+\alpha}=e^{\alpha}$.

Έστω ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0, τότε $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^{o}=1\Leftrightarrow e^{\alpha}=1\Leftrightarrow e^{\alpha}=e^{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ **άτοπο** διότι $\alpha>0$.

Ε3. Είναι $f'(x)=e^{\alpha x+\alpha}+\alpha x e^{\alpha x+\alpha}=e^{\alpha x+\alpha}(\alpha x+1)$ για κάθε $x\in R$ με $\alpha>0$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha x+1=0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}x=-\dfrac{1}{\alpha}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{\alpha},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\alpha}\right]$.

x	-∞	-1/α	+∞
$e^{\alpha x+\alpha}$	+		+
$\alpha x+1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	↘	Ο.ε	↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=-\dfrac{1}{\alpha}$ με τιμή

$$f\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}=-\frac{1}{\alpha}e^{-1+\alpha}=-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}.$$

Ε4. Θέτουμε νέα συνάρτηση $g(\alpha)=-\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}$ με $\alpha>0$ την ελάχιστη τιμή της f. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(\alpha)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)'e^{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha-1}\right)'=\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}=e^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\right)=e^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right).$$

Είναι $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{\alpha-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με τιμή

$g(1)=-\dfrac{1}{1}e^{1-1}=-e^{0}=-1$.

x	-∞	0	1	+∞
$e^{\alpha-1}$	+	+		+
$1-\alpha$	+	+	0	-
α^2	+	0 +		+
$g'(\alpha)$	+	+	0	-
$g(\alpha)$		↗	Ο.μ	↘

Οπότε το ελάχιστο της f παίρνει την μέγιστη τιμή του για $\alpha=1$.

ΘΕΜΑ 8

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha+\beta\sqrt{x}$ για κάθε $x>0$ με $\alpha,\beta\in R$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $f(4)=5$ και $f'(9)=\frac{1}{3}$.

Ε2. Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ να βρείτε

α. Το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)-3}$.

β. Το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(3,1)$.

Πηγή: Λ.Κανάκης - Γ.Μαυρίδης (εκδόσεις Μαυρίδης)

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=\frac{\beta}{2\sqrt{x}}$.

$f'(9)=\frac{\beta}{2\sqrt{9}}=\frac{\beta}{2\cdot 3}=\frac{\beta}{6}$ και επειδή $f'(9)=\frac{1}{3}$ έχουμε $\frac{\beta}{6}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\beta=6\Leftrightarrow \beta=2$

$f(4)=\alpha+\beta\sqrt{4}\overset{\beta=2}{=}\alpha+2\cdot 2=\alpha+4$ κι επειδή $f(4)=5$ έχουμε $\alpha+4=5\Leftrightarrow\alpha=1$.

Ε2. **α.** Είναι $f(x)=1+2\sqrt{x}$ με $x>0$

$$\frac{x^2-1}{f(x)-3}=\frac{x^2-1^2}{1+2\sqrt{x}-3}=\frac{(x+1)(x-1)}{2\sqrt{x}-2}=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2(x-1)}=\frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{2}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2}=\frac{(1+1)\left(\sqrt{1}+1\right)}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$.

β. Έστω $M(x,f(x))=\left(x,1+2\sqrt{x}\right)$ τυχαίο σημείο της C_f.

Η απόσταση του σημείου M από το $A(3,1)$ είναι

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{(x-3)^2+\left(1+2\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$AM=\sqrt{x^2-2\cdot 3x+3^2+2^2\sqrt{x}^2}=\sqrt{x^2-6x+9+4x}=\sqrt{x^2-2x+9}$$ με $x>0$.

Η ποσότητα $(\mathbf{AM})=\sqrt{\mathbf{x^2-2x+9}}$ με $\mathbf{x>0}$ γίνεται ελάχιστη όταν η ποσότητα $\mathbf{x^2-2x+9}$ με $\mathbf{x>0}$ γίνεται ελάχιστη.

Θέτουμε $\mathbf{d(x)=x^2-2x+9}$ με $\mathbf{x>0}$.

Η $\mathbf{d(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\mathbf{0,+\infty})$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{d'(x)=2x-2}$.

Είναι $\mathbf{d'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{d'}$ και μεταβολών της $\mathbf{d}$.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$d'(x)=2x-2$		‖	$-$	0	$+$	
$d(x)$		‖	↘	Ο.ε	↗	

Επομένως η $\mathbf{d}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\mathbf{1,+\infty})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\mathbf{0,1}]$.

Η $\mathbf{d}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=1}$.

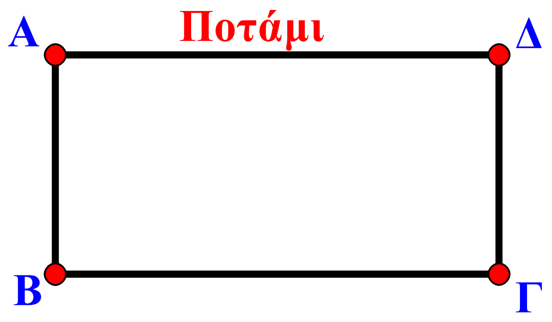
Άρα και η απόσταση $\mathbf{AM}$ δέχεται ελάχιστο για $\mathbf{x_0=1}$.

Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{M\left(x,1+2\sqrt{x}\right)=\left(1,1+2\sqrt{1}\right)=(1,1+2)=(1,3)}$

ΘΕΜΑ 9

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Η πλευρά $\mathbf{A\Delta}$ ορθογωνίου οικοπέδου $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ μεταβλητών διαστάσεων συνορεύει με ένα ποτάμι. Ο ιδιοκτήτης πρόκειται να περιφράξει τις πλευρές $\mathbf{AB,B\Gamma,\Gamma\Delta}$. Το κόστος για τις πλευρές $\mathbf{AB,\Delta\Gamma}$ είναι $\mathbf{3}$ ευρώ ανά μέτρο ενώ για την $\mathbf{B\Gamma}$ είναι $\mathbf{4}$ ευρώ ανά μέτρο. Πώς πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις του οικοπέδου ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδόν, με δεδομένο ότι ο ιδιοκτήτης θα διαθέσει **120** ευρώ για την περίφραξη;



Λύση:

Έστω $\mathbf{x>0}$ το μήκος της $\mathbf{B\Gamma}$ και $\mathbf{y>0}$ το πλάτος των $\mathbf{AB,\Gamma\Delta}$.

Επειδή το κόστος για την περίφραξη της $\mathbf{B\Gamma}$ είναι **4**€ ενώ για την περίφραξη των $\mathbf{AB,\Gamma\Delta}$ είναι **3**€, αφού θα διατεθούν **120** ευρώ για την περίφραξη έχουμε

$$6y+4x=120 \Leftrightarrow \frac{6y}{2}+\frac{4x}{2}=\frac{120}{2} \Leftrightarrow 3y+2x=60 \Leftrightarrow 3y=60-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}}=\frac{60}{3}-\frac{2x}{3} \Leftrightarrow y=20-\frac{2}{3}x\,.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=xy=x\left(20-\frac{2}{3}x\right)$ με $x,y>0$ ως διαστάσεις.

Επειδή $y>0$ πρέπει

$$20-\frac{2}{3}x>0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x>-20 \Leftrightarrow \frac{-\cancel{\frac{2}{3}}x}{-\cancel{\frac{2}{3}}}<\frac{-20}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x<\frac{\frac{20}{1}}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x<\frac{20\cdot 3}{1\cdot 2} \Leftrightarrow x<30\,.$$

Θέτουμε $E(x)=x\left(20-\frac{2}{3}x\right)=-\frac{2}{3}x^2+20x$ με $0<x<30$.

Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,30)$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$E'(x)=-\frac{4}{3}x+20$ με $0<x<30$.

Είναι $E'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x+20=0 \Leftrightarrow x=15$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

x	$-\infty$ 0		15		30 $+\infty$
$E'(x)=-\frac{4}{3}x+20$	‖	+	0	-	‖
$E(x)$	‖	↗	Ο.μ	↘	‖

Επομένως η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,15]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[15,+\infty)$

Η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=15$.

Οι διαστάσεις λοιπόν του ορθογωνίου ώστε να μεγιστοποιείται το εμβαδόν του είναι

$x=B\Gamma=15m$ και $y=AB=\Gamma\Delta=20-\frac{2}{3}x=20-\frac{2}{3}\cdot 15=20-\frac{30}{3}=20-10=10m$.

Και το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $xy=15\cdot 10=150m^2$.

ΘΕΜΑ 10

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-2x+14$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-9x+10$ στο $x_0=-1$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Ε2. Για $\alpha=1$ και $\beta=-2$

α. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία $y=-9x$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της $\mathbf{f}$ ως προς $\mathbf{x}$

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{2x-1}-1}$.

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-9$.

Αφού η (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$, το σημείο επαφής τους ανήκει και στην ευθεία εφαπτομένης και στη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$, επομένως $f(-1)=-2(-1)+14=-\alpha+\beta+9+10 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-3$ **(1)**.

Επίσης είναι $f'(-1)=-2 \Leftrightarrow 3\alpha-2\beta=7$ **(2)**.

Λύνουμε το σύστημα των **(1),(2).** Συνεπώς είναι

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=-3\\ 3\alpha-2\beta=7\end{cases} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-2\alpha+2\beta=-6\\ 3\alpha-2\beta=7\end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\alpha=1\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-2\end{cases}$$

Έτσι προκύπτει $\alpha=1,\beta=-2$.

Ε2. **α)** Για $\alpha=1,\beta=-2$ ο τύπος της $\mathbf{f}$ γίνεται $f(x)=x^3-2x^2-9x+10$.

Έστω $(x_0,f(x_0))$ τα σημεία επαφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ με τις εφαπτόμενες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon_1: y=-9x$.

Λόγω της παραλληλίας έχουμε

$$f'(x_0)=-9 \Leftrightarrow 3x^2-4x-9=-9 \Leftrightarrow x(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\frac{4}{3}.$$

Είναι $f(0)=10$ και $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{86}{27}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0,10)$ και $B\left(\frac{4}{3},-\frac{86}{27}\right)$.

β) Είναι $f'(x)=3x^2-4x-9$. Έστω $\rho(x)=3x^2-4x-9$ η συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της $\mathbf{f}$ ως προς $\mathbf{x}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $\rho'(x)=6x-4$.

Είναι $\rho'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-4=0 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}=\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της ρ' και μεταβολών της ρ.

x	$-\infty$ 2/3 $+\infty$
$\rho'(x)=6x-4$	- 0 +
$\rho(x)$	↘ Ο.ε ↗

Επομένως η ρ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$.

Η ρ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\frac{2}{3}$ με τιμή

$$\rho\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)-9=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}-\frac{9}{1}=-\frac{4}{3}-\frac{9}{1}=-\frac{4}{3}-\frac{27}{3}=-\frac{31}{3}.$$

γ) $f(x)=x^3-2x^2-9x+10=x^3-2x^2+x-x-9x+10$

$=x\left(x^2-2x+1\right)-10x+10=x(x-1)^2-10(x-1)=(x-1)\left(x^2-x-10\right)$.

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho=1$*).*

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-x-10\right)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-10}{x}=-10$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt{2x-1}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2x-1-1}=$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-x-10\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=-10$

ΘΕΜΑ 11 — Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x^2-2\alpha x+\alpha+2}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πεδίο ορισμού να είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Ε2. Για τη μεγαλύτερη ακέραια από τις τιμές του α ώστε $A_f=\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή του β ώστε το σημείο $K\left(3,\frac{1}{6}\right)$ να ανήκει στη C_f.

Ε3. Για $\alpha=1,\beta=-2$:

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία, τις θέσεις και το είδος ακροτάτων της f.

β. Να βρεθούν τα σημεία M,N της C_f με τεταγμένη $-\frac{2}{3}$.

γ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία M,N καθώς και το σημείο τομής τους.

Λύση:

α	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$4\alpha^2-4\alpha-8$	+ 0 - 0 +

Ε1 Για να ισχύει $\mathbf{A_f=R}$, πρέπει για κάθε $\mathbf{x\in R}$ να ισχύει $\mathbf{x^2-2\alpha x+\alpha+2\neq 0\ (1)}$

Η **(1)** δεν έχει λύσεις όταν $\mathbf{\Delta<0\Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha-8<0\Leftrightarrow \alpha\in(-1,2)}$.

Ε2 Η μεγαλύτερη ακέραιη τιμή του $\mathbf{\alpha}$ από το $\mathbf{(-1,2)}$ είναι το $\mathbf{\alpha=1}$. Συνεπώς ο τύπος της συνάρτηση γίνεται $\mathbf{f(x)=\dfrac{x+\beta}{x^2-2x+3}}$ με $\mathbf{x^2-2x+3\neq 0}$ αφού $\mathbf{\Delta=-4<0}$.

Είναι $\mathbf{K\left(3,\dfrac{1}{6}\right)\in C_f\Leftrightarrow f(3)=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow \dfrac{3+\beta}{6}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow \beta=-2}$.

Ε3 **α.** Για $\mathbf{\alpha=1,\beta=-2}$, από τα παραπάνω ερωτήματα είναι $\mathbf{A_f=R}$ και $\mathbf{f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-2x+3}}$. Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως ρητή, με $\mathbf{f'(x)=\dfrac{-x^2+4x-1}{(x^2-2x+3)^2}}$

Είναι $\mathbf{f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x-1=0\Leftrightarrow \left\{x=2-\sqrt{3}\ ή\ x=2+\sqrt{3}\right\}}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+4x-1$		-	0	+	0	-	
$(x^2-2x+3)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	

Έτσι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,2-\sqrt{3}\right]$ και στο $\left[2+\sqrt{3},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\mathbf{x_1=2-\sqrt{3}}$ το $\mathbf{f(2-\sqrt{3})=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}}$

και τοπικό μέγιστο για $\mathbf{x_2=2+\sqrt{3}}$ το $\mathbf{f(2+\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}}$.

β. Πρέπει $\mathbf{x_o\in R}$ με

$$\mathbf{f(x_o)=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{x_o-2}{x_o^2-2x_o+3}=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x_o-6=-2x_o^2+4x_o-6\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{2x_o^2+3x_o-4x_o-6+6=0\Leftrightarrow 2x_o^2-x_o=0\Leftrightarrow \left\{x_0=0\ ή\ \ x_0=\frac{1}{2}\right\}}.$$

Έτσι τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\mathbf{M}\left(0,-\frac{2}{3}\right),\mathbf{N}\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$.

γ. 1ος Τρόπος

- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathbf{M}\left(0,-\frac{2}{3}\right)$, είναι η $\mathbf{y-f(0)=f'(0)(x-0)}$

έχουμε $\mathbf{f(0)=-\frac{2}{3}}$ και $\mathbf{f'(0)=-\frac{1}{9}}$ άρα $\mathbf{y+\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}x \Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}:(\varepsilon_1)}$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathbf{N}\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ είναι η $\mathbf{y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

έχουμε $\mathbf{f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}}$ και $\mathbf{f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}}$ άρα $\mathbf{y+\frac{2}{3}=\frac{4}{27}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{4}{27}x-\frac{20}{27}:(\varepsilon_2)}$

Σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$:

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους, προκύπτει το $\mathbf{K}\left(\frac{2}{7},\frac{-44}{63}\right)$.

2ος Τρόπος

- Η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ είναι της μορφής $\mathbf{y=\lambda x+\beta}$ με

$\lambda=\mathbf{f'(0)=\frac{1}{9}}$ και επειδή το σημείο επαφής $\mathbf{M}\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ είναι σημείο της ευθείας,

επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $\mathbf{-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}\cdot 0+\beta \Rightarrow \beta=-\frac{2}{3}}$, επομένως η ευθεία

εφαπτομένης έχει εξίσωση $\mathbf{(\varepsilon_1): y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3} \Rightarrow 9y+6+x=0}$.

- Η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ είναι της μορφής $\mathbf{y=\lambda x+\beta}$ με

$\mathbf{\lambda=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}}$ και επειδή το σημείο επαφής $\mathbf{N}\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ είναι σημείο της ευθείας,

επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $\mathbf{-\frac{2}{3}=\frac{4}{27}\frac{1}{2}+\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{20}{27} \Leftrightarrow}$, επομένως η

ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $\mathbf{(\varepsilon_1): y=\frac{4}{27}x-\frac{20}{27} \Leftrightarrow 27y-4x+20=0}$

Σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$:

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους και προκύπτει το $\mathbf{K}\left(\frac{2}{7},\frac{-44}{63}\right)$.

ΘΕΜΑ 12

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν, οι σχέσεις:
$f(x)+3xg(x)=19x^2-17x$ και $xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρείτε τους τύπους των f,g καθώς και τα κοινά σημεία των C_f,C_g.

Ε2. Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης
$$h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x).$$

Ε3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf'(x)-3}{x^3+g(x)-1}$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$$\begin{cases} f(x)+3xg(x)=19x^2-17x \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \overset{\cdot(-x)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -xf(x)-3x^2g(x)=-19x^3+17x^2 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -2g(x)-3x^2g(x)=-18x^3+18x^2-12x+12 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-2-3x^2\right)g(x)=-18x^2(x-1)-12(x-1) \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{6(3x^2+2)(x-1)}{2+3x^2} \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=6x-6 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=6x-6 \\ f(x)=x^2+x \end{cases}$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων θα προκύψουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+x=6x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$
η οποία έχει ρίζες τις $x=2$ και $x=3$. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων είναι λοιπόν τα $M(2,f(2))\equiv M(2,6)$ και
$N(3,f(3))\equiv N(3,12)$.

Ε2. Από τους τύπους $h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x)$, $f(x)=x^2+x$ και $g(x)=6x-6$ προκύπτει ότι ο τύπος της συνάρτησης h ισούται με

$$h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x)=x(x^2+x)-\frac{1}{6}(6x-6)=x^3+x^2-x+1 \text{ με } x\in\mathbb{R}.$$

Ε3. Η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=3x^2+2x-1$.

Οι ρίζες της είναι: $h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow \left\{x_1=-1 \text{ και } x_2=\frac{1}{3}\right\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της h' και μεταβολών της h.

x	-∞	-1		1/3	+∞
$h'(x)=3x^2+2x-1$	+	0	-	0	+
h(x)	↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗

Η $h(x)$ είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$.

Επιπλέον παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $h(-1)=2$ και τοπικό ελάχιστο το $h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

Ε4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\frac{xf'(x)-3}{x^3+g(x)-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x^2+x)'-3}{x^3+6x-6-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(2x+1)-3}{x^3+6x-7}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+6x-7}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x^2+x+7)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x^2+x+7}=\frac{5}{9}$$

<u>Δικαιολόγηση παραγοντοποίησης</u>

Είναι, $2x^2+x-3=2x^2-2x+3x-3=2x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(2x+3)$.

Διαφορετικά και με σχήμα Horner με ρ = 1.

Επίσης είναι,

$x^3+6x-7=x^3-x^2+x^2-x+7x-7=x^2(x-1)+x(x-1)+7(x-1)=$
$(x-1)(x^2+x+7)$

Διαφορετικά και με σχήμα Horner με ρ = 1.

ΘΕΜΑ 13

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με τύπο $\mathbf{f(x) = -e^{-\alpha}x^{\alpha} + \frac{\alpha+1}{e}\ln(\alpha+e^x)}$ με $\boldsymbol{\alpha>0}$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$.

Ε2. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{x^2-1}{x-1}-1\right)=1$, να βρεθεί ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$.

Για $\boldsymbol{\alpha=1}$

Ε3. Να δείξετε ότι $\mathbf{f'(-x)+f'(x)=0}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Ε4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\mathbf{f}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Πρέπει $\mathbf{e^x+\alpha>0}$. Επειδή $\boldsymbol{\alpha>0}$ και για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{e^x>0}$ έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{e^x+\alpha>0}$. Άρα η συνάρτηση $\mathbf{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

Ε2. $$1=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{x^2-1}{x-1}-1\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}-1\right)=\lim_{x\to\alpha}(x+1-1)=\lim_{x\to\alpha}(x)=\alpha$$

Ε3. Για $\boldsymbol{\alpha=1}$ έχουμε $\mathbf{f(x)=-e^{-1}x+\frac{2}{e}\ln(e^x+1), x\in R}$.

Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}, x\in R.$$

Οπότε $$f'(-x)=-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}=-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e^x+1}.$$

Έχουμε $$f'(x)+f'(-x)=-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}-e^{-1}+\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e^x+1}=-2e^{-1}+\frac{2e^x}{e(e^x+1)}+\frac{2}{e(e^x+1)}$$

$$=-2e^{-1}+\frac{2(e^x+1)}{e(e^x+1)}=-\frac{2}{e}+\frac{2}{e}=0.$$

Ε5. Για $\boldsymbol{\alpha=1}$ έχουμε

$$f'(x)=-\frac{1}{e}+\frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{2e^x}{e^x+1}-1\right)=\frac{1}{e}\cdot\frac{2e^x-e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}, x\in R.$$

Είναι $$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	-∞	0	+∞
e^x-1	-	0	+
e^x+1	+		+
1/e	+		+
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	↘	Ο.ε	↗

Δικαιολόγηση προσήμου

Έστω

$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=\dfrac{2\ln 2}{e}$.

ΘΕΜΑ 14

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x^3-4x^2+3x-3$ και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, x\neq 1\\ \alpha+6, x=1\end{cases}$

Ε1. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Ε2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$.

Ε3. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Για $\alpha=1$:

Ε4. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g στο $x_0=1$.

Ε5. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$\mu^2 g'(-2)+\mu g'(2)+32>0$.

Πηγή: Μ.Αγιοπούλου & Ν.Πανουσάκης (Ε.Ο.Σ.Κ)

Λύση:

Ε1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow 4x^2(x-1)+3(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(4x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

Ε2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=12x^2-8x+3$.

1^{ος} Τρόπος

Είναι $f'(1)=12-8+3=7$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1,0)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=7x-7.$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(1)=7$ και επειδή το σημείο επαφής $A(1,0)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της, δηλαδή $0=7\cdot 1+\beta\Rightarrow\beta=-7$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $y=7x-7$.

Ε3.

Ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται $g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^3-4x^2+3x-3}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}\Rightarrow$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(4x^2+3)}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}4x^2+3, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}.$$

Για να είναι συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}(4x^2+3)=\alpha+6\Rightarrow\alpha+6=7\Leftrightarrow\alpha=1.$$

Ε4. Ο τύπος της συνάρτησης g για $\alpha=1$ γίνεται $g(x)=\begin{cases}4x^2+3, & x\neq 1\\ 7, & x=1\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(1+h)^2+3-7}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+8h+4h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2+h)}{h}=8.$$

Άρα $g'(1)=8$ που είναι και ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης για $x=1$.

Ε5. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=\begin{cases}8x, & x\neq 1\\ 8, & x=1\end{cases}$ επομένως είναι $\mu^2 g'(-2)+\mu g'(2)+32>0\Leftrightarrow$

$$-16\mu^2+16\mu+32>0\overset{:(-16)}{\Leftrightarrow}\mu^2-\mu+2<0$$

και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων που ακολουθεί

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
μ^2-μ-2	+ 0 - 0 +

είναι $-1<\mu<2$.

ΘΕΜΑ 15 — Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+\alpha x^2-6\beta x+1, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1=-3, x_2=2$.

Ε1. Να βρεθούν οι τιμές των α,β

Ε2. Για $\alpha=3,\beta=6$:

α. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ο ελάχιστος.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-5)}}{\sqrt{6}x+5\sqrt{6}}$.

Λύση:

Ε1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=6x^2+2\alpha x-6\beta$.

Τότε $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+2\alpha x-6\beta=0\Leftrightarrow 3x^2+\alpha x-3\beta=0$.

Αν το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα, τότε η $f'(x)$ θα διατηρεί στο $\mathbb{R}$ το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου και συνεπώς η f θα είναι γνησίως μονότονη χωρίς ακρότατα. Άρα πρέπει $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \alpha^2+36\beta\geq 0$.

Η f' έχει ρίζες τις $x_1=-3, x_2=2$ και σαν εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει πρόσημο θετικό στο $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ και αρνητικό στο $(-3,2)$.

Από τους τύπους του **Vieta** έχουμε

$S=x_1+x_2\Leftrightarrow \dfrac{-2\alpha}{6}=-3+2\Leftrightarrow \dfrac{-\alpha}{3}=-1\Leftrightarrow \alpha=3$ και

$P=x_1x_2\Leftrightarrow \dfrac{-6\beta}{6}=(-3)\cdot 2\Leftrightarrow \beta=6$.

Ε2. **α.** Για $\alpha=3$ και $\beta=6$ έχουμε $f'(x)=6x^2+6x-36, x\in\mathbb{R}$.

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=12x+6, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f''(x)=0\Leftrightarrow 12x+6=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f'' και μεταβολών της f'.

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f''(x)=12x+6$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	Ο.ε	↗

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = -\frac{1}{2}$ με τιμή

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 36 = \frac{3}{2} - 3 - 36 = \frac{3}{2} - 39 = -\frac{75}{2}.$$

β. Είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1, x \in R$ και επομένως

$$f(-5) = 2(-5)^3 + 3(-5)^2 - 36(-5) + 1 = -250 + 75 + 180 + 1 = 6.$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to-5} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-5)}}{\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}} = \lim_{x\to-5} \frac{\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} - \sqrt{6}}{\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} - \sqrt{6})(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1 - 6}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 3x^2 - 36x - 5}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 10x^2 - 7x^2 - 35x - x - 5}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^2(x+5) - 7x(x+5) - (x+5)}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho = -5$).

$$\lim_{x\to-5} \frac{(x+5)(2x^2 - 7x - 1)}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{(2x^2 - 7x - 1)}{\sqrt{6}(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} = \frac{50 + 35 - 1}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{84}{12} = 7.$$

ΘΕΜΑ 16 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5, \quad x \in R, \quad \alpha, \beta \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,7)$.

Ε1. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,7)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = 1 - x$, να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$.

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 1$

Ε2. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = 1, x \in R$.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-2e^x}{x^2-25}=-\frac{1}{10}$.

Απο φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Ε1. Αφού $A(0,7)\in C_f$ έχουμε $f(0)=7\Leftrightarrow \alpha+5=7\Leftrightarrow \alpha=2$ δηλαδή $f(x)=2e^x-\beta x+5$ με $f'(x)=2e^x-\beta$.

Οι ευθείες είναι κάθετες άρα $f'(0)\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow(2-\beta)\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow 2-\beta=1\Leftrightarrow\beta=1$.

Ε2. Έχουμε $f(x)=2e^x-x+5$ και $f'(x)=2e^x-1, f''(x)=2e^x$ άρα $f''(x)-f'(x)=2e^x-(2e^x-1)=1$.

Ε3. Είναι $f'(x)=2e^x-1$. Λύνουμε την εξίσωση

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)=2e^x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.ε	$\nearrow$	

Δικαιολόγηση προσήμου

$2e^x-1>0\Leftrightarrow 2e^x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\ln 2$

Επομένως η f γνησίως φθίνουσα στο $[-\infty,-\ln 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\ln 2,+\infty]$. Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-\ln 2)=1+\ln 2+5=6+\ln 2$.

Ε4. Από το **Ε3** έχουμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\ln 2$ άρα στο σημείο $M(-\ln 2, 6+\ln 2)$ υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Ε5. Είναι $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-2e^x}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2e^x-x+5-2e^x}{x^2-25}=$

$=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-1}{x+5}=-\frac{1}{10}$.

ΘΕΜΑ 17

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x^2+\beta x}, x\in\mathbb{R}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,e^3)$ και $B(-1,e)$.

Ε1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ε2. Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

Ε3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει αυτή με τους άξονες.

Ε4. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f'(x)\cdot(4x+1)^2 + 4f(x)$.

Ε5. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x = 2$.

Πηγή: Φυλλάδιο Μ.Παπαγρηγοράκη

Λύση:

Ε1. Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

$f(1) = e^3 \Leftrightarrow e^{\alpha+\beta} = e^3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3\,(1)$ και $f(-1) = e \Leftrightarrow e^{\alpha-\beta} = e \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1\,(2)$.

Από $(1)+(2) \Rightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Από $(1) \overset{\alpha=2}{\Rightarrow} \beta = 1$. Έτσι $f(x) = e^{2x^2+x}$ με $x \in R$.

Ε2. Με $x = 0$ είναι $f(0) = e^0 = 1$.

Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$.

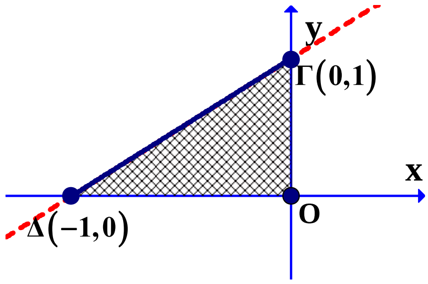
Ε3.

Είναι $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$ για $x \in R$.

1ος Τρόπος

Η εφαπτομένη στο Γ είναι η:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-1,0)$.



Επομένως σύμφωνα με το σχήμα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E_{O\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,1)$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(0) = 1$. Επειδή το σημείο αυτό είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1 = 0\cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1$. Επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y = x + 1$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-1,0)$. Επομένως σύμφωνα και με το σχήμα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_{O\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$

Ε4. $f''(x)=4e^{2x^2+x}+(4x+1)\cdot(4x+1)e^{2x^2+x}=4f(x)+(4x+1)f'(x)$.

Ε5. Ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x=2$ είναι $f''(2)=4e^{10}+(4\cdot 2+1)^2 e^{10}=85e^{10}$.

ΘΕΜΑ 18

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in R$. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

Ε1. Αν $f'(1)+f(2)=5$ και $f'\left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}\right)=0$, να βρείτε τις τιμές των α,β.

Ε2. Για $\alpha=12$ και $\beta=1$ να βρείτε:

α. το πρόσημο της f'.

β. την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\kappa,\lambda)$ όπου κ,λ είναι στοιχεία του συνόλου $\{-1,0,1\}$.

Πηγή: Φυλλάδιο Μ.Παπαγρηγοράκη

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta, x\in R$ $\alpha,\beta\in R$.

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=6x^2-18x+\alpha, x\in R$.

Έχουμε $f(2)=16-36+2\alpha+\beta=2\alpha+\beta-20$ και $f'(1)=6-18+\alpha=-12+\alpha$.

Οπότε $f'(1)+f(2)=5 \Leftrightarrow -12+\alpha+2\alpha+\beta-20=5 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=37$ (1).

Ακόμα $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x-2}=2$.

Επομένως $f'\left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}\right)=0 \Leftrightarrow f'(2)=0 \Leftrightarrow 2\alpha-36+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=12$ (2).

Οπότε από (1) έχουμε $\beta=1$.

Ε2. **α.** Έχουμε $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1, x\in R$ και

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f'(x)=6x^2-18x+12$	+ 0 - 0 +

Συνεπώς για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ έχουμε $f'(x)>0$

Ενώ για $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0$.

β. $f(-1)=-22\notin\{-1,0,1\}$, $f(0)=1\in\{-1,0,1\}$ και $f(1)=6\notin\{-1,0,1\}$.

Επομένως $\kappa=0$ και $\lambda=1$.

1ος Τρόπος

Η εφαπτομένη στο σημείο $A(0,1)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda,\beta\in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(0)=12$ συνεπώς $y=\lambda x+\beta \overset{\lambda=12}{\Rightarrow} y=12x+\beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ $y=12x+\beta \overset{(x,y)=(0,1)}{\Rightarrow} 1=12\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y=\lambda x+\beta \underset{\beta=1}{\overset{\lambda=12}{\Rightarrow}} y=12x+1$

2ος Τρόπος

Έχουμε $f'(0)=12$,οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,1)$ είναι η

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=12x\Leftrightarrow y=12x+1$

ΘΕΜΑ 19

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω $f(x)=x^2+(3-\alpha)x-(\alpha+5)$ με $\alpha\in R$. Για ποια τιμή του α το άθροισμα τετραγώνων των ριζών της f είναι ελάχιστο και ποια η τιμή του ελαχίστου;

Λύση:

Αρχικά πρέπει η δευτεροβάθμια να έχει δύο ρίζες, οπότε

$$\Delta>0\Leftrightarrow(3-\alpha)^2+4(\alpha+5)>0\Leftrightarrow 9-6\alpha+\alpha^2+4\alpha+20>0\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+29>0 \overset{\Delta'<0}{\Leftrightarrow} \alpha\in R$$

Έστω x_1,x_2 οι ρίζες τις δευτεροβάθμιας. Από τους τύπους Vieta, έχουμε $S=\alpha-3$ και $P=-(\alpha+5)$.

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P=(\alpha-3)^2+2(\alpha+5)$$
$$=\alpha^2-6\alpha+9+2\alpha+10=\alpha^2-4\alpha+19$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha)=\alpha^2-4\alpha+19, \alpha\in R$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(\alpha)=2\alpha-4, \alpha\in R$.

Είναι $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\alpha-4=0\Leftrightarrow \alpha=2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

x	-∞ 2 +∞
$g'(\alpha)=2\alpha-4$	- 0 +
$g'(x)$	↘ Ο.ε ↗

Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\alpha=2$ με τιμή $g(2)=4-8+19=15$.

ΘΕΜΑ 20 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=e^{\kappa(x-1)}-x, x\in R, \kappa\in R}$.

Ε1. Να βρεθούν $\mathbf{f'}$ και $\mathbf{f''}$.

Ε2. Να βρείτε την τιμή του $\mathbf{\kappa\in R}$, ώστε να ισχύει $\mathbf{f''(x)-2f'(x)+e^{\kappa(x-1)}=2}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Ε3. Αν $\mathbf{\kappa=1}$, τότε

α. να δείξετε ότι ο άξονας $\mathbf{x'x}$ εφάπτεται στην καμπύλη της $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{M(1,f(1))}$.

β. Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\mathbf{e^{x-1}\ge x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Πηγή: Μ.Τουμάσης- Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{f'(x)=\kappa e^{\kappa(x-1)}-1}$ και $\mathbf{f''(x)=\kappa^2 e^{\kappa(x-1)}}$.

Ε2. $\mathbf{f''(x)-2f'(x)+e^{\kappa(x-1)}=2 \Leftrightarrow \kappa^2 e^{\kappa(x-1)}-2\kappa e^{\kappa(x-1)}+2+e^{\kappa(x-1)}=2}$

$\mathbf{\Leftrightarrow (\kappa^2-2\kappa+1)e^{\kappa(x-1)}=0 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1=0 \Leftrightarrow \kappa=1}$ αφού $\mathbf{e^{\kappa(x-1)}\neq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$

Ε3. Για $\mathbf{k=1}$ έχουμε $\mathbf{f(x)=e^{x-1}-x}$ με $\mathbf{f'(x)=e^{x-1}-1}$.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στο $\mathbf{M}$ είναι $\mathbf{\lambda=f'(1)=0}$. Δηλαδή η εφαπτομένη στο $\mathbf{M}$ είναι οριζόντια. Επιπλέον $\mathbf{M(1,f(1))=(1,0)\in(x'x)}$ και συνεπώς η εφαπτομένη στο $\mathbf{M}$ είναι ο άξονας $\mathbf{x'x}$.

β. Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'(x)=e^{x-1}-1}$.

Λύνουμε την εξίσωση

$\mathbf{f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=1 \Leftrightarrow \ln e^{x-1}=\ln 1 \Leftrightarrow (x-1)\ln e=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.}$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)=e^{x-1}-1$	− 0 +
f(x)	↘ Ο.ε ↗

Δικαιολόγηση προσήμου

$\mathbf{f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-1}>1 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^0 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{x-1>0 \Leftrightarrow x>1}$

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[1,+\infty)}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(-\infty,1]}$. Η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ελάχιστο για $\mathbf{x=1}$ το $\mathbf{f(1)=0}$.

γ. Από το **β)** έχουμε λόγω του ελαχίστου της $\mathbf{f}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ είναι $\mathbf{f(x)\ge f(1) \Leftrightarrow e^{x-1}-x\ge 0 \Leftrightarrow e^{x-1}\ge x}$.

ΘΕΜΑ 21

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln(x^2+1), x\in \mathbb{R}$.

Ε1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε2. Αν $\alpha>\beta>1$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}>\ln\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-x+\lambda, x\in \mathbb{R}, \lambda\in \mathbb{R}$.

Ε3. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

Ε4. Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της g.

Ε5. Να βρείτε το $\lambda\in \mathbb{R}$ ώστε το τοπικό μέγιστο της g να είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο της g.

Πηγή: Β.Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=x-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
x^2+1		+		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↘	Τ.ε	↗	Τ.μ	↘	Τ.ε	↗	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1,0],[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,1],[0,1]$.
Για $x=-1$ και $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}-\ln 2$ και για $x=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$

Ε2. Για κάθε $\alpha>\beta>1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$f(\alpha)>f(\beta)\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2}-\ln\left(\alpha^2+1\right)>\frac{\beta^2}{2}-\ln\left(\beta^2+1\right)\Rightarrow \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}>\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\right)$$

Ε3. Είναι $g(x)=f'(x)-x+\lambda=\lambda-\dfrac{2x}{x^2+1}$ οπότε $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow\{x=-1 \text{ ή } x=1\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
x^2-1	+ 0 - 0 +
$(x^2+1)^2$	+ + +
$g'(x)$	+ 0 - 0 +
$g(x)$	↗ Τ.μ ↘ Τ.ε ↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Ε4. Για $x=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $g(-1)=\lambda+1$ και για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $g(1)=\lambda-1$.

Ε5. Έχουμε $g_{max}=2g_{min}\Leftrightarrow\lambda+1=2(\lambda-1)\Leftrightarrow\lambda=3$.

ΘΕΜΑ 22

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ,f,g με $f(1)=f'(1)=1$ και $\varphi(x)=f(g(x))$ με $g(x)=\ln x+x$ με $x>0$.

Ε1. Να δείξετε ότι: $g(1)=\varphi(1)=1$ και $g'(1)=\varphi'(1)=2$.

Ε2. Να εξετάσετε αν η $g(x)$ έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Ε3. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}$.

Ε4. **α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους $A(1,\varphi(1))$ και $B(1,f(1))$ αντίστοιχα.

β. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $g(1)=\ln1+1=1$ και $\varphi(1)=f(g(1))=f(1)=1$ άρα $g(1)=\varphi(1)=1$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ οπότε $g'(1)=2$ ακόμη

$\varphi'(x)=[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$ επομένως έχουμε ότι

$\varphi'(1)=f'(g(1))g'(1)\Rightarrow\varphi'(1)=f'(1)g'(1)\Rightarrow\varphi'(1)=2$. Άρα $\varphi'(1)=g'(1)=2$.

Ε2. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα δεν έχει ακρότατα.

Ε3. $$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=g'(1)=1.$$

Ε4. **α. $1^{ος}$ Τρόπος**

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_φ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=\varphi'(1)=2$ και επειδή το σημείο επαφής $M(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1=2\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=-1$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y=2x-1$

Κατά τον ίδιο τρόπο, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(1)=1$ και επειδή το σημείο επαφής $M(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1=1\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=0$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y=x$

$2^{ος}$ τρόπος

$$(\varepsilon_1): y-\varphi(1)=\varphi'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$$
$$(\varepsilon_2): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=x-1 \Leftrightarrow y=x.$$

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε_2) είναι: $\lambda=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta=1 \Leftrightarrow \theta=45^\circ$

ΘΕΜΑ 23

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$.

Ε1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Ε2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

Ε3. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης καθώς και την τιμή του ελάχιστου συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2, x\in \mathbb{R}$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=x^2-6x+5, x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ καθώς και στο $[5,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)=x^2-6x+5$	+	0 -	0	+
f(x)	↗	Τ.μ ↘	Τ.ε	↗

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=1$ με τιμή $f(1)=\frac{1}{3}-3+5-2=\frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2=5$ με τιμή

$$f(5)=\frac{125}{3}-75+25-2=-52+\frac{125}{3}=\frac{-156+125}{3}=\frac{-31}{3}.$$

Ε2. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι θετικός αριθμός, οπότε θέλουμε $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

Ε3. Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=2x-6, x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της . και μεταβολών της f'.

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=3$ με τιμή $f'(3)=9-18+5=-4$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)=2x-6$	-	0	+
f΄(x)	↘	Ο.ε	↗

ΘΕΜΑ 24

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, την f' και την f''.

Ε2. Να βρείτε τη μονοτονία της f'.

Ε3. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στην αρχή των αξόνων.

Ε4. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f'.

Ε5. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.

Ε6. Να αποδείξετε ότι $x\ln(x+1)-x+\ln(1+x)\geq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$ για κάθε $x>-1$.

Ε7. Να λύσετε την εξίσωση $x\ln(x+1)-x+\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$.

Πηγή:Στεργίου-Νάκης(εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$. Άρα $x\in(-1,+\infty)$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-1+\frac{1}{x+1}-x+\frac{x^2}{2}=\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1-x+\frac{x^2}{2}$$

$$=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2},x>-1.$$

Η f' παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{1-x-1+x^2+x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\geq 0 \text{ για κάθε } x\in(-1,+\infty).$$

Ε2. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 έχουμε πως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Ε3. Έχουμε $f'(0)=0$.

Ε4. Έχουμε $f'(0)=0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.
Επομένως για $x>0$ θα ισχύει $f'(x)>f'(0)=0$ και για $-1<x<0$ θα ισχύει $f'(x)<f'(0)=0$.

Ε5. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	-∞ -1	0	+∞
f΄(x)		- 0 +	
f(x)		↘ Ο.ε ↗	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$.

Ε6. Επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$ έχουμε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει:

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\geq \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}.$$

Ε7. Για $x>-1$ έχουμε $x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\Leftrightarrow$

$$x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\Leftrightarrow x=0$$

Η λύση $x=0$ είναι και μοναδική διότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ 25

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3e^{2\alpha x}+7$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει $f'(x)-f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε2. Να βρεθεί συναρτήσει του α, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

Ε3. Για $\alpha>0$ να βρείτε τα σημεία τομής A και B της εφαπτομένης ευθείας με τους άξονες συντεταγμένων.

Ε4. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB, που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες για $\alpha=\frac{1}{3}$.

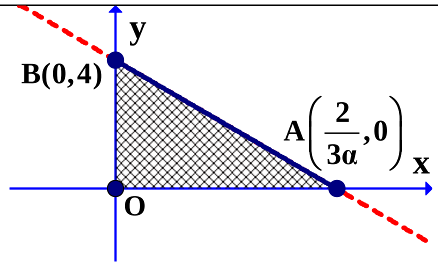
Λύση:

Ε1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-6\alpha e^{2\alpha x}$ και η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=-12\alpha^2e^{2\alpha x}$. Έχουμε

$$f'(x)-f''(x)=0\Leftrightarrow -6\alpha e^{2\alpha x}+12\alpha^2e^{2\alpha x}=0\Leftrightarrow -6\alpha+12\alpha^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6\alpha(1-2\alpha)=0$$ άρα $\alpha=0$ ή $\alpha=\frac{1}{2}$.

Ε2. Έχουμε $f(0)=-3e^0+7=4$ και $\lambda=f'(0)=-6\alpha e^0=-6\alpha$.
Έστω ότι η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow y=-6\alpha x+\beta$.
Αφού διέρχεται από το $(0,4)$ έχουμε $\beta=4$ άρα $(\varepsilon): y=-6\alpha x+4$.



Ε3. Με $y=0$ για τον άξονα $x'x: 0=-6\alpha x+4 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3\alpha}$, προκύπτει το σημείο $A\left(\dfrac{2}{3\alpha},0\right)$ και με $x=0$ αντίστοιχα για τον άξονα $y'y$ προκύπτει το σημείο $B(0,4)$.

Ε4. Το εμβαδόν του AOB είναι $E(\alpha)=\dfrac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{3\alpha}\right|4\overset{\alpha>0}{=}\dfrac{4}{3\alpha}$ με ρυθμό μεταβολής $E'(\alpha)=-\dfrac{4}{3\alpha^2}$ και για $\alpha=\dfrac{1}{3}$, $E'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{3\cdot\frac{1}{9}}=-12$.

ΘΕΜΑ 26

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3+\kappa t^2+\lambda t, t\in[0,10], \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ όπου το t μετριέται σε **sec** και το x σε μέτρα (m).

Ε1. Αν τη χρονική στιγμή $t=1sec$ η ταχύτητα είναι $u(1)=9m/s$ και η επιτάχυνση $\alpha(1)=-12m/s^2$, να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Για $\kappa=-9$ και $\lambda=24$ να βρείτε:

Ε2. Πότε το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι $9m/s$;

Ε3. Πότε το σημείο μένει ακίνητο;

Ε4. Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σημείο κινείται κατά τη θετική ή αρνητική κατεύθυνση.

Ε5. Ποίο το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησης του;

Ε6. Ποιά η μετατόπιση του από την αρχική θέση;

Πηγη: Μ.Τουμάσης- Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $u(t)=x'(t)=3t^2+2\kappa t+\lambda$, και $\alpha(t)=u'(t)=6t+2\kappa$. Ισχύει η σχέση $\alpha(1)=-12 \Leftrightarrow 6+2\kappa=-12 \Leftrightarrow \kappa=-9$. Επίσης,

$u(1)=9 \Leftrightarrow 3+2\kappa+\lambda=9 \overset{\kappa=-9}{\Leftrightarrow} -18+\lambda=6 \Leftrightarrow \lambda=24$. Και σύμφωνα με τις τιμές αυτές θα είναι $x(t)=t^3-9t^2+24t,\quad u(t)=3t^2+-18t+24,\quad \alpha(t)=6t-18$.

Ε2. Είναι $|u(t)|=9 \Leftrightarrow u(t)=\pm 9$.

Η εξίσωση $3t^2-18t+24=-9 \Leftrightarrow 3t^2-18t+33=0$ είναι αδύνατη γιατί έχει $\Delta<0$ και από $3t^2-18t+24=9 \Leftrightarrow 3t^2-18t+15=0 \Leftrightarrow t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow$ $t=1s$ ή $t=5s$.

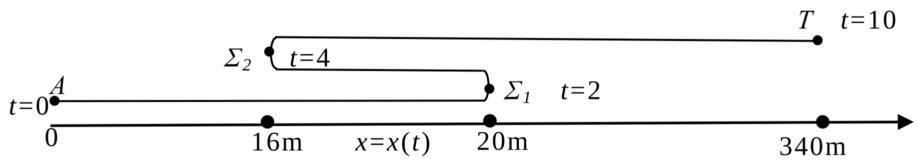
Ε3. Είναι ακίνητο για $\mathbf{u(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+24=0}$ άρα $\mathbf{t=2s}$ ή $\mathbf{t=4s}$.

Ε4. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

t	0		2		4		10
$u(t)=3t^2-18t+24$		+	0	-	0	+	
Κατεύθυνση		Δεξιά		Αριστερα		Δεξία	

Άρα κινείται προς τα δεξιά για $\mathbf{t\in[0,2)\cup(4,10]}$ και αριστερά για $\mathbf{t\in(2,4)}$.

Ε5. Η αλλαγή στη φορά της κίνησης γίνεται τις χρονικές στιγμές $\mathbf{2s}$ και $\mathbf{4s}$.
Είναι $\mathbf{x(0)=0, x(2)=20, x(4)=16, x(10)=340}$.



Επομένως στο $[0,2]$: $\mathbf{S_{ολ}=A\Sigma_1+\Sigma_1\Sigma_2+\Sigma_2T=20+4+324=348m}$

Ε6. Η τελική μετατόπιση είναι $\mathbf{x(10)=340m}$.

ΘΕΜΑ 27

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{g}$ στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{\lim_{x\to 0} g(x)=2}$ και η συνάρτηση

$\mathbf{f(x)=e^{x^{g(0)}}}$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f'(x)=2xf(x)}$ και $\mathbf{f''(x)=2f(x)(2x^2+1)}$.

Ε2. **α.** Να δείξετε ότι $\mathbf{\lim_{x\to g(0)} \dfrac{\ln f(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{x-g(0)}=2}$.

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

1. $\mathbf{\lim_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g^2(x)}\right|}$ **2.** $\mathbf{\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x-\frac{1}{2}}}$

3. $\mathbf{\lim_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{\dfrac{f''(x)}{f(x)}-11}{2x-3}}$ **4.** $\mathbf{\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt{f(x)}-1}}$

Ε3. Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $\mathbf{(x_0,f(x_0))}$ είναι της μορφής $\mathbf{y=2x_0e^{x_0^2}x+e^{x_0^2}-2x_0^2e^{x_0^2}}$. Σε ποια σημεία οι εφαπτομένες αυτές διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

Ε4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $\mathbf{f}$ και να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της αυξάνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Συνεπώς $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 2$. Τότε $f(x) = e^{x^{g(0)}} = e^{x^2}$. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x)$ και

$$f''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) = 2f(x) + 2x(2xf(x)) = 2f(x) + 4x^2f(x) = 2f(x)(2x^2+1)$$

Ε2. **α.** $$\lim_{x\to g(0)} \frac{\ln f(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}}{x - g(0)} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln e^{x^2} - \frac{2xf(x)}{f(x)}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2.$$

β.1. Επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{g^2(x)} \underset{\text{Αφού η g συνεχής}}{\overset{\text{Αφού η f συνεχής}}{=}} \frac{f(0) - g(0)}{g^2(0)} = \frac{e^0 - 2}{2^2} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x) - g(x)}{g^2(x)} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

β.2. Είναι

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f'(x)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 2xf(x)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{-2f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \left(-2e^{x^2}\right) = -2e^{\frac{1}{4}}.$$

β.3. Είναι

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{\frac{f''(x)}{f(x)} - 11}{2x-3} = \lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{\frac{2f(x)(2x^2+1)}{f(x)} - 11}{2x-3} = \lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{4x^2 - 9}{2x-3} = \lim_{x\to \frac{2}{3}} (2x+3) = \frac{13}{3}.$$

β.4. Είναι $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{f(x)} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{f(x)} + 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{e^{x^2}} + 1\right) = 2.$$

Ε3. Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$
$$y - e^{x_0^2} = 2x_0e^{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow$$
$$y = e^{x_0^2} \cdot 2x_0 \cdot x + e^{x_0^2} - e^{x_0^2} \cdot 2x_0$$

Θέλουμε

$$O(0,0)\in(\varepsilon_f)\Leftrightarrow 0=e^{x_o^2}2x_o\cdot 0+e^{x_o^2}-e^{x_o^2}2x_o^2\Leftrightarrow e^{x_o^2}\left(1-2x_o^2\right)=0\Leftrightarrow x_o=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ και

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$.

$2^{ος}$ Τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_o,f(x_o))$ έχει εξίσωση $y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda=f'(x_0)=2x_0e^{x_0^2}$ και το $(x_o,f(x_o))$ σημείο της άρα θα ισχύει $f(x_0)=\lambda x_0+\kappa$ οπότε $\kappa=f(x_0)-\lambda x_0=e^{x_0^2}-2x_0^2e^{x_0^2}$ και θέλουμε το $O(0,0)$ να ανήκει σε αυτή οπότε θα ισχύει $0=\lambda 0+\kappa\Leftrightarrow 0=\kappa$ επομένως $e^{x_o^2}\left(1-2x_o^2\right)=0\Leftrightarrow x_o=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ και

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$.

Ε4. Έχουμε βρει $f'(x)=2xf(x)=2xe^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Τέλος παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή $f(0)=1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^{x^2}	+	|	+
$2x$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.ε	↗

Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f' και αυξάνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $f''(x)=2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 28

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{\alpha x}+x+\alpha, x\in\mathbb{R}, \alpha>0$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y=(2\alpha+1)x+\alpha+2$.

Ε2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha>0$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες γίνεται ελάχιστο.

Για $\alpha=1$

Ε3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

Ε4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f''(x)-2}{\sqrt{\ln\dfrac{f'(x)-1}{2}}-1}$.

Ε5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f'(x)-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.

Ε6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

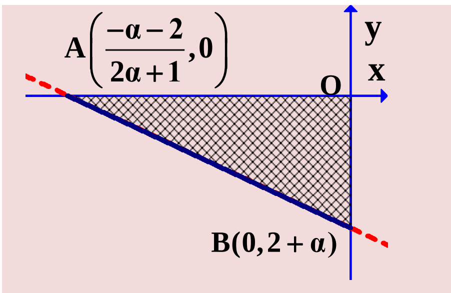
Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(0)=2+\alpha$ άρα η C_f τέμνει τον στο $B(0,2+\alpha)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\alpha e^{\alpha x}+1$.Οπότε $f'(0)=2\alpha+1$.

Αν η εφαπτομένη είναι η $y=(2\alpha+1)x+\beta$, διέρχεται από το B άρα $\beta=\alpha+2$.

Τελικά έχουμε, $y=(2\alpha+1)x+\alpha+2$.

Ε2.



Για τον $xx':0=(2\alpha+1)x+\alpha+2 \Leftrightarrow x \overset{\alpha>0}{=} \dfrac{-\alpha-2}{2\alpha+1}$.

Το εμβαδόν είναι

$$E(\alpha)=\frac{1}{2}|OB|\cdot|OA|=\frac{1}{2}|\alpha+2|\cdot\left|\frac{-\alpha-2}{2\alpha+1}\right| \overset{\alpha>0}{=} \frac{(\alpha+2)^2}{2(2\alpha+1)}.$$

Άρα, $E'(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+\alpha-2}{(2\alpha+1)^2}$. Η παράγωγος έχει ρίζες $-2,1$ και αφού $\alpha>0$ έχουμε ότι $\alpha=1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\mathbf{E}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Τέλος η $\mathbf{E}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha=1$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$\alpha^2+\alpha-2$		+	0	-	‖	-	0	+	
$(2\alpha+1)^2$		+		+	‖	+		+	
$E'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$E(x)$					‖	↘	Ο.ε	↗	

Ε3. Είναι $f(x)=2e^x+x+1,\ f'(x)=2e^x+1>0$ άρα η κλίση της C_f σε κάθε σημείο της είναι θετική, άρα η γωνία της εφαπτομένης με τον $x'x$ είναι οξεία.

Ε4. Είναι $f''(x)=2e^x$. Με αντικατάσταση, το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{2e^x+x+1-2e^x-2}{\sqrt{\ln\frac{2e^x}{2}-1}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2.$$

Ε5. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2e^x+x+1-2e^x-1-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{3x^2-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{3(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2}{3(x+1)}=\frac{\sqrt{3+1}+2}{3(1+1)}=\frac{2}{3}.$$

Ε6. Είναι $f(x)=2e^x+x+1,\ f'(x)=2e^x+1.$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι.

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

Αφού διέρχεται από το $A(0,1)$ προκύπτει

$$1-f(x_o)=f'(x_o)(-x_o)\Leftrightarrow$$
$$1-2e^{x_0}-x_0-1=-(2e^{x_0}+1)x_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2e^{x_0}+x_0=2x_0e^{x_0}+x_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2e^{x_0}=2x_0e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=1$$

Με αντικατάσταση, προκύπτει $(\epsilon): y=(2e+1)x+1$.

2ος Τρόπος

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη είναι

$(\epsilon): y=f'(x_0)x+\beta \Leftrightarrow y=(2e^{x_0}+1)x+\beta$.

Αφού διέρχεται από το $A(0,1)$ προκύπτει $\beta=1$ άρα $(\epsilon): y=(2e^{x_0}+1)x+1$.

Το M είναι σημείο της, άρα για $x=x_0, y=f(x_0)$ είναι

$$2e^{x_0}+x_0+1=(2e^{x_0}+1)x_0+1\Leftrightarrow 2e^{x_0}+x_0+1=2x_0e^{x_0}+x_0+1\Leftrightarrow 2e^{x_0}=2x_0e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=1$$

Με αντικατάσταση, προκύπτει $(\epsilon): y=(2e+1)x+1$.

ΘΕΜΑ 29 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=9x-x^2, x\in R$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}, & x>9\\[2ex] \kappa\cdot\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^3-3t^2+2t}{t^2-1}, & x=9\end{cases}$$

Ε1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}$.

Ε2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=9$.

Ε3. Με διαστάσεις x και $f(x)$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

Ε4. Να βρεθεί για ποιά τιμή του x η περίμετρος γίνεται μέγιστη.

Ε5. Να βρεθεί για ποιά τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Λύση:

Ε1. Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=9-2x$. Τότε

$$\lim_{x\to9}\frac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}=\lim_{x\to9}\frac{9x-x^2}{\sqrt{2x-9}-3}=\lim_{x\to9}\frac{x(9-x)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-9}-3\right)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-x(x-9)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}{2(x-9)}=-27.$$

Ε2. Η g συνεχής στο $x_0=9$, οπότε

$$\lim_{x\to9}g(x)=g(9)\Leftrightarrow-27=k\cdot\lim_{t\to1}\frac{t\left(t^2-3t+2\right)}{t^2-1}\Leftrightarrow-27=k\cdot\lim_{t\to1}\frac{t(t-1)(t-2)}{(t-1)(t+1)}$$

$$\Leftrightarrow k=54.$$

Ε3. Για να είναι τα $x, f(x)$ διαστάσεις ορθογωνίου πρέπει $x>0$ και $f(x)>0$.

x	-∞	0		9	+∞
$9x-x^2$	-	0	+	0	-

Λύνουμε την $9x-x^2>0$. Δηλαδή $x\in(0,9)$.

- Έχουμε για την περίμετρο

$$\Pi(x)=x+x+f(x)+f(x)=2x+2f(x)=2x+2(9x-x^2)$$
$$\Leftrightarrow \Pi(x)=-2x^2+20x\,,x\in(0,9).$$

- και το εμβαδόν

$$E(x)=xf(x)=x(9x-x^2)\Leftrightarrow E(x)=-x^3+9x^2\,,x\in(0,9).$$

Ε4. Η συνάρτηση $\Pi(x)=-2x^2+20x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,9)$ με $\Pi'(x)=-4x+20$. Η $\Pi'(x)$ μηδενίζεται για $x=5$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της Π' και μεταβολών της Π.

x	0	5	9
$\Pi'(x)=-4x+20$	+	0	-
$\Pi(x)$	↗	Ο.μ	↘

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\Pi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5,9)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=5$ το $\Pi(5)=50$.

Ε5. Η συνάρτηση $E(x)=-x^3+9x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,9)$ με $E'(x)=-3x^2+18x$. Η $E'(x)$ μηδενίζεται για $x=6$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

x	0	6	9
$E'(x)=-3x^2+18x$	+	0	-
$E(x)$	↗	Ο.μ	↘

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[6,9)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=6$ το $E(6)=108$.

ΘΕΜΑ 30 — Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\kappa x$, $\kappa\in[0,e]$.

Ε1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Ε2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Ε2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^x-\kappa$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **1η περίπτωση**: Για $\kappa = 0$ έχουμε $f'(x) = e^x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Οπότε δεν έχει ακρότατα.
- **2η περίπτωση:** Για $\kappa \in (0, e]$ έχουμε $f'(x) = e^x - \kappa$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \kappa = 0 \Leftrightarrow e^x = \kappa \Leftrightarrow x = \ln\kappa$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$ $\ln k$ $+\infty$
$f'(x) = e^x - \kappa$	- 0 +
$f(x)$	↘ Ο.ε ↗

Δικαιολόγηση προσήμου

Έστω $e^x - \kappa > 0 \Leftrightarrow e^x > \kappa \Leftrightarrow x > \ln\kappa$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln\kappa]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln\kappa, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = \ln\kappa$ με τιμή

$f(\ln\kappa) = e^{\ln\kappa} - \kappa\ln\kappa = \kappa - \kappa\ln\kappa = \kappa(1 - \ln\kappa)$.

Ε3.

- **1η περίπτωση:** Για $\kappa = 0$ έχουμε $f(x) = e^x > 0$.
- **2η περίπτωση:** Για $\kappa \in (0, e]$ έχουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο στη θέση $x = \ln\kappa$ με τιμή

$f(\ln\kappa) = e^{\ln\kappa} - \kappa\ln\kappa = \kappa - \kappa\ln\kappa = \kappa(1 - \ln\kappa) \geq 0$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $f(x) \geq 0$.

Στατιστική

Συλλογή 30 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 9/12/2011 – 20/12/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Στατιστική :–Μια συλλογή 30 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21166

Έλυσαν οι:

Αποστόλης Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Κατσίποδας
Ηλίας Καμπελής
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Τσιφάκης
Χρήστος Κανάβης

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 31 — Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω $\mathbf{CV^2 = 0{,}04}$ και $\mathbf{s = 0{,}2}$,όπου **CV** ο συντελεστής μεταβολής και **s** η τυπική απόκλιση ενός δείγματος που έχει την ίδια μέση τιμή με το δείγμα **Α,** με παρατηρήσεις τις $\mathbf{1, 3, -2, \alpha, -1}$, με $\mathbf{\alpha \in Z}$.

Ε1. Αν η διάμεσος $\mathbf{\delta}$ του δείγματος **Α** είναι αρνητική, να βρεθεί το εύρος **R** του δείγματος.

Ε2. **α.** Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα **Α** προσθέτοντας σε κάθε παρατήρηση τον αριθμό $\mathbf{\bar{x}}$ και ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα πολλαπλασιάζοντας κάθε παρατήρηση με τον αριθμό $\mathbf{\bar{x}}$, όπου $\mathbf{\bar{x}}$ η μέση τιμή του αρχικού δείγματος για την περίπτωση που $\mathbf{\bar{x} < 0}$.

β. Ποιό από τα δύο αυτά δείγματα είναι περισσότερο ομοιογενές;

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Έχουμε $\mathbf{CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow CV^2 = \dfrac{s^2}{(\bar{x})^2} \Leftrightarrow 0{,}04 = \dfrac{0{,}2^2}{(\bar{x})^2} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 1 \Rightarrow \bar{x} = \pm 1.}$

Ε1. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος περιττού πλήθους παρατηρήσεων, διαταγμένες σε αύξουσα σειρά, ισούται με την μεσαία παρατήρηση. Στην άσκησή μας, επειδή έχουμε ότι η διάμεσος είναι αρνητικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

1η περίπτωση:

Αν $\mathbf{\bar{x} = 1}$, τότε $\mathbf{\bar{x} = \dfrac{-1+3-2+\alpha+1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{1+\alpha}{5} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{1+\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 4}$, **άτοπο,** διότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

2η περίπτωση:

Αν $\mathbf{\bar{x} = -1}$ τότε $\mathbf{\bar{x} = \dfrac{-1+3-2+\alpha+1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{1+\alpha}{5} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{1+\alpha = -5 \Leftrightarrow \alpha = -6}$, **δεκτή,** διότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

Επομένως $\mathbf{\alpha = -6}$ και τότε το εύρος είναι $\mathbf{R = 3-(-6) = 9}$.

Ε2. **α.** Γνωρίζουμε ότι αν σε όλες τις παρατηρήσεις προσθέσουμε μια σταθερά, η νέα μέση τιμή είναι η προηγούμενη προσαυξημένη κατά την σταθερά, ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια. (Εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99).

Οπότε $\mathbf{\bar{y} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x} = -2}$ και $\mathbf{s_\psi = s_x = 0{,}2}$.

Επομένως $\mathbf{CV_y = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{s_x}{|2\bar{x}|} = \dfrac{1}{2}s_x = 0{,}1}$.

Ακόμα, αν όλες οι παρατηρήσεις πολλαπλασιαστούν με μια σταθερά, η νέα μέση τιμή είναι η προηγούμενη πολλαπλασιασμένη με τη σταθερά, ενώ η νέα τυπική απόκλιση είναι η προηγούμενη πολλαπλασιασμένη με την απόλυτη τιμή της σταθεράς. (Εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99).

Οπότε και $s_z = |\bar{x}| s_x = s_x = 0,2$.

Τότε $CV_z = \frac{s_z}{|\bar{z}|} = \frac{s_x}{(\bar{x})^2} = s_x = 0,2$. $\bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{x} = (\bar{x})^2 = 1$

β. Επειδή $CV_y < CV_z$,έχουμε ότι το δείγμα που προκύπτει από το αρχικό δείγμα προσθέτοντας σε κάθε παρατήρηση τον αριθμό $\bar{x}$ είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε παρατήρηση με τον αριθμό $\bar{x}$.

ΘΕΜΑ 32

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Στον διπλανό ελλιπή πίνακα, παρουσιάζεται η κατανομή συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών κ.τ.λ) των τιμών της θερμοκρασίας σε C^o , ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους, που σημειώθηκαν κατά την χειμερινή περίοδο σε **ν** το πλήθος ημέρες στην πόλη της Αθήνας . Να βρείτε:

I	Θερμοκρασία σε C^o	v_i	f_i	$F_i\%$
1	$[...,4)$	v_1		
2	$[...,...)$	v_2	25	
3	$[...,...)$	$4v_1$		75
4	$[...,...)$	v_4		90
5	$[...,20)$	v_1		
Σύνολα		4V	100	

Ε1. Τα άκρα των κλάσεων.

Ε2. Τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$ καθώς και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$.

Ε3. Αν $v_1 = f(x_0)$, όπου x_0 η θέση του ολικού μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 8x - 4, x \in R$ τότε να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των (απόλυτων) συχνοτήτων.

Ε4. Για την τιμή v_1 που βρήκατε, αν θεωρήσετε ότι οι τιμές της θερμοκρασίας κατανέμονται ομοιόμορφα, να υπολογίσετε:
α. Το πλήθος των ημερών της χειμερινής περιόδου που σημειώθηκαν θερμοκρασίες από 9^0C έως 12^0C.
β. Το ποσοστό των ημερών της χειμερινής περιόδου, που σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από 11^0C.

Λύση:

Ε1. Έστω το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης και **c** το πλάτος κάθε κλάσης, τότε έχουμε ότι οι κλάσεις είναι οι εξής:
$[\alpha,\alpha+c),[\alpha+c,\alpha+2c),[\alpha+2c,\alpha+3c),[\alpha+3c,\alpha+4c),[\alpha+4c,\alpha+5c)$

Οπότε $\begin{cases} \alpha+c=4 \\ \alpha+5c=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ c=4 \end{cases}$

Ε2. Από τον πίνακα έχουμε ότι $F_3 = 75\%$ και $F_4 = 90\%$,οπότε $f_4 = F_4 - F_3 = 15\%$. Επίσης $F_5 = 100\%$, οπότε $f_5 = F_5 - F_4 = 10\%$.

Έχουμε ότι $\mathbf{v_1 = v_5}$ άρα και $\mathbf{f_1 = f_5 = 10\%}$. Επειδή $\mathbf{f_2 = 25\%}$, έχουμε $\mathbf{F_2 = 35\%}$ και $\mathbf{F_3 = f_1 + f_2 = 35\%}$. Τέλος, $\mathbf{f_3 = F_3 - F_2 = 40\%}$.

Ε3. $\mathbf{f(x) = -2x^2 + 8x - 4, x \in R}$. Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f'(x) = -4x + 8, x \in R}$.

Έχουμε $\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2}$ και $\mathbf{f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 2}$.

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	Ο.Μ	↘

Έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(-\infty, 2]}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[2, +\infty)}$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\mathbf{x_0 = 2}$ με τιμή $\mathbf{f(2) = 4}$.

Έχουμε $\mathbf{v_1 = f(2) = 4}$ και

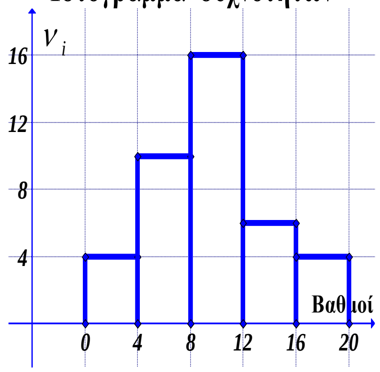
$$f_1 = \frac{v_1}{4v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{4}{4v} \Leftrightarrow v = 10.$$

Έτσι έχουμε

$$f_2 = \frac{v_2}{4v} \Leftrightarrow 0,25 = \frac{v_2}{40} \Leftrightarrow v_2 = 10$$, έτσι συμπληρώνουμε το διπλανό πίνακα.

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι το

Ιστόγραμμα συχνοτήτων



I	Θερμοκρασία σε C°	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[0 – 4)	4	10	10
2	[4 – 8)	10	25	35
3	[8 – 12)	16	40	75
4	[12 – 16)	6	15	90
5	[16– 20)	4	10	100
Σύνολα		40	100	

Ε4. **α.** Θεωρώντας ότι οι τιμές των θερμοκρασιών κατανέμονται ομοιόμορφα, έχουμε ότι στο διάστημα βρίσκονται **16** παρατηρήσεις, οπότε στο διάστημα θα βρίσκονται **12** παρατηρήσεις.

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{\mathbf{ABE}} \simeq \overset{\Delta}{\mathbf{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

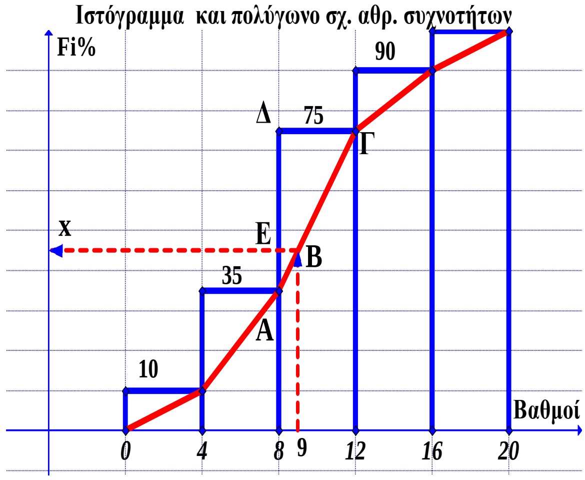
$$\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{9-8}{12-8} = \frac{x-35}{75-35} \Leftrightarrow$$

$$40 = 4x - 140 \Leftrightarrow 4x = 180 \Leftrightarrow x = 45\%.$$

Επομένως στο διάστημα $\mathbf{[9,12)}$ βρίσκονται

$$\frac{75-45}{100}40 = \frac{30}{10}4 = 12$$ παρατηρήσεις.

Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχ. αθρ. συχνοτήτων



β. Το ποσοστό των ημερών που έχουν θερμοκρασία $[8,12)$ είναι 40%. Οπότε το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι $[11,12)$ είναι 10%.
Επομένως το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι πάνω από 11^0C είναι $10\%+15\%+10\%=35\%$.

Β΄ τρόπος:

$(75-65)\%=10\%.$.

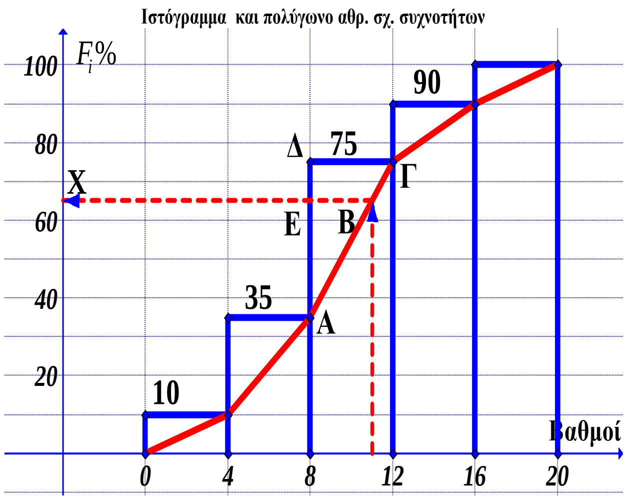
Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων

$\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma}=\frac{EA}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{11-8}{12-8}=\frac{x-35}{75-35} \Leftrightarrow$$

$$120=4x-140 \Leftrightarrow 4x=260 \Leftrightarrow x=65\%.$$

Συνεπώς στο διάστημα $[9,12)$ βρίσκεται το $(75-65)\%=10\%$



Επομένως το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι πάνω από 11^0C είναι $10\%+15\%+10\%=35\%.$

ΘΕΜΑ 33

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\cdot s\cdot x^2-2\cdot\bar{x}\cdot x+13, x\in R$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2009$, τότε:

Ε1. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Ε2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Ε3. Αν η f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:
α. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
β. Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια;
γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=8sx-2\bar{x}$. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2009$, δηλαδή είναι παράλληλη στον

$x'x$, οπότε $f'(1)=0 \Leftrightarrow 8s-2\bar{x}=0 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{8} \Leftrightarrow CV=0,25>0,10.$

Συνεπώς, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε2. Ισχύει $\bar{x}=4s$ άρα $A.\ f(x)=4sx^2-8sx+13$ και $f'(x)=8sx-8s$.
Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 8sx-8s=0 \Leftrightarrow x=1$.
Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ Ο.Ε ↗

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με τιμή $f(1)$.

Ε3. **α.** Είναι $f(1)=1 \Leftrightarrow 4s-8s+13=1 \Leftrightarrow s=3$ και $\bar{x}=4s=12$.
β. Έστω $c>0$ η αύξηση. Τότε η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y}=\bar{x}+c=12+c$ και η νέα τυπική απόκλιση είναι $s_y=s=3$.
Το δείγμα είναι ομοιογενές, άρα

$$CV_y \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{3}{12+c} \le 0{,}1 \Leftrightarrow 3 \le 1{,}2+0{,}1c \Leftrightarrow c \ge 18 .$$

Το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια, είναι 18 μονάδες.
γ. Η εφαπτομένη στο A είναι παράλληλη στον $x'x$ και διέρχεται από το $A(1,1)$, άρα είναι η $(\varepsilon): y=1$.

ΘΕΜΑ 34

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3\alpha}{2}x^2+2\alpha^2x+3\alpha, x\in R, \alpha>0$.

x_1,x_2 Αν οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία x_1,x_2 είναι παράλληλες στον $x'x$, τότε : CV'

Ε1. Να βρείτε τα x_1,x_2.

Ε2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των αριθμών και $f''(x_2)$.

Ε3. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των $f(0), f''(x_1)$ και $f''(x_2)$ και ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από αυτούς τους όρους κατά 2, να βρείτε την τιμή του $\alpha>0$ ώστε $3CV'=CV$ καθώς και για την τιμή του α που βρήκατε να κρίνετε ποιό δείγμα είναι πιο ομοιογενές.

Πηγή: Δημήτρης Γεωργακίλας (εκδόσεις Τομή)

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=x^2-3\alpha x+2\alpha^2$.
Για να είναι οι εφαπτόμενες παράλληλες στον $x'x$ πρέπει:
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0 \Leftrightarrow (x-2\alpha)(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow x=2\alpha$ ή $x=\alpha$.
Έτσι $x_1=2\alpha$ και $x_2=\alpha$.

Ε2. Έχουμε ότι $f(0)=3\alpha$.
Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x)=2x-3\alpha$, οπότε: $f''(x_1)=f''(2\alpha)=\alpha$ και $f''(x_2)=f''(\alpha)=-\alpha$.

Η μέση τιμή τους είναι: $\bar{x} = \dfrac{3\alpha + \alpha - \alpha}{3} = \alpha.$

Ε3. Αν s είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $f(0), f''(x_1)$ και $f''(x_2)$, τότε η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων είναι $\bar{x}' = \bar{x} + 2 = \alpha + 2$ και η τυπική απόκλιση τους $s' = s$.

$$3CV' = CV \Leftrightarrow 3\frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{3s}{\alpha+2} = \frac{s}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Για $\alpha = 1$ έχουμε $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = s$ και $CV' = \dfrac{s'}{\bar{x}'} = \dfrac{s}{1+2} = \dfrac{s}{3}$.

Έτσι έχουμε ότι $CV' < CV$, οπότε το δεύτερο δείγμα είναι πιο ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 35

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ο βαθμός πρόσβασης του απολυτηρίου **50** μαθητών της Γ΄ Λυκείου αναγράφεται στο διπλανό ελλιπή πίνακα. Αν είναι γνωστό ότι στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο που αντιστοιχεί στην τρίτη κλάση είναι 144^o και $v_2 = 4v_5$, τότε:

I	Κλάσεις	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[10,...)	5		
2	[...,...)			
3	[...,...)			
4	[...,...)		20	
5	[...,20)			
Σύνολα		50		

Ε1. Να βρείτε το πλάτος κάθε κλάσης.

Ε2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Ε3. Να βρείτε τη διάμεσο.

Ε4. Αν από τους παραπάνω μαθητές, οι ανώτατες σχολές πάρουν μόνο το 36%, να βρείτε τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $R = 20 - 10 = 10$ και $c = \dfrac{R}{k} = \dfrac{10}{5} = 2.$

Ε2.

Είναι

$\alpha_3 = 144^o \Leftrightarrow 360^o \cdot f_3 = 144^o \Leftrightarrow f_3 = 0,4$

άρα $v_3 = 50 \cdot f_3 = 20.$

Επίσης, $f_4\% = 20 \Rightarrow f_4 = 0,2 \Rightarrow v_4 = 10.$

Τέλος, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow$

$5 + 4v_5 + 2 + 10 + v_5 = 50 \Leftrightarrow v_5 = 3.$

Επομένως $v_2 = 4v_5 = 12$. Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες ισχύει

$F_1\% = f_1\%, F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%, i = 2,...,5$.

Οπότε

$F_1 = 0,1, F_2 = 0,34, F_3 = 0,74, F_4 = 0,94,$

$F_5 = 1$. Έτσι σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

I	Κλάσεις	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[10, 12)	5	10	10
2	[12 ,14)	12	24	34
3	[14 , 16)	20	40	74
4	[16 , 18)	10	20	94
5	[18 , 20)	3	6	100
Σύνολα		50	10	

Ε3. Ψάχνουμε το βαθμό κάτω από τον οποίο έχει γράψει το 50% των μαθητών. Αφού $50\% = f_1\% + f_2\% + 16\%$, χρειαζόμαστε ένα διάστημα από την κλάση $[14,16)$ ίσο με τα $\frac{16}{f_3\%} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ αυτής. Άρα, $\delta = 14 + \frac{2}{5}(16-14) = 14,8.$

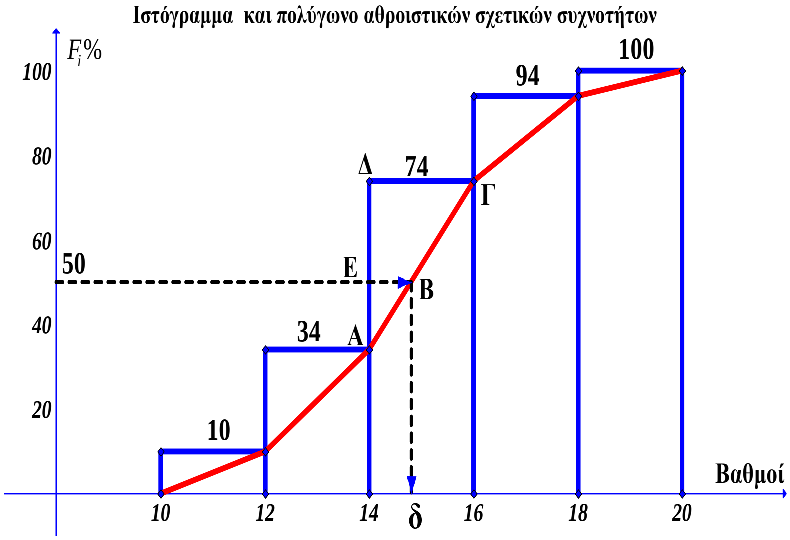
Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\delta-14}{16-14} = \frac{50-34}{74-34} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta-14}{2} = \frac{16}{30} \Leftrightarrow \delta - 14 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = 14 + \frac{4}{5}$$



Ε4. Έχουμε $36\% = f_5\% + f_4\% + 10\%$, άρα χρειαζόμαστε ένα διάστημα από την κλάση $[14,16)$ ίσο με τα $\frac{10}{f_3\%} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ αυτής. Άρα στο διάστημα $[15.5,16)$ βρίσκεται το 10% των παρατηρήσεων της κλάσης $[14,16)$. Τελικά, ο βαθμός που πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί είναι τουλάχιστον $15,5$.

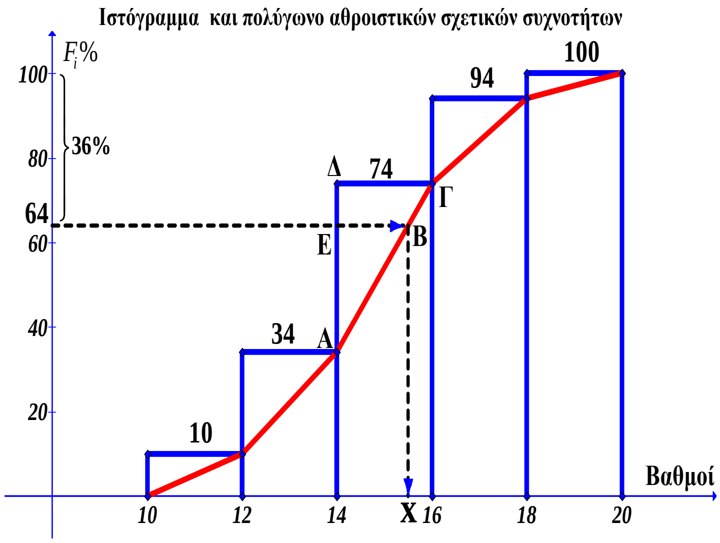
Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{x-14}{16-14} = \frac{64-34}{74-34} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-14}{2} = \frac{30}{40} \Leftrightarrow x - 14 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 14 + \frac{6}{4}$$



Επομένως ο βαθμός που πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί είναι τουλάχιστον $15,5$.

ΘΕΜΑ 36

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\bar{x}}{3}\cdot x^3-12\cdot s\cdot x^2+\bar{x}\cdot x+s$, $x\in R$ και $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος 2ν θετικών παρατηρήσεων με $\nu\in N^*$.

Ε1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν παρουσιάζει ακρότατα, να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Ε2. Αν η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,5)$ της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

Ε3. Αν $\bar{x}=12$ και $s=1$ τότε:

α. Να βρεθεί μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, x_3^2, ..., x_{2\nu}^2$, όπου $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2\nu}$ οι παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος.

β. Αν στις μισές παρατηρήσεις προσθέσουμε το 4, να βρεθεί η μέση τιμή του νέου δείγματος.

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\bar{x}x^2-24sx+\bar{x}$.

Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα πρέπει

$\Delta\le 0\Rightarrow 576s^2-4\bar{x}^2\le 0\Rightarrow \frac{s}{\bar{x}}\le\frac{1}{12}<\frac{1}{10}\Rightarrow CV<\frac{1}{10}$, έτσι το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε2. Έχουμε $f(1)=5$ άρα $\frac{\bar{x}}{3}-12s+\bar{x}+s=5\Rightarrow 4\bar{x}-33s=15.\ (1)$

Ακόμη πρέπει $f'(1)=0\Rightarrow \bar{x}-12s=0.\ (2)$

Λύνουμε το σύστημα των $(1),(2)$

$$\begin{cases}4\bar{x}-33s=15\\ \bar{x}-12s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\bar{x}-33s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}48s-33s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\ \bar{x}=12\end{cases}$$

Οπότε $\bar{x}=12$ και $s=1$.

Ε3. **α.** Είναι,

$$s^2=\frac{1}{2\nu}\left[\sum_{i=1}^{2\nu}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{2\nu}x_i)^2}{2\nu}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{2\nu}x_i^2}{2\nu}-(\bar{x})^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2\Rightarrow 1+12^2=\overline{x^2}\Rightarrow\overline{x^2}=145.$$

β. Για τις ν παρατηρήσεις είναι $x_{i'} = x_i + 4$, άρα έχουμε

$$(\bar{x})' = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_{i'} + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i+4) + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i + \sum_{i=1}^{\nu} 4}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{2\nu} x_i + 4\nu}{2\nu} \Rightarrow$$

$$(\bar{x})' = \frac{\sum_{i=1}^{2\nu} x_i}{2\nu} + \frac{4\nu}{2\nu} = \bar{x} + 2 = 12 + 2 = 14.$$

ΘΕΜΑ 37 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Οι δείκτες νοημοσύνης των μαθητών ενός λυκείου ακολουθούν την κανονική κατανομή ή περίπου την κανονική κατανομή. Ο ελάχιστος δείκτης του **16%** των «εξυπνότερων μαθητών» είναι **108** και ο μέγιστος δείκτης του **16%** των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι **84**.

Ε1. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

Ε2. Να βρείτε το εύρος και την διάμεσο του δείγματος.

Ε3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον **132**.

Ε4. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και αν όχι, να βρεθεί η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή του c κατά την οποία πρέπει να αυξηθεί ο δείκτης νοημοσύνης κάθε μαθητή, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Ε5. Αν **163** μαθητές έχουν δείκτη μεταξύ **72** και **108**, να βρεθεί πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση:

Ε1. Επειδή ο μέγιστος δείκτης του **16%** των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι **84** έχουμε ότι $\bar{x} - s = 84$,**(1)**. Επειδή ο ελάχιστος δείκτης του **16%** των «εξυπνότερων μαθητών» είναι **108**, έχουμε ότι $\bar{x} + s = 108$,**(2)**.

Λύνουμε το σύστημα των **(1)** και **(2)** και έχουμε ότι

$$\begin{cases} \bar{x} - s = 84 \\ \bar{x} + s = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\bar{x} = 192 \\ \bar{x} + s = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 96 \\ s = 12 \end{cases}$$

Συνεπώς, $\bar{x} = 96$ και $s = 12$.

Ε2. Επειδή η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική, γνωρίζουμε ότι το εύρος είναι $R \cong 6s = 72$ και η διάμεσος δ είναι $\delta = \bar{x} = 96$.

Ε3. Το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον **132**, δηλαδή πάνω από $\bar{x} + 3s = 96 + 36 = 132$, όπως φαίνεται από την καμπύλη συχνοτήτων είναι **0,15%**.

Ε4. Έχουμε,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10},$$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν ο δείκτης νοημοσύνης αυξηθεί κατά $\mathbf{c}$ τότε η νέα μέση τιμή είναι $\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = 96 + \mathbf{c}$ και η νέα τυπική απόκλιση $\mathbf{s_1 = s = 12.}$

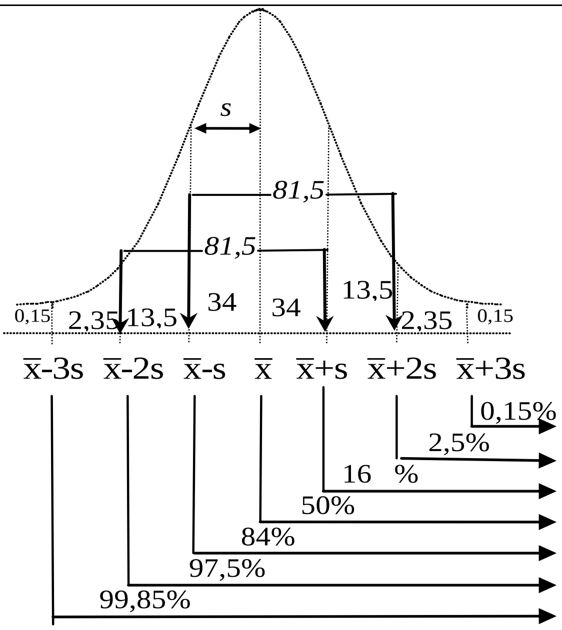
Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV_1 = \frac{s_1}{|\bar{x}_1|} = \frac{12}{96+c}.$$

Για να είναι ομοιογενές πρέπει

$$CV_1 \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{12}{96+c} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 96 + c \ge 120 \Leftrightarrow c \ge 24.$$



Άρα η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές είναι $\mathbf{c = 24.}$

Ε5. Το ποσοστό των μαθητών με δείκτη μεταξύ **72** και **108,** δηλαδή από $\bar{\mathbf{x}} - 2\mathbf{s} = 96 - 24 = 72$ έως $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{s} = 96 + 12 = 108$ είναι **81,5%.**

Έτσι έχουμε ότι $163 = \frac{81{,}5}{100} \cdot v \Leftrightarrow v = 200$ μαθητές.

ΘΕΜΑ 38

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Οι **10** μαθητές ενός τμήματος της Γ' λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών Γενικής, πήραν τις παρακάτω βαθμολογίες: **12,18,16,14,15,18,13,14,17,13.**

Ε1. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία και τη μεταβλητότητα των βαθμών.

Ε2. Εξετάστε αν τα γραπτά παρουσιάζουν ομοιογένεια στη βαθμολογία.

Ε3. Ο καθηγητής αποφάσισε να "βοηθήσει" τους μαθητές γι' αυτό σκέφτηκε τα εξής:

α. Να αυξήσει όλες τις βαθμολογίες κατά **2** μονάδες στο κάθε ένα γραπτό ή

β. Να αυξήσει τη βαθμολογία του κάθε γραπτού κατά **10%**

Πως θα επηρεάσουν τα πιο πάνω σκεπτικά **α** ή **β** τη μέση βαθμολογία;

Δίνεται $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05$

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\bar{x} = \frac{12+18+16+14+15+18+13+14+17+13}{10} = \frac{150}{10} = 15$ και

$$s^2 = \frac{(12-15)^2 + 2(13-15)^2 + 2(14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (17-15)^2 + 2(18-15)^2}{10}$$

$$s^2 = \frac{9+8+2+0+1+4+18}{10} = \frac{42}{10} = 4{,}2.$$

Οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4{,}2}}{15}.$

Ε2. Έστω $CV \le 0{,}1$. Τότε $CV = \dfrac{\sqrt{4{,}2}}{15} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \sqrt{4{,}2} \le 1{,}5 \Leftrightarrow 4{,}2 \le 2{,}25$. ΑΤΟΠΟ και συνεπώς $CV > 0{,}1$ που σημαίνει ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε3. **α.** Αν αυξήσει σε όλους τους μαθητές τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες, (εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99), έχουμε $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 15 + 2 = 17$ και $s_y = s_x = \sqrt{4{,}2}$. Οπότε $CV_y = \dfrac{s_y}{\bar{y}} = \dfrac{\sqrt{4{,}2}}{17} \approx 0{,}12$.

β. Αν αυξήσει τη βαθμολογία σε όλα τα γραπτά κατά 10% ,(εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99), θα έχουμε $\bar{z} = 1{,}1\bar{x} = 1{,}1 \cdot 15 = 16{,}5$ και $s_z = 1{,}1 s_x = 1{,}1\sqrt{4{,}2}$ οπότε $CV_z = \dfrac{s_z}{\bar{z}} = \dfrac{1{,}1\sqrt{4{,}2}}{1{,}1 \cdot 15} = CV_x$.

ΘΕΜΑ 39

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής X των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες Ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

$A(20,0), B(40,5), \Gamma(60,10), \Delta(80,20), E(100,30), Z(120,\nu_5), H(140,10), \Theta(160,0)$.

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $x = 100$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\nu_5 = 25$.

Ε2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής.

Ε3. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της κατανομής.

Ε4. Αν σαν «όριο φτώχιας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7.200 ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις $\%$ των φτωχών του δείγματος.

Λύση:

Ε1. Έστω α το άκρο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος κάθε κλάσης. Γνωρίζουμε ότι στο πολύγωνο συχνοτήτων θεωρούμε αριστερά και δεξιά δύο υποτιθέμενες κλάσεις με μηδενικές συχνότητες και συνδέουμε τα μέσα των άνω βάσεων του ορθογωνίου. Οπότε, η τετμημένη της πρώτης κλάσης είναι $\alpha - \dfrac{c}{2}$ και η τετμημένη της τελευταίας κλάσης είναι $\alpha + \dfrac{13c}{2}$. Επομένως έχουμε $\alpha - \dfrac{c}{2} = 20$ και $\alpha + \dfrac{13c}{2} = 160$.

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε $\begin{cases} \alpha + \dfrac{13c}{2} = 160 \\ \alpha - \dfrac{c}{2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 20 \\ \alpha = 30 \end{cases}$

Έτσι οι κλάσεις είναι $[30,50), [50,70), [70,90), [90,110), [110,130), [130,150)$.

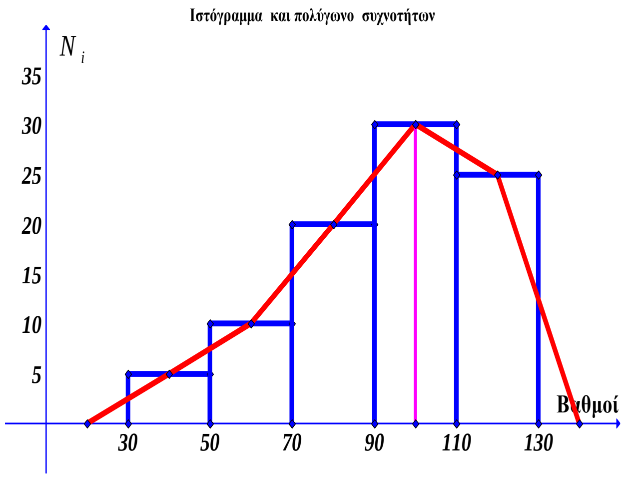
Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο συχνοτήτων, ισούται με το μέγεθος του δείγματος.

Έχουμε $\mathbf{v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 20, v_4 = 30, v_6 = 10}$.

Επειδή η $\mathbf{x = 100}$ χωρίζει το χωρίο σε δυο ισοδύναμα χωρία έχουμε ότι

$$\mathbf{v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_4}{2} = \frac{v_4}{2} + v_5 + v_6 \Leftrightarrow 5 + 10 + 20 = v_5 + 10 \Leftrightarrow v_5 = 25.}$$

Ε2. Έτσι σχηματίζεται το ακόλουθο πολύγωνο συχνοτήτων



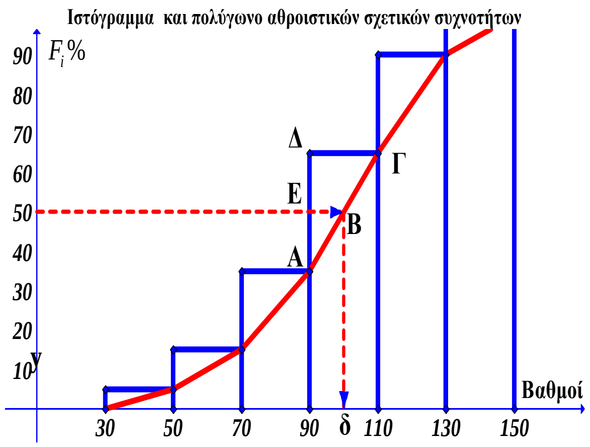
Ε3. Αφού η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $\mathbf{x = 100}$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία, έχουμε ότι η διάμεσος είναι το **100.**

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathbf{\overset{\Delta}{AB}E \simeq A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta}$ έχουμε

$$\mathbf{\frac{BE}{\Gamma\Delta} = \frac{EA}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{110 - 90} = \frac{50 - 35}{65 - 35} \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{20} = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \delta - 90 = 10 \Leftrightarrow \delta = 100}$$



Σχηματίζουμε τον πίνακα

I	**Κλάσεις**	**Κέντρο κλάσης**	$\mathbf{v_i}$	$\mathbf{F_i}$ **%**	$\mathbf{v_i x_i}$
1	**[30, 50)**	**40**	**5**	**5**	**200**
2	**[50 ,70)**	**60**	**10**	**15**	**600**
3	**[70 , 90)**	**80**	**20**	**35**	**1600**
4	**[90 , 110)**	**100**	**30**	**65**	**3000**
5	**[110 , 130)**	**120**	**25**	**90**	**3000**
6	**[130,150)**	**140**	**10**	**100**	**1400**
Σύνολα		**100**			**9800**

Οπότε $\mathbf{\bar{x} = \frac{9800}{100} = 98.}$

Ε4. Ψάχνουμε να βρούμε το ποσοστό των ατόμων, που παίρνουν κάτω από

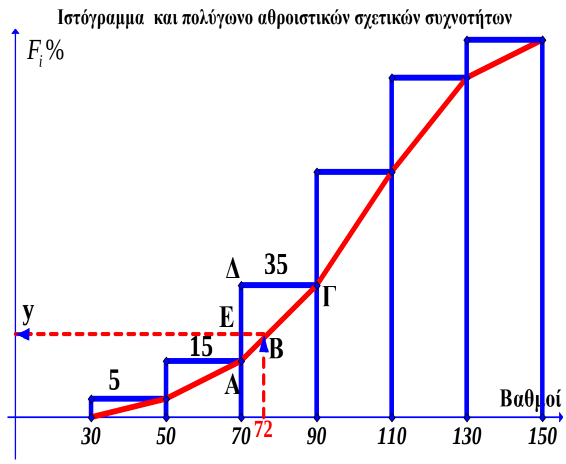
7.200€. Στο διάστημα $[70,90)$ βρίσκεται το 20% οπότε θεωρώντας ότι κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[70,72)$ θα βρίσκεται το 2%. Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι $5\%+10\%+2\%=17\%$.

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΕ}} \simeq \overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$ έχουμε

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΔΑ}} \Leftrightarrow \frac{72-70}{90-70}=\frac{y-15}{35-15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{20}=\frac{y-15}{20} \Leftrightarrow y=17$$



Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι **17%.**

ΘΕΜΑ 40 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Μελετούμε τους **80** μαθητές της Γ΄ τάξης ενός λυκείου ως προς το βάρος τους, έτσι

- Ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις σε τέσσερις ίσες κλάσεις.
- Η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης είναι **60** κιλά και το δεξιό άκρο της τρίτης κλάσης είναι **80** κιλά.
- Οι συχνότητες της πρώτης και της τέταρτης κλάσης είναι ίσες και έχουν άθροισμα την συχνότητα της τρίτης κλάσης.
- Η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι διπλάσια της συχνότητας της τρίτης κλάσης.

Ε1. Να βρείτε τις κλάσεις.

Ε2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Ε3. Να βρείτε την μέση τιμή.

Ε4. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Ε5. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Ε6. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον **72.**

Ε7. Αν κατά την διάρκεια των χριστουγεννιάτικων διακοπών, κάθε ένα από τα **32** αγόρια πάρει **1,5** κιλό και κάθε κορίτσι **1** κιλό, ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή.

Λύση:

Ε1. Έστω α το κάτω άκρο της $1^{ης}$ κλάσης και c το πλάτος κάθε κλάσης. Τότε έχουμε $\dfrac{\alpha+\alpha+c}{2}=60$ και $\alpha+3c=80.$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha+3c=80 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha-6c=-160 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c=40 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=8 \\ \alpha=56 \end{cases}$

Επομένως οι κλάσεις είναι οι $[56,64),[64,72),[72,80),[80,88)$.

Ε2. Γνωρίζουμε $\nu_1=\nu_4$, ακόμα $\nu_1+\nu_4=\nu_3$ και $\nu_2=2\nu_3$.

Όμως, $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Leftrightarrow (\nu_1+\nu_4)+\nu_2+\nu_3=80 \Leftrightarrow$

$\nu_3+2\nu_3+\nu_3=80 \Leftrightarrow 4\nu_3=80 \Leftrightarrow \nu_3=20.$

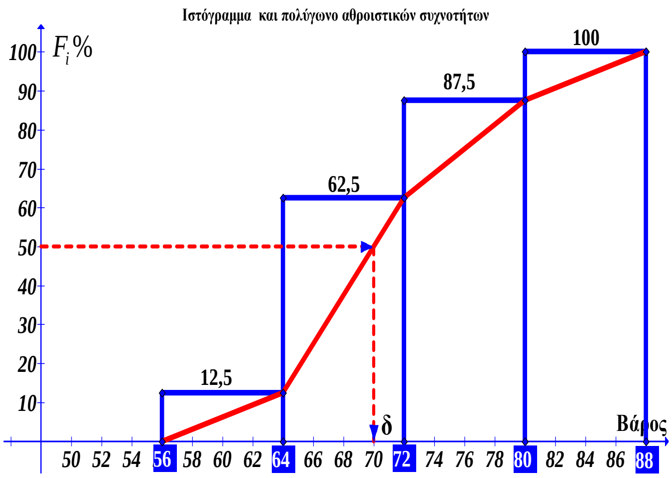
Οπότε $\nu_1=10, \nu_2=40, \nu_3=20, \nu_4=10.$ Έτσι σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

I	Κλάσεις [-)	Κέντρο κλάσης x_i	ν_i	N_i	$\nu_i x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[56, 64)	60	10	10	600	12,5	12,5
2	[64 ,72)	68	40	50	2720	50	62,5
3	[72 , 80)	76	20	70	1520	25	87,5
4	[80 , 88)	84	10	80	840	12,5	100
Σύνολα			80		5680	100	

Ε3. $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{80} x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{5680}{80}=71.$

Ε4.

Όταν έχουμε ομαδοποιημένες τιμές η διάμεσος βρίσκεται γραφικά.

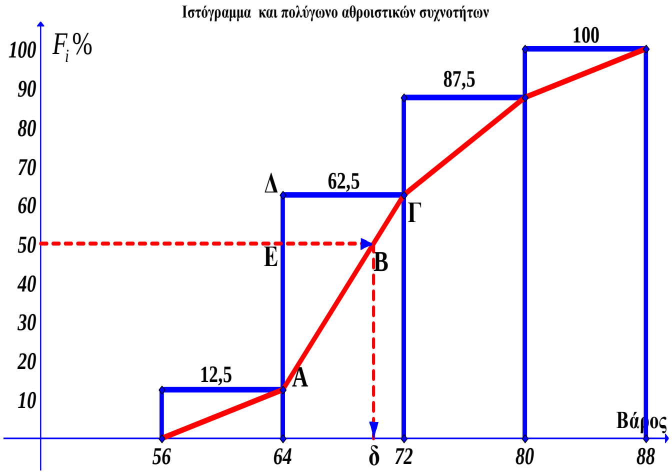


- Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Στον κάθετο άξονα φέρνουμε από το $F_i\%=50\%$ (ή 0,5) παράλληλη ευθεία στον οριζόντιο άξονα.
- Στο σημείο όπου τέμνει το πολύγωνο φέρνουμε κάθετη ευθεία στον άξονα των **τιμών** x_i.
- Στο σημείο όπου τέμνει τον άξονα της μεταβλητής είναι η τιμή της διαμέσου.

Επομένως από το διπλανό σχήμα είναι $\delta \approx 70$.

Εάν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη διάμεσο, ένα τρόπος είναι και ο παρακάτω.

Έχουμε το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων



$\overset{\Delta}{\text{ΑΒΕ}} \simeq \overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$ έχουμε

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΔΑ}} \Leftrightarrow \frac{\delta-64}{72-64}=\frac{50-12{,}5}{62{,}5-12{,}5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta-64}{8}=\frac{37{,}5}{50} \Leftrightarrow \delta-64=6 \Leftrightarrow \delta=70$$

Ε5. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βάρος τουλάχιστον **72** κιλά είναι **100% − 62,5% = 37,5%** .

Ε6. Αν κάθε ένα από τα **32** αγόρια πάρει **1,5** κιλό και κάθε κορίτσι **1** κιλό έχουμε $\bar{y}=\frac{5680+32\cdot 1{,}5+48\cdot 1}{80}=\frac{5680+48+48}{80}=\frac{5776}{80}=72{,}2.$

ΘΕΜΑ 41

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Ε1. Αν $t_1,t_2,...,t_\nu$ είναι οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ, να αποδείξετε ότι $S^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2$.

Ε2. Σε μια πόλη κατά τις απολυτήριες εξετάσεις στο μάθημα της ιστορίας η βαθμολογία $t_1,t_2,...,t_\nu$ των μαθητών ήταν περίπου κανονική κατανομή. Ο μέσος όρος των τετραγώνων των βαθμών ήταν **148** και ο συντελεστής μεταβλητότητας $\frac{1}{6}$.

α) Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο.

β) Αν **10** μαθητές είχαν βαθμολογία πάνω από **16**, να βρείτε πόσοι μαθητές συμμετείχαν στις εξετάσεις.

Λύση:

Ε1. Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2.$$

Οπότε ισχύει $s^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2$.

Ε2. **α).** Επειδή εξετάζουμε τους μαθητές ως προς τη βαθμολογία, έχουμε μόνο μη αρνητικές τιμές. Οπότε ισχύει $\bar{x} \geq 0$.

Έχουμε $\overline{\left(x^2\right)} = 148$ και $CV = \dfrac{1}{6}$, οπότε

$$(CV)^2 = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{s^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{\overline{\left(x^2\right)} - (\bar{x})^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow$$

$$\frac{148 - (\bar{x})^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 148 \cdot 36 - 36(\bar{x})^2 \Leftrightarrow 37(\bar{x})^2 = 148 \cdot 36 \Leftrightarrow$$

$$(\bar{x})^2 = \frac{148 \cdot 36}{37} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 4 \cdot 36 \overset{\bar{x} \geq 0}{\Rightarrow} \bar{x} = 12.$$

$$s^2 = \overline{\left(x^2\right)} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = 148 - 144 \Leftrightarrow s^2 = 4.$$

Η τυπική απόκλιση ισούται με τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Επομένως είναι $s = 2$. Επειδή οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή η διάμεσος ισούται με τη μέση τιμή. Συνεπώς $\delta = \bar{x} = 12$.

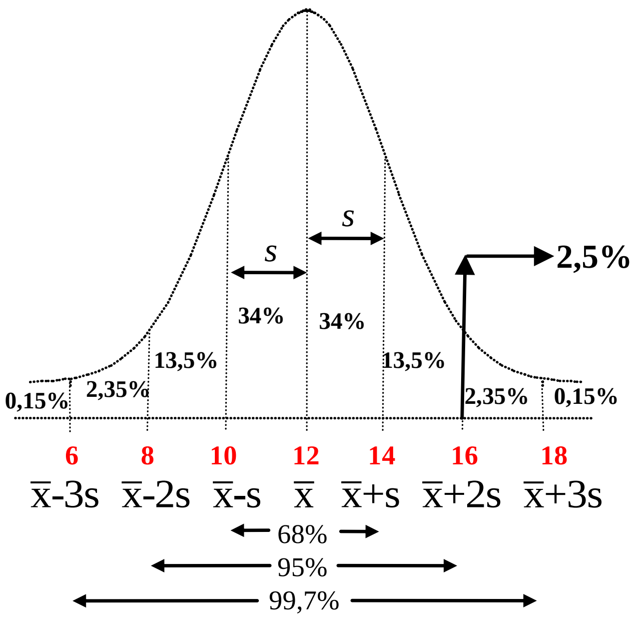
β). Οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή οπότε έχουμε την διπλανή καμπύλη.

Συνεπώς πάνω από 16 βρίσκεται το $2{,}35\% + 0{,}15\% = 2{,}5\%$ των παρατηρήσεων. Άρα οι 10 μαθητές με βαθμό πάνω από 16 είναι το $2{,}5\%$ όλων των μαθητών.

Έστω ν το σύνολο όλων των μαθητών. Τότε αφού 10 μαθητές αποτελούν το $2{,}5\%$ όλων των μαθητών θα είναι

$$\frac{2{,}5}{100} \cdot \nu = 10 \Leftrightarrow \nu = \frac{1000}{2{,}5} \Leftrightarrow \nu = 400$$

μαθητές.



ΘΕΜΑ 42

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται το δείγμα $\mathbf{5,6,7,\alpha,\beta}$ με $\boldsymbol{\alpha<\beta}$. Αν ισχύουν $\bar{x}=6$ και $CV=\dfrac{50\sqrt{2}}{3}\%$,

Ε1. Να βρείτε την τυπική απόκλιση του δείγματος.

Ε2. Να δείξετε ότι $\alpha+\beta=12$.

Ε3. Να βρείτε τους α,β.

Ε4. Για $\alpha=4,\beta=8$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος που προκύπτει αν διαιρέσουμε κάθε τιμή του δείγματος με το $\sqrt{2}$.

Ε5.

Λύση:

Ε1. Έχουμε για το συντελεστή μεταβλητότητας :

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow s=CV\cdot\bar{x}\Leftrightarrow s=6\cdot\frac{\frac{50\sqrt{2}}{3}}{100}\%\Leftrightarrow s=6\cdot\frac{50\sqrt{2}}{300}\Leftrightarrow s=\sqrt{2}.$$

Ε2. Από τη μέση τιμή έχουμε

$$\bar{x}=6\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{5}=6\Leftrightarrow\frac{5+6+7+\alpha+\beta}{5}=6\Leftrightarrow 18+\alpha+\beta=30\Leftrightarrow\alpha+\beta=12.$$

Ε3. Από τη διακύμανση έχουμε

$$s^2=2\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{x})^2\Leftrightarrow\frac{(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(\alpha-6)^2+(\beta-6)^2}{5}=2$$

$$\Leftrightarrow 1+0+1+(\alpha-6)^2+(12-\alpha-6)^2=10$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-6)^2+(6-\alpha)^2=8\Leftrightarrow 2(\alpha-6)^2=8\Leftrightarrow(\alpha-6)^2=4\Leftrightarrow|\alpha-6|=2\Leftrightarrow\alpha-6=2 \text{ ή}$$

$\alpha-6=-2$. Άρα $\alpha=8$ ή $\alpha=4$

Αν $\alpha=8$ τότε από τη σχέση $\alpha+\beta=12$ είναι $\beta=4$. **Αδύνατο,** διότι $\alpha<\beta$.

Αν $\alpha=4$ τότε από τη σχέση $\alpha+\beta=12$ είναι $\beta=8$. **Δεκτή,** άρα $\alpha=4$ και $\beta=8$.

Ε4. Αν x_i οι αρχικές παρατηρήσεις και y_i οι παρατηρήσεις που προκύπτουν διαιρώντας τις x_i με $\sqrt{2}$, τότε έχουμε $y_i=\dfrac{x_i}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_i$, $i=1,2,...,5$

Γνωρίζουμε (από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ 99) για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων y_i, ότι θα προκύψουν από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των x_i, ως εξής: $\bar{y}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\bar{x}$ και $s_y=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|\cdot s_x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot s_x$.

Οπότε $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot s_x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_x$. Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV_y = \frac{50\sqrt{2}}{3}\%$.

ΘΕΜΑ 43

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών ως προς το βαθμό που πήραν στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας στις Πανελλήνιες Εξετάσεις και διαπιστώσαμε ότι :

- Κάτω από 20 πήραν 5 μαθητές.
- Κάτω από 40 πήραν 13 μαθητές.
- Από 40 και πάνω πήρε το 48% των μαθητών.
- Κάτω από 60 πήρε το 76% των μαθητών.
- Τέλος από 80 και πάνω πήρε το 8% των μαθητών.

Βαθμοί	**Κέντρο κλάσης** x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	x_iv_i	$v_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
[0,20)							
[20,40)							
[40,60)							
[60,80)							
[80,100)							
Σύνολα							

Ε1. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Ε2. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό από **50** μέχρι και **70**.

Ε3. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών και την τυπική απόκλιση.

Ε4. Είναι ομοιογενές το δείγμα;

Λύση:

Ε1. Από τα δεδομένα έχουμε:

- Επειδή κάτω από **20** πήραν **5** μαθητές έχουμε $v_1 = 5$.
- Κάτω από **40** πήραν **13** μαθητές, έτσι $v_1 + v_2 = 13 \Rightarrow v_2 = 8$.
- Αφού από **40** και πάνω πήρε το **48%** των μαθητών, το υπόλοιπο **52%** πήρε κάτω από **40**, το οποίο είναι **13** μαθητές.

Έτσι $13 = \dfrac{52}{100}\nu \Rightarrow \nu = 25$ είναι το πλήθος των μαθητών.

- Επειδή από 80 και πάνω πήρε το 8% των μαθητών, έχουμε
  $\nu_5 = \dfrac{8}{100}\cdot 25 \Rightarrow \nu_5 = 2$.
- Το 76% των μαθητών που πήραν κάτω από 60 είναι $\dfrac{76}{100}\cdot 25 = 19$ μαθητές.

Οπότε $\nu_3 = 19 - \nu_1 - \nu_2 \Rightarrow \nu_3 = 6$ και $\nu_4 = 25 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_5 = 4$.
Ο πίνακας γίνεται :

Βαθμοί	Κέντρο κλάσης x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	$\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
[0,20)	10	5	5	20	20	50	5120
[20,40)	30	8	13	32	52	240	1152
[40,60)	50	6	19	24	76	300	384
[60,80)	70	4	23	16	92	280	3136
[80,100)	90	2	25	8	100	180	4608
Σύνολα		25		100		1050	14400

Ε2. Βαθμό από 50 έως 70, θεωρώντας ότι τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα μέσα στις κλάσεις, πήραν οι μισοί μαθητές της $3^{ης}$ και οι μισοί μαθητές της $4^{ης}$ κλάσης. Άρα το $\dfrac{24}{2}\% + \dfrac{16}{2}\% = 20\%$ των μαθητών.

Ε3. Για τη μέση τιμή έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{1050}{25} = 42$, ενώ για την τυπική απόκλιση $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}\nu_i\left(x_1-\bar{x}\right)^2 \Rightarrow s^2 = \dfrac{14400}{25} \Rightarrow s = \dfrac{120}{5} \Rightarrow s = 24.$
Αφού ως τυπική απόκλιση s ορίζουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

Ε4. Θα υπολογίσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας προκειμένου να αποφανθούμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές ή όχι.
Έχουμε λοιπόν $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} \Rightarrow CV = \dfrac{24}{42} \Rightarrow CV = \dfrac{4}{7} > \dfrac{1}{10}$ και συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού ο συντελεστής μεταβλητότητας ξεπερνάει το 10%.

ΘΕΜΑ 44

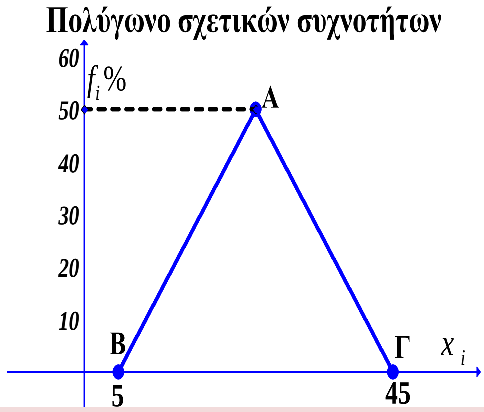
Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε κ κλάσεις, ίσου πλάτους c. Δίνεται το πολύγωνο $f_i\%$ το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.

Ε1. Να εκφράσετε το c συναρτήσει του κ.

Ε2. Να βρείτε τα c και κ.

Ε3. Αν $f_1\% = 25\%$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα $f_i\%$.



Λύση:

Ε1. Οι κορυφές B και Γ του τριγώνου είναι τα μέσα των δύο υποθετικών κλάσεων που θεωρούμε (μία κλάση στην αρχή και μία στο τέλος, με το ίδιο πλάτος και μηδενική συχνότητα) προκειμένου να κατασκευάσουμε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. Οι τετμημένες λοιπόν 5 και 45 αυτών των σημείων, είναι οι κεντρικές τιμές των υποθετικών κλάσεων. Ανάμεσα τους υπάρχουν οι κεντρικές τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$. Τότε, δοθέντος ότι τα κέντρα των κλάσεων απέχουν όσο το πλάτος των κλάσεων, έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + c \\ x_2 = x_1 + c \\ x_3 = x_2 + c \\ \ldots \\ x_\kappa = x_{\kappa-1} + c \\ 45 = x_\kappa + c \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε: $45 = 5 + (\kappa+1)c \Leftrightarrow c = \dfrac{40}{\kappa+1}$ **(1)**.

Ε2. Στον υπολογισμό του εμβαδού, θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης του μήκους , στον οριζόντιο άξονα, το πλάτος της κλάσης, δηλαδή το c.

Άρα, η βάση του τριγώνου έχει μήκος $\beta = \dfrac{1}{2} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\kappa \text{ φορές}} + \dfrac{1}{2} = \kappa + 1$ **(2)** δηλαδή

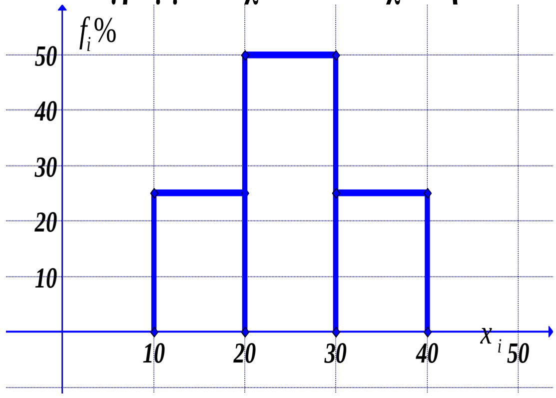
έχει μήκος $(\kappa+1)c$ (Π.χ όπως λέμε 5 **μέτρα** εδώ λέμε θα λέμε 5 c).

Το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 100, και αφού έχει σχήμα τριγώνου θα ισχύει:

$E = 100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\beta \cdot 50 = 100 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2}(\kappa+1)\cdot 50 = 100 \Leftrightarrow \kappa = 3$ και από την (1): $c = 10$.

Ε3. Αφού $\mathbf{\kappa = 3}$, από το πολύγωνο έχουμε $\mathbf{f_2\% = 50}$, άρα $\mathbf{f_3\% = 100\% - (25\% + 50\%) = 25\%}$ και έτσι προκύπτει στο διπλανό πίνακα το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



ΘΕΜΑ 45

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ρωτήθηκε ένα δείγμα $\mathbf{\nu}$ οικογενειών σχετικά με τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Από τις απαντήσεις τους συντάχθηκε ο διπλανός πίνακας των αθροιστικών συχνοτήτων.

Αριθμός παιδιών $\mathbf{x_i}$	Αριθμός οικογενειών $\mathbf{\nu_i}$	$\mathbf{N_i}$
1	$\mathbf{\nu_1}$	$\mathbf{x}$
2	$\mathbf{\nu_2}$	$\mathbf{3x-5}$
3	$\mathbf{\nu_3}$	$\mathbf{3x+8}$
4	$\mathbf{\nu_4}$	$\mathbf{4x+7}$
5	$\mathbf{\nu_5}$	$\mathbf{5x}$

Ε1. Να εκφράσετε συναρτήσει του $\mathbf{x}$ τις συχνότητες $\mathbf{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5}$.

Αν οι αθροιστικές συχνότητες $\mathbf{N_i}$ έχουν μέση τιμή $\mathbf{\bar{y} = 34}$, να βρείτε:

Ε2. Την τιμή του $\mathbf{x}$.

Ε3. Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ τρία παιδία και πόσες έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά.

Ε4. Τη μέση τιμή $\mathbf{\bar{x}}$ και την διάμεσο $\mathbf{\delta}$ του αριθμού των παιδιών των οικογενειών.

Πηγή: Λ.Κανάκης - Γ. Μαυρίδης (Εκδόσεις Μαυρίδη)

Λύση:

Ε1. Για τις συχνότητες $\mathbf{\nu_i, i = 1,2,...,5}$ έχουμε:

$$\mathbf{\nu_1 = N_1 = x,\ \nu_2 = N_2 - N_1 = 3x - 5 - x = 2x - 5,\ \nu_3 = N_3 - N_2 = 3x + 8 - 3x + 5 = 13}$$

$$\mathbf{\nu_4 = N_4 - N_3 = 4x + 7 - 3x - 8 = x - 1,\ \nu_5 = N_5 - N_4 = 5x - 4x - 7 = x - 7}$$

Ε2. Η μέση τιμή των αθροιστικών συχνοτήτων $\mathbf{N_i}$ είναι **34.**

Οπότε $\mathbf{\bar{y} = 34 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{5} N_i}{5} = 34 \Rightarrow 16x + 10 = 170 \Rightarrow x = 10}$.

Ε3. Για $\mathbf{x = 10}$ έχουμε $\mathbf{\nu_1 = 10,\ \nu_2 = 15,\ \nu_3 = 13,\ \nu_4 = 9}$ και $\mathbf{\nu_5 = 3}$.

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων γίνεται:

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i	N_i	$x_i v_i$
1	**10**	**10**	**10**
2	**15**	**25**	**30**
3	**13**	**38**	**39**
4	**9**	**47**	**36**
5	**3**	**50**	**15**
Σύνολα	**50**		**130**

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το πολύ τρία παιδιά έχουν $N_3 = 38$ οικογένειες και τουλάχιστον δύο παιδιά έχουν $v - v_1 = 50 - 10 = 40$ οικογένειες.

Ε4. Για τη μέση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_1 \cdot v_i}{v} = \dfrac{130}{50} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}6$ παιδιά.

Για τη διάμεσο έχουμε: Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $v = 50$ και επιπλέον οι παρατηρήσεις είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, η διάμεσος είναι η μέση τιμή (το ημιάθροισμα) της $25^{ης}$ και $26^{ης}$ παρατήρησης.
Από τον πίνακα της αθροιστικής συχνότητας φαίνεται ότι η $25^{η}$ παρατήρηση είναι η $x_2 = 2$ και η $26^{η}$ είναι η $x_3 = 3$, οπότε $\delta = \dfrac{2+3}{2} \Rightarrow \delta = 2{,}5$ παιδιά.

ΘΕΜΑ 46

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω μεταβλητή X με παρατηρήσεις $t_1, t_2, \cdots, t_v$, μέση τιμή $\bar{x} \neq 0$, $\alpha \in R$ και η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot (t_1 + t_2 + \cdots + t_v) - 2\bar{x}v}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \dfrac{\alpha \bar{x} v}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

Ε1. Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ε2. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(3, 20)$, να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{v} t_i = 100$.

Ε3. Αν $\sum_{i=1}^{v} t_i \cdot f_i = 1$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων, να βρεθεί το μέγεθος v του δείγματος.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_v}{v} \Leftrightarrow t_1 + t_2 + \ldots + t_v = v\bar{x}$ **(1)**

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}, x\neq 2\\ \dfrac{\alpha\nu\overline{x}}{2}, x=2\end{cases}$$

Τότε

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x\nu\overline{x}-2\nu\overline{x}}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\nu\overline{x}(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\nu\overline{x}}{(x+2)}=\frac{\nu\overline{x}}{4}$$

και $g(2)=\dfrac{\alpha\nu\overline{x}}{2}$. Όμως η g συνεχής στο $x_0=2$, οπότε

$$\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)\Leftrightarrow\frac{\nu\overline{x}}{4}=\frac{\alpha\nu\overline{x}}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}.$$

Ε2. Επειδή το σημείο $A(3,20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της g έχουμε: $A(3,20)\in C_g\Leftrightarrow g(3)=20\Leftrightarrow\dfrac{3\nu\overline{x}-2\nu\overline{x}}{3^2-4}=20\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\nu\overline{x}=100\overset{(1)}{\Leftrightarrow}t_1+t_2+...+t_\nu=100\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}t_i=100.$$

Ε3. Επειδή κάθε παρατήρηση εμφανίζεται μία φορά, η συχνότητα καθεμίας από αυτές είναι ίση με **1**, οπότε :

$$\sum_{i=1}^{\nu}t_if_i=1\Leftrightarrow t_1f_1+t_2f_2+...+t_\nu f_\nu=1\Leftrightarrow t_1\frac{\nu_1}{\nu}+t_2\frac{\nu_2}{\nu}+...+t_2\frac{\nu_\nu}{\nu}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1\nu_1+...+t_\nu\nu_\nu=\nu\Leftrightarrow t_1+t_2+...+t_\nu=\nu\Leftrightarrow\nu=100.$$

ΘΕΜΑ 47 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Οι σημερινές ηλικίες των καθηγητών του Μαθηματικού τμήματος Ιωαννίνων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1=0{,}08$, ενώ πριν 25 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής των ηλικιών τους ήταν $CV_2=0{,}16$.

Θεωρώντας ότι στο πέρασμα των ετών δεν υπήρχαν μεταβολές στο διδακτικό προσωπικό:

Ε1. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της σημερινής τους ηλικίας.

Ε2. Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των καθηγητών είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια;

Ε3. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών είναι 75480, να βρεθεί πόσοι είναι οι καθηγητές του τμήματος.

Ε4. Αν συνταξιοδοτηθεί ένας εκ των καθηγητών και στη θέση του προσληφθεί ένας καθηγητής 30 χρόνια νεότερος, τότε:

α) Να βρεθεί η νέα μέση τιμή των ηλικιών.

β) Να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών μετά την πρόσληψη του καθηγητή, αν η διακύμανση που προκύπτει είναι **37.**
γ) Με δεδομένο το προηγούμενο ερώτημα, να εξετάσετε το νέο δείγμα που προκύπτει ως προς την ομοιογένεια.

Λύση:

Ε1. Έστω $\bar{x}, s_x$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που έχουν οι καθηγητές του τμήματος σήμερα.
Έστω $\bar{y}, s_y$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που είχαν οι καθηγητές πριν 25 χρόνια. Από εφαρμογή του σχολικού, σελ 99, γνωρίζουμε ότι $\bar{y} = \bar{x} - 25$ και $s_y = s_x$.

Επομένως , $CV_1 = \frac{s_x}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0{,}08 = \frac{s_x}{\bar{x}} \Leftrightarrow s_x = 0{,}08 \cdot \bar{x}$.

Και $CV_2 = \frac{s_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow 0{,}16 = \frac{s_x}{\bar{x} - 25} \Leftrightarrow s_x = 0{,}16 \cdot (\bar{x} - 25)$.

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε

$0{,}16 \cdot (\bar{x} - 25) = 0{,}08 \cdot \bar{x} \Leftrightarrow 0{,}16 \cdot \bar{x} - 4 = 0{,}08 \cdot \bar{x} \Leftrightarrow 0{,}08 \cdot \bar{x} = 4 \Leftrightarrow \bar{x} = 50$.

Οπότε $s_x = 0{,}08 \cdot \bar{x} = 0{,}08 \cdot 50 = 4.$

Ε2. Έστω $\bar{z}, s_z$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που είχαν οι καθηγητές όταν το δείγμα έγινε για πρώτη φορά ομοιογενές, πριν από α χρόνια.
Έχουμε ότι $\bar{z} = \bar{x} - \alpha = 50 - \alpha, \alpha \in (0,50)$ και $s_z = s_x = 4$.

$$CV_z \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_z}{\bar{z}} \le 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot \bar{z} \ge s_z \Leftrightarrow 0{,}1(50 - \alpha) \ge 4 \Leftrightarrow 5 - 0{,}1 \cdot \alpha \ge 4 \Leftrightarrow \alpha \le 10$$

Άρα πριν από 10 χρόνια , το δείγμα έγινε για πρώτη φορά ομοιογενές.

Ε3. Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε:

$$s_x^{\,2} = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^2 = \frac{75480}{\nu} - 50^2 \Leftrightarrow \frac{75480}{\nu} = 2516 \Leftrightarrow \nu = \frac{75480}{2516} = 30 .$$

Επομένως το μαθηματικό τμήμα έχει 30 καθηγητές.

Ε4. **α)** $\bar{x} = 50 \Leftrightarrow \frac{x_1 + ... + x_{30}}{30} = 50 \Leftrightarrow x_1 + ... + x_{30} = 1500 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30} x_i = 1500$.

Οπότε το συνολικό άθροισμα των ηλικιών των καθηγητών του τμήματος, είναι **1500.**

Αποχωρεί ένας καθηγητής και στη θέση του προσλαμβάνεται ένας καθηγητής 30 χρόνια μικρότερος, οπότε αν κ_i, $i = 1,2,...,30$ οι τιμές του νέου δείγματος, τότε

$$\overline{\kappa}=\frac{\sum_{i=1}^{30}x_i-30}{30}=\frac{1500-30}{30}=49\,.$$

β) Η διακύμανση των τιμών κ_i, $i=1,2,...,30$ είναι $s_\kappa^2=37$. Οπότε έχουμε:

$$s_\kappa^2=\frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{\nu}-\left(\overline{\kappa}\right)^2\Leftrightarrow 37=\frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{30}-49^2\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{30}=2438\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2=73140\,.$$

γ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος είναι $CV_\kappa=\frac{s_\kappa}{\overline{\kappa}}=\frac{\sqrt{37}}{49}$. Έστω ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Δηλαδή $CV_\kappa\le 0{,}1$.

Τότε $CV_\kappa\le 0{,}1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{37}}{49}\le 0{,}1\Leftrightarrow\sqrt{37}\le 4{,}9\Leftrightarrow\left(\sqrt{37}\right)^2\le\left(4{,}9\right)^2\Leftrightarrow 37\le 24{,}01$.

Άτοποκαι συνεπώς $CV_\kappa>0{,}1$ που σημαίνει ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 48

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Οι χρόνοι σε min που χρειάζονται οι μαθητές μιας γειτονιάς για να πάνε στο σχολείο τους έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους με αντίστοιχες συχνότητες $6,10,7,7$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=6(x_1-x)^2+10(x_2-x)^2+7(x_3-x)^2+7(x_4-x)^2$, όπου x_1,x_2,x_3,x_4 τα κέντρα των αντίστοιχων κλάσεων.

Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=7$ με τιμή $f(7)=134$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c=2$.

Ε2. Να βρείτε τις συχνότητες f_i.

Ε3. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

Ε4. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Πηγή: Φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Ε1. Αν α είναι το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων, τότε οι κλάσεις είναι οι $[\alpha,\alpha+c),[\alpha+c,\alpha+2c),[\alpha+2c,\alpha+3c),[\alpha+3c,\alpha+4c)$ και τα αντίστοιχα κέντρα τους είναι : $x_1=\alpha+\frac{c}{2}$, $x_2=\alpha+\frac{3c}{2}$, $x_3=\alpha+\frac{5c}{2}$ και $x_4=\alpha+\frac{7c}{2}$

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ,ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=-12(x_1-x)-20(x_2-x)-14(x_3-x)-14(x_4-x)$.

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=7$ έχουμε:

$$f'(7)=0\Leftrightarrow -12(x_1-7)-20(x_2-7)-14(x_3-7)-14(x_4-7)=0\Leftrightarrow$$

$$6(x_1-7)+10(x_2-7)+7(x_3-7)+7(x_4-7)=0\Leftrightarrow$$

$$6x_1+10x_2+7x_3+7x_4=210$$

Με αντικατάσταση των x_1, x_2, x_3, x_4 παίρνουμε: $6x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 210 \Leftrightarrow$

$$6\left(\alpha + \frac{c}{2}\right) + 10\left(\alpha + \frac{3c}{2}\right) + 7\left(\alpha + \frac{5c}{2}\right) + 7\left(\alpha + \frac{7c}{2}\right) = 210 \Leftrightarrow$$

$$30\alpha + 60c = 210 \Leftrightarrow \alpha + 2c = 7 \Leftrightarrow \alpha = 7 - 2c$$

Έτσι τα x_i συναρτήσει μόνο του c, είναι:

$$x_1 = 7 - \frac{3c}{2},\ x_2 = 7 - \frac{c}{2},\ x_3 = 7 + \frac{c}{2} \text{ και } x_1 = 7 + \frac{3c}{2}$$

Η τιμή του ελαχίστου είναι

$f(7) = 134$ οπότε:

$$f(7) = 134 \Leftrightarrow$$

$$6(x_1 - 7)^2 + 10(x_2 - 7)^2 + 7(x_3 - 7)^2 + 7(x_4 - 7)^2 = 134 \Leftrightarrow$$

$$6\left(-\frac{3c}{2}\right)^2 + 10\left(-\frac{c}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3c}{2}\right)^2 = 134 \Leftrightarrow$$

$$54c^2 + 10c^2 + 7c^2 + 63c^2 = 536 \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = 2\ .$$

Ε2. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι: $v = 6 + 10 + 7 + 7 = 30$, έτσι:

- $f_1 = \dfrac{v_1}{v} = \dfrac{6}{30}$
- $f_2 = \dfrac{v_2}{v} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$
- $f_3 = \dfrac{v_3}{v} = \dfrac{7}{30}$
- $f_4 = \dfrac{v_4}{v} = \dfrac{7}{30}$

Ε3. Με $c = 2$ είναι $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 8$ και $x_4 = 10$.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{4\cdot6 + 6\cdot10 + 8\cdot7 + 10\cdot7}{30} = \frac{210}{30} = 7\,\text{min}\ .$$

Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{6(x_1 - 7)^2 + 10(x_2 - 7)^2 + 7(x_3 - 7)^2 + 7(x_4 - 7)^2}{30} = \frac{f(7)}{30} = \frac{134}{30}$$

Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{134}{30}} \simeq 2{,}11\,\text{min}$.

Ε4. Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2{,}11}{7} \simeq 0{,}3 > 0{,}1$$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 49 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ένα εργοστάσιο έχει $\mathbf{v}$ στελέχη και $\mathbf{4v}$ εργάτες με μισθούς $\mathbf{x_i, i=1,2,...,5v}$ σε εκατοντάδες ευρώ, όπου $\mathbf{v}$ θετικός φυσικός. Ο μηνιαίος μισθός κάθε εργάτη είναι $\mathbf{750}$ ευρώ και κάθε στελέχους $\mathbf{1100}$ ευρώ.

Ε1. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων.

Υποθέτουμε ότι η τυπική απόκλιση όλων των μισθών είναι $\mathbf{140}$ ευρώ και $\sum_{i=1}^{5v} t_1^2 = \mathbf{34.600.000}$ ευρώ.

Ε2. Να αποδείξετε ότι το εργοστάσιο απασχολεί $\mathbf{50}$ εργαζόμενους.

Ε3. Το εργοστάσιο αποφασίζει να αυξήσει τις μηνιαίες αποδοχές των εργατών κατά $\boldsymbol{\alpha}$ ευρώ και να μειώσει τις μηνιαίες αποδοχές των στελεχών κατά $\boldsymbol{\beta}$ ευρώ, ώστε το μέσο μισθολόγιο να μην υπερβαίνει τα $\mathbf{840}$ ευρώ. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{4\alpha-\beta\le 100}$.

Πηγή: Β.Γατσινάρης (εκδόσεις Πατάκης)

Λύση:

Ε1. Έστω $\bar{x}_E$ και $\bar{x}_\Sigma$ ο μέσος μηνιαίος μισθός για τους εργάτες και τα στελέχη και $x_i, x_{i'}$ οι μισθοί εργατών και στελεχών αντίστοιχα . Τότε:

$$\bar{x}_E = 750 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4v}\frac{x_i}{4v} = 750 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4v} x_i = 3000v \text{ και}$$

$$\bar{x}_\Sigma = 1100 \Rightarrow \sum_{i=1}^{v}\frac{x_{i'}}{v} = 1100 \Rightarrow \sum_{i=1}^{v} x_{i'} = 1100v$$

Έτσι: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4v} x_i + \sum_{i=1}^{v} x_{i'}}{5v} = \dfrac{3000v+1100v}{5v} = \dfrac{4100v}{5v} = 820$ ευρώ.

Ε2. Είναι $s^2 = \dfrac{1}{5v}\left(\sum_{i=1}^{5v} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{5v} t_i\right)^2}{5v}\right) \Rightarrow s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5v} t_i^2}{5v} - (\bar{x})^2 \Rightarrow$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{5v} t_i^2}{5\left(s^2+(\bar{x})^2\right)} = \frac{34600000}{5\left(140^2+820^2\right)} = \frac{34600000}{5\left(19600+672400\right)} = \frac{34600000}{3460000} = 10$$

Άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $\mathbf{5v=50}$ εργαζόμενοι.

Ε3. Αν κάθε εργάτης πάρει μηνιαία αύξηση $\boldsymbol{\alpha}$ ευρώ , τότε ο νέος μέσος μηνιαίος μισθός των εργατών θα είναι $\bar{x}_E' = \bar{x}_E + \alpha$. Αντίστοιχα, αν κάθε στέλεχος υποστεί μηνιαία μείωση κατά $\boldsymbol{\beta}$ ευρώ, τότε ο νέος μέσος μηνιαίος μισθός των στελεχών θα είναι $\bar{x}_\Sigma' = \bar{x}_\Sigma - \beta$. Πρέπει το μέσο μισθολόγιο να μην υπερβαίνει τα $\mathbf{840}$ ευρώ μηνιαίως. Δηλαδή $\bar{x} \le 840$

Είναι $\sum_{i=1}^{40} x_i = 30000 + 40\alpha$ και $\sum_{i=1}^{10} x_{i'} = 11000 - 10\beta$.

Έτσι $30000 + 40\alpha + 11000 - 10\beta \le 840 \cdot 50 \Rightarrow 40\alpha - 10\beta \le 1000 \Rightarrow 4\alpha - \beta \le 100$.

ΘΕΜΑ 50

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνονται δέκα παρατηρήσεις, από τις οποίες οι πέντε είναι ίσες με 3 και οι υπόλοιπες είναι ίσες με 1 ή 6. Έστω κ το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ίσες με 6.

Ε1. Να εκφράσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των 10 παρατηρήσεων συναρτήσει του κ.

Ε2. Να βρείτε για ποια τιμή του κ η διακύμανση γίνεται μέγιστη.

Ε3. Έστω ότι $\kappa = 3$. Συμπληρώνουμε τις αρχικές 10 παρατηρήσεις με άλλες δύο θετικές και οι 12 παρατηρήσεις έχουν διακύμανση $s^2 = 16$ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,8$. Να βρείτε:

α) Τις δύο παρατηρήσεις που συμπληρώσαμε.

β) Τη μικρότερη τιμή του $c > 0$ που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις 12 παρατηρήσεις , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

Πηγή: Βασίλης Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε το δείγμα : $\underbrace{3,3,...,3}_{5\text{φορές}},\underbrace{6,6,...,6}_{\kappa\text{ φορές}},\underbrace{1,1,...,1}_{(5-\kappa)\text{φορές}}$ άρα η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 3 + \kappa\cdot 6 + (5-\kappa)\cdot 1}{10} = \frac{20+5\kappa}{10} = 2 + \frac{\kappa}{2}$$ και η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n} \nu_i (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{10}\left(5\left(3-2-\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \kappa\left(6-2-\frac{\kappa}{2}\right)^2 + (5-\kappa)\left(1-2-\frac{\kappa}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5\left(1-\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \kappa\left(4-\frac{\kappa}{2}\right)^2 + (5-\kappa)\left(-1-\frac{\kappa}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5\left(1-\kappa+\frac{\kappa^2}{4}\right) + \kappa\left(16-4\kappa+\frac{\kappa^2}{4}\right) + (5-\kappa)\left(1+\kappa+\frac{\kappa^2}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5-5\kappa+\frac{5\kappa^2}{4}+16\kappa-4\kappa^2+\frac{\kappa^3}{4}+5+5\kappa+\frac{5\kappa^2}{4}-\kappa-\kappa^2-\frac{\kappa^3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(-\kappa^2+6\kappa+4\right)$$

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\kappa) = s^2 = \frac{1}{4}(-\kappa^2+6\kappa+4), \kappa \in [0,5]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με $f'(\kappa) = \frac{1}{4}(-2\kappa+6)$.

Επίσης, $f'(\kappa)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2\kappa+6)=0 \Leftrightarrow -2\kappa+6=0 \Leftrightarrow \kappa=3.$

Ακόμα, $f'(\kappa)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2\kappa+6)>0 \Leftrightarrow -2\kappa+6>0 \Leftrightarrow \kappa<3.$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,5]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\kappa=3$.

κ	0	3	5
$f'(\kappa)$	+	0	-
$f(\kappa)$	↗	Ο.Μ	↘

Ε3. Το νέο δείγμα είναι: $3,3,3,3,3,6,6,6,1,1,\alpha,\beta$.

Έχουμε $s^2=16 \Leftrightarrow s=4$ και $CV=0,8 \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|}=0,8 \Leftrightarrow |\bar{x}|=5 \Leftrightarrow \bar{x}=5$.

Διότι $\bar{x}>0$, αφού α,β θετικές σταθερές.

Αφού $\bar{x}=5$, τότε έχουμε $\frac{5\cdot3+3\cdot6+2\cdot1+\alpha+\beta}{12}=5 \Leftrightarrow \alpha+\beta=25$ (1)

και $s^2=16 \Leftrightarrow \frac{1}{12}\left[5(3-5)^2+3(6-5)^2+2(1-5)^2+(\alpha-5)^2+(\beta-5)^2\right]=16$ (2)

και $20+3+32+(\alpha-5)^2+(\beta-5)^2=192$

$\Leftrightarrow (\alpha-5)^2+(\beta-5)^2=137 \Leftrightarrow (25-\beta-5)^2+(\beta-5)^2=137$

$\Leftrightarrow (20-\beta)^2+(\beta-5)^2=137 \Leftrightarrow \beta^2-40\beta+400+\beta^2-10\beta+25-137=0$

$\Leftrightarrow 2\beta^2-50\beta+288=0$ $\beta^2-25\beta+144=0 \Leftrightarrow \beta=16$ ή $\beta=9$

Αν $\beta=16$ τότε $\alpha=9$, ενώ αν $\beta=9$ τότε $\alpha=16$. Άρα οι δύο νέες παρατηρήσεις είναι το 9 και το 16.

Έχουμε $\bar{x}=5, s=4$. Έστω ότι προσθέτουμε σε όλες τις παρατηρήσεις την ίδια θετική σταθερά c.

Τότε από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ 99, έχουμε

$\bar{y}=5+c$ και $s_y=s_x=4$.

$$CV_y \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{4}{5+c} \le 0,1 \Leftrightarrow 0,5+0,1c \ge 4 \Leftrightarrow 0,1c \ge 3,5 \Leftrightarrow c \ge 35.$$

Επομένως η μικρότερη θετική σταθερά είναι η $c=35$.

ΘΕΜΑ 51

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1<x_2<x_3<...<x_k$. Για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει $N_i=\frac{3i^2+7i}{2}, i=1,...,k.$

Ε1. Να βρεθούν οι (απόλυτες) συχνότητες ν_i ως συνάρτηση του i.

Ε2. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu=55$, να βρείτε το k.

Ε3. Για $k=5$, να υπολογίσετε τις συχνότητες f_i, F_i, $i=1,...,k$.

Λύση:

Ε1. Είναι $v_i = N_i - N_{i-1} \Rightarrow v_i = \dfrac{3i^2 + 7i - 3(i-1)^2 - 7(i-1)}{2} \Rightarrow$

$$v_i = \frac{3i^2 + 7i - 3i^2 + 6i - 3 - 7i + 7}{2} \Rightarrow v_i = \frac{6i+4}{2} \Rightarrow v_i = 3i + 2,\ i = 1,2,\dots,k\ .$$

Ε2. Είναι $N_k = \dfrac{3k^2 + 7k}{2} \Rightarrow 55 = \dfrac{3k^2 + 7k}{2} \Rightarrow 3k^2 + 7k - 110 = 0 \Rightarrow$

$k = -\dfrac{22}{3}$ ***απορρίπτεται*** διότι $k \in N^*$ ή $k = 5$ **δεκτή.**

Ε3. Ισχύει $f_i = \dfrac{v_i}{v} = \dfrac{3i+2}{55}$.

Έτσι: $f_1 = \dfrac{3+2}{55} = \dfrac{5}{55} = \dfrac{1}{11}$, ομοίως $f_2 = \dfrac{8}{55}$, $f_3 = \dfrac{11}{55} = 0,2$, $f_4 = \dfrac{14}{55}$ και $f_5 = \dfrac{17}{55}$

$F_1 = f_1 = \dfrac{1}{11}$, $F_2 = (F_1 + f_2) = \dfrac{13}{55}$.

Ομοίως $F_3 = f_3 + F_2 = \dfrac{24}{55}$, $F_4 = f_4 + F_3 = \dfrac{48}{55}$ και $F_5 = 1$.

ΘΕΜΑ 52

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Τα κέρδη σε ευρώ μιας αλυσίδας καταστημάτων ειδών διατροφής ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το **84%** των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από **1200** ευρώ, ενώ το **97,5%** των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από **600** ευρώ.

Ε1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

Ε2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

Ε3. Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της αλυσίδας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

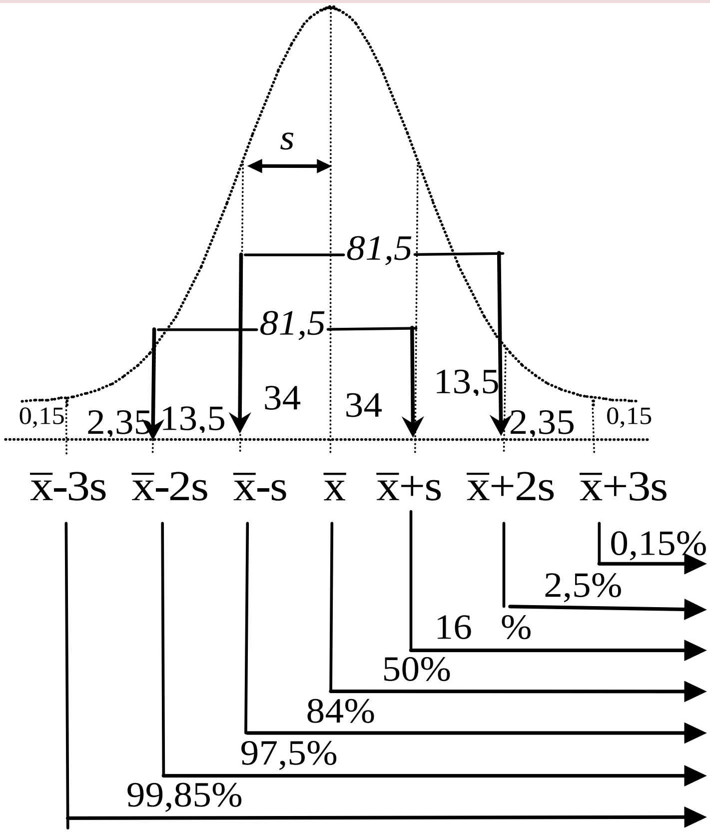
Ε4. Αν μια μέρα τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά **20%**, πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

Λύση:

Ε1. Επειδή το **84%** των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από **1200** ευρώ ,έχουμε $\bar{x}+s=1200.$ Ενώ επειδή το **97,5%** των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από **600** ευρώ, έχουμε $\bar{x}-2s=600.$ Λύνουμε το σύστημα και έχουμε

$$\begin{cases}\bar{x}-2s=600\\ \bar{x}+s=1200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=200\\ \bar{x}=1000\end{cases}$$

Ακόμα, επειδή έχουμε κανονική κατανομή, $\delta=\bar{x}=1000.$



Ε2. Είναι $s^2=40000$ και $R\approx 6s=1200$.

Ε3. Ισχύει $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{200}{1000}=0,2>0,1$. Άρα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω ότι κατά $c>0$ πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων, οπότε τα νέα κέρδη θα είναι $y_i=x_i+c$. Τότε από γνωστή εφαρμογή , έχουμε

$\bar{y}=\bar{x}+c=1000+c,\ \ c>0$ και $s_y=s_x=200$ και ο νέος συντελεστής μεταβολής για να είναι ομοιογενές πρέπει να είναι

$$CV'\leq 0,1\Leftrightarrow\frac{s_y}{\bar{y}}\leq 0,1\Leftrightarrow\frac{200}{1000+c}\leq 0,1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100+0,1c\geq 200\Leftrightarrow 0,1c\geq 100\Leftrightarrow c\geq 1000$$

Επομένως για να συμβαίνει αυτό η μικρότερη τιμή της σταθεράς είναι η $c=1000$.

Ε4. Επειδή τα κέρδη θα μειωθούν κατά **20%**, τα νέα κέρδη θα είναι $z_i=x_i-0,2x_i=0,8x_i$. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου, έχουμε $\bar{z}=0,8\bar{x}$ και $s_z=0,8s_x$. Οπότε $CV_z=\frac{s_z}{\bar{z}}=\frac{0,8s_x}{0,8\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}=CV=0,2.$

ΘΕΜΑ 53

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανεμημένα σε **4** κλάσεις σύμφωνα με την θερμοκρασία τους $\mathbf{X}$ (σε $^{\circ}\mathbf{C}$) η οποία κυμαίνεται από $-4^{\circ}\mathbf{C}$ έως $4^{\circ}\mathbf{C}$. Αν δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης τότε:

Ε1. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων και να δειχθεί ότι η μέση της θερμοκρασίας των ψυγείων είναι $\bar{\mathbf{x}}=1^{\circ}\mathbf{C}$.

Ε2. Έστω ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη.

α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο θερμοκρασία.

β. Αν γνωρίζουμε ότι η θερμοκρασία **34** ψυγείων είναι μικρότερη των $0{,}5^{\circ}\mathbf{C}$, να βρεθεί ο αριθμός των ψυγείων που κατέχει η εταιρεία.

Λύση:

Ε1. Έστω $\mathbf{c}$ το πλάτος κάθε κλάσης, τότε $\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{\kappa}}=\dfrac{4-(-4)}{4}=2$.

Έχουμε ότι η δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης , οπότε $\mathbf{v_2=3v_1}$ και $\mathbf{v_4=5v_1}$.Έτσι σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα

Ι	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	v_i	$v_i\,x_i$
1	$[-4,-2)$	-3	v_1	$-3v_1$
2	$[-2,0)$	-1	$3v_1$	$-3v_1$
3	$[0,\ 2)$	1	v_3	v_3
4	$[2,\ 4)$	3	$5v_1$	$15v_1$
Σύνολα			$9v_1+v_3$	$9v_1+v_3$

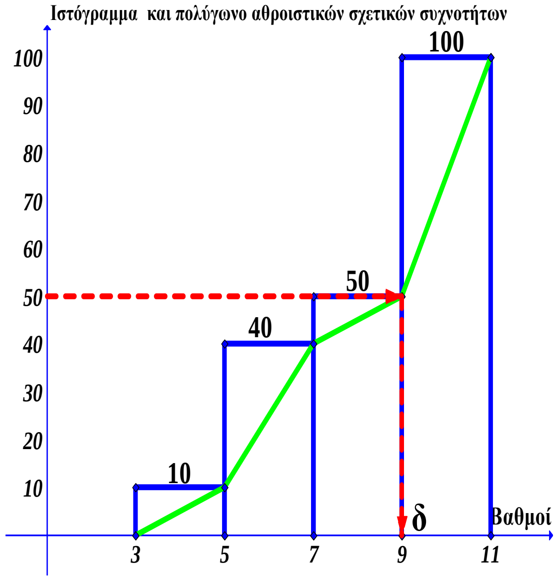
Έχουμε $\bar{\mathbf{x}}=\dfrac{9v_1+v_3}{9v_1+v_3}=1^{\circ}\mathbf{C}$

Ε2. **α).** Αν $\mathbf{v_1=v_3}$ ο πίνακας γίνεται

Ι	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	v_i	$v_i\,x_i$	f_i	$F_i\%$
1	$[-4,-2)$	-3	v_1	$-3v_1$	0,1	10
2	$[-2,0)$	-1	$3v_1$	$-3v_1$	0,3	40
3	$[0,\ 2)$	1	v_1	v_1	0,1	50
4	$[2,\ 4)$	3	$5v_1$	$15v_1$	0,5	100
Σύνολα			$10v_1$	$10v_1$	1	

Όταν έχουμε ομαδοποιημένες τιμές η διάμεσος βρίσκεται γραφικά.

- Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Στον κάθετο άξονα φέρνουμε από το $F_i\% = 50\%$ (ή 0,5) παράλληλη ευθεία στον οριζόντιο άξονα.
- Στο σημείο όπου τέμνει το πολύγωνο φέρνουμε κάθετη ευθεία στον άξονα των τιμών x_i.



- Στο σημείο όπου τέμνει τον άξονα της μεταβλητής είναι η τιμή της διαμέσου. (ακριβής προσδιορισμός με όμοια τρίγωνα)

Άρα έχουμε $\delta = 2$.

β) Στο $[0, 2)$ βρίσκεται το 10% των ψυγείων, οπότε θεωρώντας ότι τα ψυγεία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις, στο $[0,\ 0.5]$ θα βρίσκεται το $2,5\%$ των ψυγείων. Επομένως στο $[-4,\ 0,5)$ βρίσκεται το $42,5\%$ των ψυγείων.

Έχουμε ότι το $42,5\%$ των ψυγείων είναι 34. Οπότε τα συνολικά ψυγεία είναι

$$34\frac{100}{42,5} = 80.$$

ΘΕΜΑ 54

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ θετικές παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \nu x^2 - 2(\sum_{i=1}^{\nu} x_i)x + \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$ η οποία έχει ελάχιστο το 25ν.

Ε1. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \bar{x}$.

Ε2. Να βρείτε τη τυπική απόκλιση s.

Ε3. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $\omega_i = f'(x_i),\quad i = 1, 2, ..., \nu$.

Ε4. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $y_i = 3x_i + 100$, με $i = 1, 2, ..., \nu$ οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_y = 0,06$ και για τις οποίες ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - 250)^2 = 22500.$$

α. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι ομοιογενές.

β. Να βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων.
γ. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$.

Πηγή: Βασίλης Παπαδάκης. (Εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=\nu x^2-2\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)x+\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με $f'(x)=2\nu x-2\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)$ και

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\nu x-2\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)=0\Leftrightarrow \nu x=\sum_{i=1}^{\nu}x_i\Leftrightarrow x=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}=\bar{x}$$ και

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 2\nu x-2\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)>0\Leftrightarrow \nu x>\sum_{i=1}^{\nu}x_i\overset{\nu>0}{\Leftrightarrow}x>\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}=\bar{x}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \bar{x}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\bar{x},\ +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\bar{x}$, με τιμή $f(\bar{x})=25\nu$.

x	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Ε2. Από $f(\bar{x})=25\nu\Leftrightarrow \nu(\bar{x})^2-2\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)\bar{x}+\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right)=25\nu\Leftrightarrow$

$$(\bar{x})^2-2\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right)=25\nu\Leftrightarrow$$

$$(\bar{x})^2-2\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right)}{\nu}=25\nu\Leftrightarrow(\bar{x})^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2+\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\right)}{\nu}=25\nu\Leftrightarrow$$

$$(\bar{x})^2-2(\bar{x})^2+\left(\overline{x^2}\right)=25\Leftrightarrow\left(\overline{x^2}\right)-(\bar{x})^2=25,\ \ (1)$$

Και επειδή

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2=\left(\overline{x^2}\right)-\left(\bar{x}\right)^2 \text{ από}$$

(1) έχουμε $s^2=25\overset{s>0}{\Rightarrow}s=5.$

Ε3. Έχουμε $f'(x)=2\nu x-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$. Τότε $\omega_i=f'(x_i)=2\nu x_i-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$.

Θέτουμε $2\nu x_i=z_i$. Τότε $\omega_i=z_i-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$.

Από γνωστή εφαρμογή έχουμε $\bar{z}=2\nu\bar{x}$. Επιπλέον

$$\bar{\omega}=\bar{z}-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i=2\nu\bar{x}-2\nu\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}=2\nu\bar{x}-2\nu\bar{x}=0.$$

Ε4. **α)** Έχουμε $y_i=3x_i+100$. Τότε από γνωστή εφαρμογή έχουμε ότι $\bar{y}=3\bar{x}+100$ και $S_y=3S_x=15$. Άρα

$CV_y=0{,}06\Leftrightarrow\frac{S_y}{\bar{y}}=0{,}06\Leftrightarrow\frac{3S_x}{3\bar{x}+100}=0{,}06\Leftrightarrow\bar{x}=50$. Οπότε $CV_x=\frac{S_x}{\bar{x}}=0{,}1$ και συνεπώς το δείγμα είναι ομοιογενές.

β) Έχουμε $\bar{y}=3\bar{x}+100=250$. Άρα

$$S_y^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2\Leftrightarrow 15^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-250)^2\Leftrightarrow \nu=100$$

γ) Είναι $s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2-(\bar{x})^2\Leftrightarrow 25=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2-50^2\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2=2525\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{100}x_i^2=252.500.$$

Επίσης $f(0)=\sum_{i=1}^{100}x_i^2=252.500$. Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $M(0,\ \ 252.500)$.

ΘΕΜΑ 55 — Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω $t_1,t_2,...,t_\nu$ με $\nu\in N^*$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος με διασπορά $s^2=64$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}[(t_1-x)^3+(t_2-x)^3+...+(t_\nu-x)^3]$.

Ε1. Αν $f'(\bar{x})=6400$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Ε2. Αν $f''(2\bar{x})=16000$ να βρείτε την μέση τιμή του δείγματος.

Ε3. Να δειχθεί ότι καμία από τις παρατηρήσεις του δείγματος $t_1, t_2, ..., t_\nu$ δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

Λύση:

Ε4. Αρχικά έχουμε $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu}$ και

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + ... + (t_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + ... + (t_\nu - x)^2$$

Έχουμε $f'(\bar{x}) = 6400 \Leftrightarrow (t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + ... + (t_\nu - \bar{x})^2 = 6400 \Leftrightarrow$

$\nu s^2 = 6400 \Leftrightarrow 64\nu = 6400 \Leftrightarrow \nu = 100$

Ε1. Η f' παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f''(x) = -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) - ... - (t_{100} - x)$ και

$f''(2\bar{x}) = 16000 \Leftrightarrow -2(t_1 - 2\bar{x}) - 2(t_2 - 2\bar{x}) - ... - (t_{100} - 2\bar{x}) = 16000 \Leftrightarrow$

$-2(t_1 + t_2 + ... + t_{100}) + 400\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow$

$-2 \cdot 100\bar{x} + 400\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow 200\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow \bar{x} = 80$

Ε2. $s^2 = \dfrac{(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2}{100} \Leftrightarrow$

$(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2 = 6400$

Έστω ότι υπάρχει μια τουλάχιστον παρατήρηση αρνητική, για παράδειγμα $t_1 = -\alpha, \alpha > 0$, τότε $(t_1 - 80)^2 = (-\alpha - 80)^2 = (\alpha + 80)^2 > 6400$. Οπότε $(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2 > 6400$, άτοπο άρα καμία από τις παρατηρήσεις του δείγματος $t_1, t_2, ..., t_\nu$ δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

ΘΕΜΑ 56

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω το δείγμα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ με μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και συντελεστή μεταβολής $CV = 25\ \%$.

Να αποδειχθεί ότι:

Ε1. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 1$.

Ε2. Το κλάσμα $A = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2}{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}$ είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος ν του δείγματος.

Ε3. Υπάρχει παρατήρηση x_κ που βρίσκεται μεταξύ του 3 και 5;

Λύση:

Ε1. Έχουμε: $\mathbf{CV=\frac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{s}{4} \Leftrightarrow s=1}$.

Ε2. Από τον τύπο της διακύμανσης για μεμονωμένες παρατηρήσεις έχουμε

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\overline{x}\right)^2$$

Οπότε $\mathbf{s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-16 \overset{s=1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=17 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=17\nu}$.

Επίσης $\mathbf{\overline{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i=\nu\overline{x} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i=4\nu}$. Άρα $\mathbf{A=\frac{17\nu}{4\nu}=\frac{17}{4}}$.

Ε3. Έχουμε ότι $\mathbf{s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 \overset{s=1}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\nu}$.

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις $\mathbf{x_i}$ είναι $\mathbf{x_i<3}$ ή $\mathbf{x_i>5}$, τότε έχουμε

$$x_i<3 \Leftrightarrow x_i-\overline{x}<-1 \Rightarrow \left(x_i-\overline{x}\right)^2>1 \text{ και } x_i>5 \Leftrightarrow x_i-\overline{x}>1 \Rightarrow \left(x_i-\overline{x}\right)^2>1.$$

Οπότε $\mathbf{\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{x}\right)^2>\nu}$, **άτοπο.** Άρα υπάρχει παρατήρηση $\mathbf{x_k}$ με $\mathbf{3 \le x_k \le 5}$.

ΘΕΜΑ 57

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας, στον οποίο οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους.

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	f_i	N_i	$F_i\%$	$\nu_i x_i$	$\nu_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2$
1	[...,...)		12					
2	[5, ...)			0,18				
3	[...,...)		15					
4	[...,...)		10		55			
5	[...,...)	12				75		
6	[...,...)				83			
7	[...,...)							
Σύνολα			$9\nu_1+\nu_3$					

Ε1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με **2.**

Ε2. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Ε3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε4. Να βρείτε τη διάμεσο.

Ε5. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με **12.**

Ε6. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή απο **6** έως **12.**

Λύση:

Ε1. Έστω α το κατώτερο όριο της $1^{ης}$ κλάσης και c το κοινό πλάτος των κλάσεων, επειδή τα αριστερά άκρα των κλάσεων διαφέρουν κατά c όπως και οι κεντρικές τιμές θα ισχύουν:

$$\begin{cases} \alpha+c=5 \\ \dfrac{(\alpha+4c)+(\alpha+c+4c)}{2}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+c=5 \\ \dfrac{2\alpha+9c}{2}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+c=5 \\ 2\alpha+9c=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+c=5 \\ 7c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ c=2 \end{cases}$$

Έχουμε διαδοχικά τα παρακάτω:

$N_1=\nu_1=12$, $N_3=N_4-\nu_4=45$, $N_2=N_3-\nu_3=30$, $\nu_2=N_2-N_1=18$

$\nu_2=\nu f_2 \Rightarrow \nu=100$. Άρα $N_i=F_i\%$ τότε $f_1=0{,}2$, $f_3=0{,}5$, $f_4=0{,}1$.

Και $F_1\%=12$, $F_2\%=30$, $F_4\%=55$, $F_5\%=75$.

Οπότε $N_5=75 \Rightarrow \nu_5=20$, $N_6=83 \Rightarrow \nu_6=8 \Rightarrow \nu_7=17$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	f_i	N_i	$F_i\%$	$\nu_i x_i$	$\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
1	[3,5)	4	12	0,12	12	12	48	432
2	[5, 7)	6	18	0,18	30	30	108	288
3	[7,9)	8	15	0,15	45	45	120	60
4	[9,11)	10	10	0,10	55	55	100	0
5	[11,13)	12	20	0,20	75	75	240	80
6	[13,15)	14	8	0,08	83	83	112	128
7	[15,17)	16	17	0,17	100	100	272	612
Σύνολα			100				1000	1600

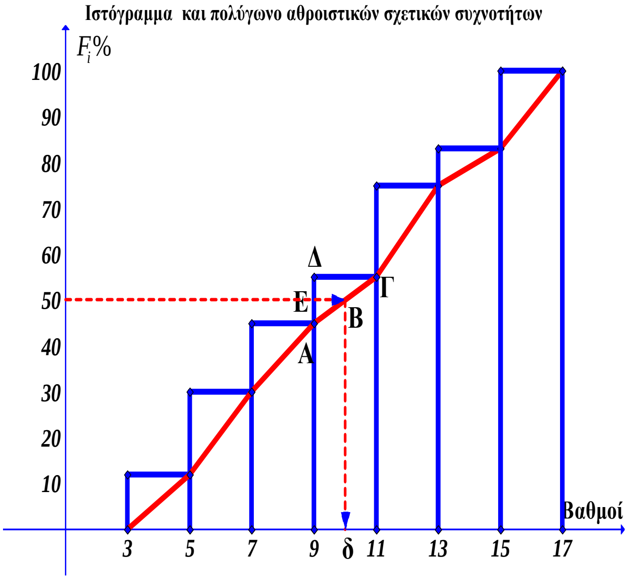
Ε2. Είναι $\bar{x}=\dfrac{1000}{100}=10$ και $s^2=\dfrac{1600}{100}=16$.

Οπότε $\mathbf{s=4}$. Άρα $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{4}{10}=0{,}4>0{,}1}$.

Δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε3. Αναζητούμε την τετμημένη $\boldsymbol{\delta}$ του σημείου **Β.** Από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathbf{\overset{\Delta}{AB}E \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma}\Delta}$ έχουμε:

$$\mathbf{\frac{BE}{\Gamma\Delta}=\frac{EA}{\Delta A}\Rightarrow\frac{\delta-9}{2}=\frac{50-45}{55-45}\Rightarrow\delta=10}$$



Επειδή $\mathbf{12}$ είναι η κεντρική τιμή της $\mathbf{5^{ης}}$ κλάσης, τιμή τουλάχιστον $\mathbf{12}$ έχουν οι μισές παρατηρήσεις της κλάσης $\mathbf{[11,\ 13)}$, θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις.

Ε5. Μαζί με τις παρατηρήσεις των κλάσεων $\mathbf{[13,\ 15)}$ και $\mathbf{[15,\ 17)}$

Συνολικά $\mathbf{\frac{\nu_5}{2}+\nu_6+\nu_7=\frac{20}{2}+8+17=35}$

Ε6. Επειδή η τιμή $\mathbf{6}$ είναι η κεντρική τιμή της $\mathbf{2^{ης}}$ κλάσης και το $\mathbf{12}$ της $\mathbf{5^{ης}}$ κλάσης, το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή στο διάστημα $\mathbf{[6,\ 12)}$ είναι

$\mathbf{\frac{f_2\%}{2}+f_3\%+f_4\%+\frac{f_5\%}{2}=(9+15+10+10)\%=44\%}$, θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις.

ΘΕΜΑ 58

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω $\mathbf{4,-3,-x,-2,x^2,2}$ με $\mathbf{x\in(0,1)}$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του δείγματος γίνεται ελάχιστη, όταν και η διάμεσος γίνεται ελάχιστη.

Ε2. Για την τιμή $\mathbf{x=x_0}$ όπου $\mathbf{x_0}$ το σημείο που η μέση τιμή γίνεται ελάχιστη, να βρείτε:

α). Τις παρατηρήσεις του δείγματος.

β). Τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

γ). Την τυπική απόκλιση.

(Γ. & Μ. Λασκαρίδης, Α. Μουνδρέας, Μ. Πατρινός)

Λύση:

Ε1. Επειδή $x\in(0,1)$, οι παρατηρήσεις διατάσσονται σε αύξουσα σειρά ως εξής

$$-3<-2<-x<x^2<2<4.$$

Οπότε $\bar{x}=\dfrac{-3-2-x+x^2+2+4}{6}=\dfrac{x^2-x+1}{6}$ και $\delta=\dfrac{x^2-x}{2}$

Θεωρούμε $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{6},x\in(0,1)$. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $f'(x)=\dfrac{2x-1}{6},x\in(0,1)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{6}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2},1)$.

x	0	½	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	O.E	↗

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\frac{1}{2}$. Θεωρούμε $g(x)=\dfrac{x^2-x}{2},x\in(0,1)$.

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{2x-1}{2},x\in(0,1)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2},1)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	O.E	↗

Επομένως η f και η g παρουσιάζουν ελάχιστο στην ίδια θέση $x_0=\frac{1}{2}$.

Ε2. **α)** Για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε τις εξής παρατηρήσεις $-3,-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},2,4$

β) Οι παρατηρήσεις βρίσκονται σε αύξουσα σειρά και επειδή το πλήθος τους είναι άρτιο, η διάμεσος θα ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων t_3, t_4. Επομένως είναι $\delta = \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{2} = -\dfrac{1}{8}$

και $\bar{x} = \dfrac{-3-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2+4}{6} = \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{6} = \dfrac{\frac{3}{4}}{6} = \dfrac{1}{8}$.

γ)
Η διακύμανση υπολογίζεται από το τύπο

$$s^2 = \frac{(-3-\frac{1}{8})^2+(-2-\frac{1}{8})^2+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8})^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})^2+(2-\frac{1}{8})^2+(4-\frac{1}{8})^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{(-\frac{25}{8})^2+(-\frac{17}{8})^2+(-\frac{5}{8})^2+(\frac{1}{8})^2+(\frac{15}{8})^2+(\frac{31}{8})^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\frac{625+289+25+1+225+961}{64}}{6} = \frac{2126}{64 \cdot 6} = \frac{1063}{192} \text{ άρα } s = \sqrt{\frac{1063}{192}} \approx 2,35 .$$

ΘΕΜΑ 59 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Σε 10 καταστήματα στην επαρχία συναντήσαμε τις παρακάτω τιμές πώλησης ενός προϊόντος (σε λεπτά) $74, 78, 76, 70, 80, 74, 76, 78, 72, 72$.

Ε1. Να βρείτε τα παρακάτω μέτρα για το παραπάνω δείγμα:

α) Μέση τιμή **β)** Διάμεσο **γ)** Εύρος

δ) Διακύμανση **ε)** Να κρίνετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

Αν για τα ίδια προϊόντα, από έρευνα σε 15 καταστήματα της Αθήνας, οι τιμές πώλησης (σε λεπτά) βρέθηκε ότι έχουν μέση τιμή 70. Να βρείτε

Ε2. Τη μέση τιμή πώλησης του προϊόντος για όλα τα καταστήματα της Αθήνας και της επαρχίας.

Ε3. Ποιά πρέπει να είναι η μεγαλύτερη τιμή της τυπικής απόκλισης για την τιμή πώλησης του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα, ώστε το συνολικό δείγμα να παραμένει ομοιογενές;

Λύση:

Ε1. **α)** Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{750}{10} = 75$

β) Σε αύξουσα σειρά οι παρατηρήσεις είναι $70,72,72,74,74,76,76,78,78,80$.
Το πλήθος τους είναι άρτιο και συνεπώς η διάμεσός τους είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta = \frac{74+76}{2} = 75$.

γ) $R = 80 - 70 = 10$.

δ) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

I	x_i	v_i	$v_i x_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
1	70	1	70	25	25
2	72	2	144	9	18
3	74	2	144	1	2
4	76	2	152	1	2
5	78	2	156	9	18
6	80	1	80	25	25
Σύνολα		10	750		90

Οπότε $S^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 v_i = 9$.

ε) Έχουμε $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3}{75} = 0,04 \le 0,1$ και συνεπώς το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε2. Αν x_i οι τιμές στα προϊόντα της επαρχίας και y_i οι τιμές στα προϊόντα της Αθήνας, τότε η μέση τιμή πώλησης είναι

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{15} y_i}{10+15} = \frac{10\bar{x} + 15\bar{y}}{25} = 72$$

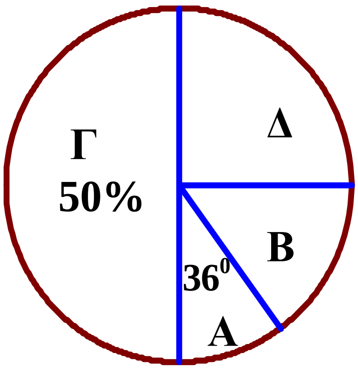
Ε3. Για να είναι ομοιογενές το δείγμα πρέπει

$CV \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{S_z}{\bar{z}} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{S_z}{72} \le 0,1 \Leftrightarrow S_z \le 7,2$. Άρα $S_{max} = 7,2$.

ΘΕΜΑ 60

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Σε μια γραπτή εξέταση αγγλικών οι βαθμοί επιτυχίας είναι **Α,Β,Γ** ενώ **Δ** ο βαθμός αποτυχίας. Τα αποτελέσματα ενός δείγματος **500** μαθητών που εξετάστηκαν γραπτά δίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Ε1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί:

Ι	**Βαθμός εξέτασης**	**Αριθμός μαθητών**	f_i	α_i	F_i
1	**Α**				
2	**Β**		**0,15**		
3	**Γ**				
4	**Δ**				
Σύνολα					

Ε2. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Ε3. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν επιτύχει στις εξετάσεις.

Ε4. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν αποτύχει στις εξετάσεις.

Ε5. Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών και το ποσοστό που έχει πάρει βαθμό **Β** ή **Γ.**

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 500$

Από τα δεδομένα του κυκλικού διαγράμματος και του πίνακα συχνοτήτων έχουμε

1η Γραμμή

Είναι $\alpha_1 = 360^0 \cdot f_1 \Leftrightarrow f_1 = \dfrac{\alpha_1}{360^0} \Leftrightarrow f_1 = \dfrac{36^0}{360^0} \Leftrightarrow f_1 = 0,1$. Άρα

$\nu_1 = \nu \cdot f_1 = 500 \cdot 0,1 = 50$

2η Γραμμή

Είναι $\mathbf{f_2 = 0{,}15}$ άρα $\mathbf{\nu_2 = \nu \cdot f_2 = 500 \cdot 0{,}15 = 75}$ και $\mathbf{\alpha_2 = 360^0 \cdot f_2 = 360^0 \cdot 0{,}15 = 54^0}$

3η Γραμμή

Είναι $\mathbf{f_3 = 50\% = 0{,}5}$ άρα $\mathbf{\nu_3 = \nu \cdot f_3 = 500 \cdot 0{,}5 = 250}$ και

$\mathbf{\alpha_2 = 360^0 \cdot f_3 = 360^0 \cdot 0{,}5 = 180^0}$

4η Γραμμή

Είναι $\mathbf{\alpha_4 = 360^0 - 180^0 - 54^0 - 36^0 = 90}$, $\mathbf{\nu_3 = 500 - 250 - 75 - 50 = 125}$ και

$\mathbf{f_4 = 1 - 0{,}5 - 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}25}$

Τέλος για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες $\mathbf{F_i}$ ισχύουν,

$\mathbf{F_1 = f_1 = 0{,}1}$, $\mathbf{F_2 = F_1 + f_2 = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25}$,

$\mathbf{F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}25 + 0{,}50 = 0{,}75}$, $\mathbf{F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}75 + 0{,}25 = 1}$

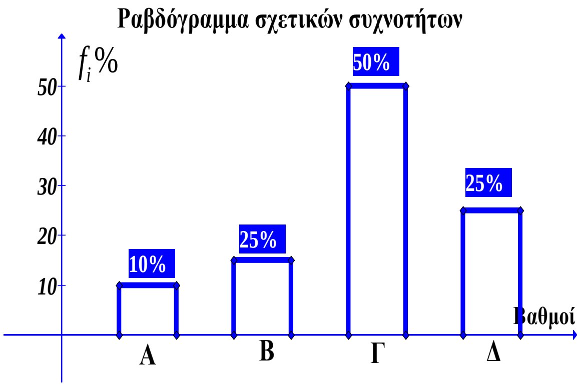
Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία ο πίνακας συχνοτήτων έχει ως εξής

I	Βαθμός εξέτασης	Αριθμός μαθητών	f_i	α_i	F_i
1	Α	50	0,10	36^0	0,10
2	Β	75	0,15	54^0	0,25
3	Γ	250	0,50	180^0	0,75
4	Δ	125	0,25	90^0	1
	Σύνολα	500	1	360^0	

Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το **25%** των μαθητών, δηλαδή $\mathbf{\frac{25}{100} \cdot 500 = 125}$ μαθητές.

Το **65%** των μαθητών έχει πάρει βαθμό **Β, ή C**, δηλαδή $\mathbf{\frac{65}{100} \cdot 500 = 325}$ μαθητές.

Ε2. Έτσι σχηματίζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Ε3. Στις εξετάσεις έχει πετύχει το **75%** των μαθητών, δηλαδή $\mathbf{\frac{75}{100} \cdot 500 = 375}$ μαθητές.

Ε4. Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το **25%** των μαθητών, δηλαδή $\mathbf{\frac{25}{100} \cdot 500 = 125}$ μαθητές.

Ε5. Το **65%** των μαθητών έχει πάρει βαθμό **Β, ή C**, δηλαδή $\mathbf{\frac{65}{100} \cdot 500 = 325}$ μαθητές.

Πιθανότητες

Συλλογή 40 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 20/12/2011 – 16/01/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Πιθανότητες :–Μια συλλογή 40 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21476

Έλυσαν οι:

Αποστόλης Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Ηλίας Καμπελής
Θάνος Μάγκος
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Περικλής Παντούλας
Στάθης Κούτρας
Στραγάλης Χρήστος
Χρήστος Τσιφάκης
Χρήστος Κανάβης
Dr. tasos

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 61

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Για ένα φάρμακο σε πειραματικό στάδιο αποδείχθηκε ότι δημιουργεί δύο ειδών παρενέργειες. Η πιθανότητα να δημιουργήσει πρόβλημα στην όραση του ασθενούς είναι μικρότερη του **0,07** , η πιθανότητα να δημιουργήσει δυσλειτουργία στο γαστρεντερικό είναι **0,05** και τέλος η πιθανότητα να εμφανιστούν παρενέργειες και στην όραση και στο γαστρεντερικό είναι **0,02**.
Το φάρμακο επιτρέπεται να κυκλοφορήσει , αν η πιθανότητα να μην δημιουργήσει παρενέργειες είναι μεγαλύτερη του **0,9**.
Να εξετάσετε αν το φάρμακο θα κυκλοφορήσει.

Πηγή: Θοδωρής Ανδριόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας

Λύση:

Έστω $\mathbf{A,B}$ τα ενδεχόμενα το φάρμακο να δημιουργεί παρενέργειες στην όραση και στο γαστρεντερικό αντίστοιχα. Τότε: $\mathbf{P(A)<0,07, P(B)=0,05, P(A\cap B)=0,02}$.
Η πιθανότητα να δημιουργεί παρενέργειες σε τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι
$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)<0,07+0,05-0,02=0,10}$.
Άρα, η πιθανότητα να μη δημιουργήσει παρενέργειες είναι

$\mathbf{P\left[(A\cup B)\right]'=1-P(A\cup B)>1-0,10=0,90}$, άρα δεν κυκλοφορεί.

ΘΕΜΑ 62

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δύο φίλοι θα παίξουν τάβλι και αποφασίζουν νικητής να είναι εκείνος που θα κερδίσει τρεις συνολικά παρτίδες ή δύο συνεχόμενες παρτίδες.
Αν με $\mathbf{\alpha, b}$ συμβολίσουμε τα ενδεχόμενα νίκης του **1ου** και του **2ου** αντίστοιχα σε μία παρτίδα

Ε1. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

Ε2. Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα:
- **A:** «Νικητής είναι ο 1ος»,
- **B:** «Ο 2ος κερδίζει την 3η παρτίδα» και
- **C:** «Ο 1ος δε χάνει καμία παρτίδα».

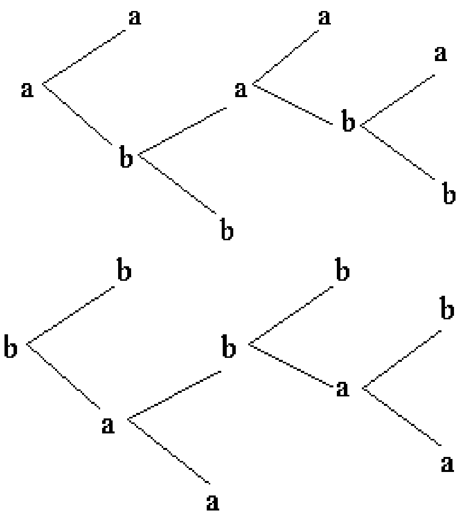
Ε3. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $\mathbf{D=A\cap C,\ E=B\cup C',\ Z=A\cap B}$.

Ε4. Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα:
- **K:** «Ο 1ος είναι νικητής και ο 2ος κερδίζει την 3η παρτίδα» ,
- **L:** «Ο 2ος είναι νικητής και ο 1ος χάνει την 1η παρτίδα»

Ε5. Αν θεωρήσουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα, να βρεθούν οι πιθανότητες $\mathbf{P(A), P(B), P(K), P(L)}$.

Λύση:

Ε1. Με ένα δενδρόγραμμα προκύπτει



$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(a,a),(a,b,a,a),(a,b,a,b,a),\\(a,b,a,b,b),(a,b,b),\\(b,a,a),(b,a,b,a,a),\\(b,a,b,a,b),(b,a,b,b),(b,b)\end{array}\right\}$$

Ε2. Τα ενδεχόμενα $\mathbf{A,B,C}$ με αναγραφή στοιχείων:

$$\mathbf{A=\{(a,a),(a,b,a,a),(a,b,a,b,a),(b,a,a),(b,a,b,a,a)\}}$$

$$\mathbf{B=\{a,b,b),(b,a,b,a,a),(b,a,b,a,b),(b,a,b,b)\}}\ \text{και}\ \mathbf{C=\{(\alpha,\alpha)\}}$$

Ε3. Επίσης,

$$\mathbf{C'=\Omega-C}$$

$$\mathbf{D=A\cap C=\{(a,a)\}}$$

$$\mathbf{E=B\cup C'=\left\{\begin{array}{c}(a,b,b),(b,a,b,a,a),((b,a,b,a,b),(b,a,b,b),\\(a,b,a,a),(a,b,a,b,a),(a,b,a,b,b),(b,a,a),(b,b)\}\end{array}\right\}}$$

$$\mathbf{Z=A\cap B=\{(b,a,b,a,a)\}}$$

Ε4. Ακόμα, $\mathbf{K=\{(b,a,b,a,a)\},L=\{(b,a,b,a,b),(b,a,b,b),(b,b)\}}$

Ε5. Τέλος, αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας και επομένως είναι,

$$\mathbf{P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{5},}$$

$$\mathbf{P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{10},\ P(L)=\frac{N(L)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10}}$$

ΘΕΜΑ 63

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Σε ένα τουρνουά μπάσκετ παίρνουν μέρος **25** ομάδες. Το **80%** των ομάδων προκρίνεται στον ημιτελικό γύρο και το **40%** από αυτές που προκρίνονται συμμετέχουν στον τελικό. Αν διαλέξουμε μια ομάδα στην τύχη (για τις επιδόσεις των ομάδων δεν γνωρίζουμε τίποτα), τότε:

Ε1. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α:"Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό ή στον τελικό".
Β:" Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό, αλλά όχι στον τελικό".
Γ: "Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον τελικό".
Δ: " Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον ημιτελικό ή παίζει στον τελικό".

Ε2. Σε ποιο από τα παραπάνω ενδεχόμενα μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε;

Πηγή: Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Η: " η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό",
Τ:" η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον τελικό".
Το Τ είναι υποσύνολο του Η, έτσι $\mathbf{H\cup T=H}$ **και** $\mathbf{H\cap T=T}$

Αφού διαλέγουμε μια ομάδα στην τύχη τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Επομένως είναι,

$$\mathbf{N(H)=\frac{80}{100}25=20,\ P(H)=\frac{N(H)}{N(\Omega)}=\frac{20}{25},}$$

$$\mathbf{N(T)=\frac{40}{100}N(H)=8,\ P(T)=\frac{N(T)}{N(\Omega)}=\frac{8}{25}}$$

Είναι $\mathbf{P(A)=P\left(H\cup T\right)=P(H)=\frac{20}{25}=0,8.}$

$$\mathbf{P(B)=P(H-T)=P(H)-P\left(H\cap T\right)=P(H)-P(T)=\frac{20}{25}-\frac{8}{25}=\frac{12}{25}}$$

$$\mathbf{P(\Gamma)=P(T')=1-P(T)=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}}$$

$$\mathbf{P(\Delta)=P(T\cup H')=P(T)+P(H')-P(T\cap H')=1-P(H)+P(T)=1-\frac{20}{25}+\frac{8}{25}=\frac{13}{25}}$$

Αφού είναι $\mathbf{P(T\cap H')=P\left(T-H\right)=0}$ διότι για να προκριθεί μια ομάδα στον τελικό πρέπει να νικήσει στον ημιτελικό.

Ε2. Είναι $\mathbf{P(A)>P(\Gamma)>P(\Gamma)>P(B)}$, άρα συμφέρει να στοιχηματίσουμε στο ενδεχόμενο Α.

ΘΕΜΑ 64

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Σε ένα χωριό υπάρχουν $\mathbf{v}$ άνθρωποι που ο καθένας είναι $\mathbf{x_1,x_2,...,x_v}$ ετών.

Ε1. Αν το δείγμα $\mathbf{x_1,x_2,...,x_v}$ των ηλικιών τους έχει $\mathbf{CV=20\%}$ και μετά από $\mathbf{25}$ χρόνια γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές , να βρείτε :

α) Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ηλικιών τους.
β) Τη μέση τιμή του δείγματος $\mathbf{x_1^2,x_2^2,...,x_v^2}$.

γ) Αν η κατανομή είναι κανονική και ο μικρότερος σε ηλικία είναι **10** χρονών, να βρείτε προσεγγιστικά την μεγαλύτερη ηλικία.

Ε2. Στο παραπάνω χωριό υπάρχουν μόνο δύο καφενεία , το **Α** και το **Β**. Αν το **30%** των κατοίκων πηγαίνει στο καφενείο **Α** , το **60%** δεν πηγαίνει στο καφενείο **Β** ενώ το **50%** πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον από τα δύο καφενεία, να βρείτε :

α) Ποιο ποσοστό των κατοίκων πηγαίνει και στα δύο καφενεία.

β) Από αυτούς που πηγαίνουν μόνο στο ένα καφενείο ποιοι είναι περισσότεροι; Αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο **Α** ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο **Β**;

Ε3. Ο κάθε ένας από τους **ν** κατοίκους αγοράζει έναν λαχνό. Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το **1** έως το **ν** και έχουν την ίδια πιθανότητα να κληρωθούν. Αν η πιθανότητα « να κληρωθεί περιττός αριθμός » είναι κατά **0,8%** μεγαλύτερη από την πιθανότητα « να κληρωθεί άρτιος » να βρείτε πόσα άτομα έχει το χωριό.

Λύση:

Ε1. α) Σήμερα: $\mathbf{CV = 0,2 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0,2 \Leftrightarrow s = 0,2\bar{x}}$ **(1).**

Σε **25** χρόνια, θα έχουμε $\mathbf{x_i' = x_i + 25}$ οπότε $\mathbf{CV' = 0,1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}+25} = 0,1 \Leftrightarrow}$

$$\mathbf{\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0,2\bar{x} = 0,1(\bar{x}+25) \Leftrightarrow 0,1\bar{x} = 2,5 \Leftrightarrow \bar{x} = 25} \text{ και } \mathbf{s = 5}.$$

β) Είναι

$$\mathbf{s^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2\right\} = 25 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}[(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2) - \frac{1}{\nu}(x_1 + x_2 + ... + x_\nu)^2] = 25 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2}{\nu} - (\bar{x})^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2}{\nu} = 650 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 650}$$

γ) Στην κανονική κατανομή ισχύει,

$$\mathbf{R \approx 6s \Leftrightarrow x_{max} - x_{min} \approx 30 \Leftrightarrow x_{max} \approx 30 + 10 = 40}$$

Ε2.

Έστω **Α**={το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει στο καφενείο **Α** }και **Β**={το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει στο καφενείο **Β** }

Οπότε $\mathbf{P(A) = 0,3}$,

$\mathbf{P(B') = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,4}$,

$\mathbf{P(A \cup B) = 0,5}$.

α) Ισχύει $\mathbf{P(A \cup B) = 0,5 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow 0,3 + 0,4 - P(A \cap B) = 0,5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2}$.

Άρα και στα δυο καφενεία πηγαίνει το **20%**.

β) Η πιθανότητα να πηγαίνει μόνο στο $\mathbf{A}$ είναι

$\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,3-0,2=0,1}$ και

Η πιθανότητα να πηγαίνει μόνο στο $\mathbf{B}$ είναι

$\mathbf{P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0,4-0,2=0,2>P(A-B)}$.

Άρα μονό στο καφενείο $\mathbf{B}$ πηγαίνουν περισσότεροι.

Ε3. Το πλήθος δε μπορεί να είναι άρτιος, γιατί τότε θα είχαμε ίδιο πλήθος άρτιων και περιττών σε αυτό, άτοπο, αφού η πιθανότητα των περιττών αριθμών είναι μεγαλύτερη του **50%**, άρα σημαίνει ότι στο δείγμα έχουμε περισσότερους περιττούς αριθμούς από άρτιους.

Έστω ότι $\mathbf{v=2k+1, k\in\mathbb{N}}$. Τότε, οι περιττοί θα είναι κατά ένας περισσότεροι από τους άρτιους σε πλήθος . Άρα $\mathbf{N(A)=k, N(\Pi)=k+1}$.

Ισχύει: $\mathbf{P(\Pi)=P(A)+\frac{0,8}{100}\Leftrightarrow\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k}{2k+1}+\frac{0,8}{100}\Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow\frac{1}{2k+1}=\frac{0,8}{100}\Leftrightarrow 2k+1=\frac{100}{0,8}\Leftrightarrow 2k+1=125\Leftrightarrow v=125}$.

ΘΕΜΑ 65

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\eta\mu x-2x,\ x\in R}$ και έστω **A, B** δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου **Ω.**

Ε1. Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε2. Αν $\mathbf{A\subseteq B}$ να αποδείξετε ότι $\mathbf{2P(A)+\eta\mu P(B)\le 2P(B)+\eta\mu P(A)}$.

Ε3. Αν $\mathbf{P(A)=\frac{\pi}{4}}$, να αποδείξετε ότι: $\mathbf{2f(P(A\cap B))\ge\sqrt{2}-\pi}$.

Ε4. Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{f(P(A-B))\le 0}$.

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\mathbf{f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2<0}$ αφού $\mathbf{\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-2\le 1-2=-1<0}$

άρα η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

Ε2. Έχουμε, $\mathbf{A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(P(A))\ge f(P(B))\Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow\eta\mu(P(A))-2P(A)\ge\eta\mu(P(B))-2P(B)\Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow\eta\mu(P(A))+2P(B)\ge\eta\mu(P(B))+2P(A)}$

Ε3.

$$A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(P(A\cap B))\ge f(P(A))\Rightarrow f(P(A\cap B))\ge f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(P(A\cap B))\ge \eta\mu\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(P(A\cap B))\ge\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2\cdot f(P(A\cap B))\ge\sqrt{2}-\pi$$

Ε4. Έχουμε,

$$\varnothing\subseteq A-B\Rightarrow P(\varnothing)\le P(A-B)\Rightarrow 0\le P(A-B)\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(0)\ge f(P(A-B))\Rightarrow f(P(A-B))\le 0$$

ΘΕΜΑ 66

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=[P(A)]^2x^3-[7P(A)-3]x-x\ln x+P(B), x>0$, όπου $P(A)$, $P(B)$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων αντίστοιχα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Ε1. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f έχει για $x=1$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ε2. Αν $P(A)=\frac{1}{3}, f(1)=\frac{55}{36}$, να δείξετε ότι $P(B)=\frac{3}{4}$ και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A,B είναι ασυμβίβαστα.

Ε3. Να δείξετε ότι $\frac{1}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{3}$.

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=3P^2(A)x^2-7P(A)+2-\ln x$. Η εφαπτομένη είναι οριζόντια, άρα $f'(1)=0\Leftrightarrow 3P^2(A)-7P(A)+2=0$ που έχει ρίζες $2\notin[0,1]$ και $\frac{1}{3}\in[0,1]$. Άρα, $P(A)=\frac{1}{3}$.

Ε2. Για $P(A)=\frac{1}{3}$, έχουμε $f(x)=\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x-x\ln x+P(B), x>0$ ισχύει η σχέση

$$f(1)=\frac{55}{36}\Leftrightarrow\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+P(B)=\frac{55}{36}\Leftrightarrow P(B)=\frac{55-4-24}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}.$$

Έστω ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{13}{12}>1$. Άτοπο διότι είναι $P(A\cup B)\le 1$.

Επομένως τα A, B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ε3. Έχουμε $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = \frac{1}{3}$ (1)

Επίσης,

$$P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{12} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 67

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Σε ένα αεροπορικό ταξίδι, το **20%** των επιβατών είναι άντρες που δεν έχουν ταξιδέψει ξανά με αεροπλάνο. Το **30%** των επιβατών είναι γυναίκες που έχουν ταξιδέψει ξανά και η πιθανότητα κάποιος επιβάτης να είναι άντρας ή να έχει ταξιδέψει ξανά είναι **90%.**
Αν επιλέξουμε τυχαία έναν επιβάτη, να βρείτε την πιθανότητα:

Ε1. Να είναι άντρας.

Ε2. Να είναι άντρας και να έχει ξαναταξιδέψει.

Ε3. Να έχει ξαναταξιδέψει.

Ε4. Να είναι γυναίκα και να μην έχει ξαναταξιδέψει.

Λύση:

Συμβολίζουμε με **Α, Τ** τα ενδεχόμενα "ο επιβάτης είναι άντρας" και "ο επιβάτης να έχει ξαναταξιδέψει με αεροπλάνο", αντίστοιχα.
Τότε έχουμε από τα δεδομένα,

$$P(A \cap T') = P(A - T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$P(A' \cap T) = P(T - A) = \frac{3}{10},$$

$$P(A \cup T) = \frac{9}{10}.$$

Ε1. Είναι $P(T - A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(T) - P(A \cap T) = \frac{3}{10} (1)$

και $P(A \cup T) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) + \underbrace{P(T) - P(A \cap T)}_{(1)} = \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$.

Ε2. Έχουμε $P(A - T) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) - P(A \cap T) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap T) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ (2).

Ε3. Η σχέση **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$P(T)-P(A\cap T)=\frac{3}{10}\Rightarrow P(T)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}.$$

Ε4. Είναι

$$P(A'\cap T')=P(A')-P(A'\cap T'')=P(A')-P(A'\cap T)=1-P(A)-P(T)+P(A\cap T)=$$
$$=1-\left(P(A)+P(T)-P(A\cap T)\right)=1-P(A\cup T)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}.$$

ΘΕΜΑ 68

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Στις πανελλήνιες εξετάσεις το 70% των μαθητών από το νομό Ευβοίας έγραψε καλά στη Βιολογία γενικής παιδείας ή στα μαθηματικά γενικής παιδείας και το 20% έγραψε καλά και στα δύο μαθήματα.

Ε1. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στο ένα μόνο μάθημα.

Ε2. Αν το 40% έγραψε καλά στη Βιολογία, τότε:

- **α.** Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στα μαθηματικά και όχι στη Βιολογία.
- **β.** Αν οι μαθητές που έγραψαν καλά στη Βιολογία και όχι στα μαθηματικά είναι 600, να βρείτε πόσοι μαθητές από το νομό Ευβοίας έλαβαν μέρος στις εξετάσεις.

Πηγή: Ν.Σκομπρής (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:
Μ: ο μαθητής έγραψε καλά στα μαθηματικά
Β: ο μαθητής έγραψε καλά στη βιολογία

Ε1. Έχουμε:

$$P\left[(M-B)\cup(B-M)\right]=P(M-B)+P(B-M)=$$
$$=P(M)-P(M\cap B)+P(B)-P(M\cap B)=$$
$$=P(M\cup B)-P(M\cap B)=0{,}7-0{,}2=0{,}5$$

Ε2. α) Έχουμε: $P(B)=0{,}4$ και

$$P(M\cup B)=P(M)+P(B)-P(M\cap B)\Rightarrow P(M)=0{,}5$$

άρα $P(M-B)=P(M)-P(M\cap B)=0{,}5-0{,}2=0{,}3$

β) Έστω ν το πλήθος των μαθητών,

τότε $P(B-M)=\dfrac{600}{\nu}\Rightarrow 0{,}2=\dfrac{600}{\nu}\Rightarrow \nu=3000.$

ΘΕΜΑ 69

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

Η πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου $\{\lambda\}$ με $\lambda\in\Omega$, δίνεται από τη σχέση $P(\lambda)=\alpha\lambda+\beta$. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\lambda x^2+4x+2012,\ x\in\mathbb{R}$ και το ενδεχόμενο Α του Ω όπου

$$A=\left\{\begin{array}{l}\lambda\in\Omega/\ \text{η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της } C_f,\\ \text{δεν είναι παράλληλη στον άξονα } x'x\end{array}\right\}$$ με $P(A)=\frac{1}{4}$.

Ε1. Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

Ε2. Έστω το ενδεχόμενο:

$$B=\left\{\begin{array}{l}\kappa\in\Omega/\ \text{η διάμεσος των παρατηρήσεων } 0,1,\kappa,2\kappa,\kappa+1\\ \text{είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή τους}\end{array}\right\}$$

α. Να βρεθούν τα στοιχεία του B.

β. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A\cup B'$, και $A-B$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε για κάθε $x\in R,\ f'(x)=x^2-2\lambda x+4$

Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό $f'(x_0)=x_0^2-2\lambda x_0+4$.

Όμως $f'(x_0)\neq 0\Leftrightarrow x_0^2-2\lambda x_0+4\neq 0$

Αυτό συμβαίνει όταν η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta<0\Leftrightarrow\lambda^2-4<0\Leftrightarrow -2<\lambda<2$

Αλλά $\lambda\in\Omega$, οπότε $\lambda=0$ ή 1, οπότε $A=\{0,1\}$

$$P(A)=P(0)+P(1)=\alpha+2\beta\Rightarrow\alpha+2\beta=\frac{1}{4}\quad(1)$$

Επίσης $P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=1\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=\frac{1}{5}\quad(2)$

Από (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha=0{,}05$ και $\beta=0{,}1$

Ε2. α) Έχουμε: $\bar{x}=\frac{4\kappa+2}{5}$

- Αν $\kappa=0$ τότε έχουμε τις παρατηρήσεις: $0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1$ με διάμεσο $\delta=0<\bar{x}$, άρα απορρίπτεται η τιμή $k=0$.

- Αν $\kappa\geq 1$, τότε οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι: $0,\ 1,\ \kappa,\ \kappa+1, 2\kappa$ με διάμεσο $\delta=\kappa$.

Τότε $\delta > \bar{x} \Leftrightarrow \kappa > \frac{4\kappa+2}{5} \Leftrightarrow \kappa > 2$, αλλά $\kappa \in \Omega$, οπότε $\kappa = 3$ ή 4, οπότε $B = \{3,4\}$.

β) Είναι $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = P(3) + P(4) = 7\alpha + 2\beta = 0,35$ επίσης $B' = \{0,1,2\}$

οπότε $A \cup B' = \{0,1,2\}$ και $P(A \cup B') = P(0) + P(1) + P(2) = 3\alpha + 3\beta = 0,45$

Είναι $A - B = A$ οπότε $P(A - B) = P(A) = 0,25$.

ΘΕΜΑ 70

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$. Αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι: $P(A), P(B), P(A-B), P(B-A), P(\Omega)$, $P(\varnothing)$ και έχουν διάμεσο $\delta = \frac{1}{4}$, τότε:

Ε1. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Ε2. Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Ε3. Αν $P(B-A) = \frac{1}{4}$, τότε να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{4}$ και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Λύση:

Ε1. Αφού $A \subseteq B$ έχουμε ότι $A \cap B = A$ και $A - B = \varnothing$.

Επιπλέον: $P(\Omega) = 1$ και $P(A-B) = P(\varnothing) = 0$, επίσης $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

τέλος, $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B-A) \le P(B)$

Συνεπώς οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά θα είναι,

1η Περίπτωση

$$P(\varnothing), P(A-B), \underbrace{P(B-A), P(A)}, P(B), P(\Omega)$$

2η Περίπτωση

$$P(\varnothing), P(A-B), \underbrace{P(A), P(B-A)}, P(B), P(\Omega).$$

Σε κάθε περίπτωση το πλήθος τους είναι άρτιο και συνεπώς η διάμεσός τους είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων οι οποίες σε κάθε περίπτωση είναι οι $P(A)$ και $P(B-A)$

Άρα

$$\delta = \frac{P(A)+P(B-A)}{2} = \frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{2} = \frac{P(A)+P(B)-P(A)}{2} = \frac{P(B)}{2}$$

Οπότε $\delta=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{P(B)}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Ε2. Έχουμε $\bar{x}=\frac{P(\varnothing)+P(A-B)+P(A)+P(B-A)+P(B)+P(\Omega)}{6}=$

$$=\frac{0+0+P(A)+P(B)-P(B\cap A)+P(B)+1}{6}=$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(A)+P(B)+1}{6}=\frac{2P(B)+1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ε3. Έχουμε,

$$P(B-A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)-P(B\cap A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$

Τότε οι παρατηρήσεις είναι οι $0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1$

Με μέση τιμή,

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{1}^{6}t_i=\frac{0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

και διακύμανση,

$$S^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(t_i-\bar{x})^2=\frac{1}{6}\left[2\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{17}{144}$$

Επομένως το δείγμα έχει μέση τιμή $\bar{x}=\frac{1}{3}$ και τυπική απόκλιση $S=\frac{\sqrt{17}}{12}$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{17}}{4}>0,1$ και συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 71

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x,\ x\in R$ και έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Ε1. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Ε2. Αν $A\subseteq B$ να αποδείξετε ότι $P(B)+e^{P(A)}\le P(A)+e^{P(B)}$.

Ε3. Αν $P(A)=\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

α) $1+2f(P(A-B))\le 2\sqrt{e}$.

β) $f(P(A\cap B))<e-1$.

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0$.

Επομένως η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Ε2. $A\subseteq B$ άρα $P(A)\le P(B)$

και επειδή $P(A),P(B)\ge 0$ και η $\mathbf{f}$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ θα είναι και

$f(P(A))\le f(P(B)) \Leftrightarrow e^{P(A)}-P(A)\le e^{P(B)}-P(B) \Leftrightarrow e^{P(A)}+P(B)\le e^{P(B)}+P(A)$

Ε3. α) Είναι $A-B\subseteq A$ άρα $P(A-B)\le P(A)$

και αφού $P(A-B),P(A)\ge 0$ και η $\mathbf{f}$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ θα είναι και

$f(P(A-B))\le f(P(A)) \Leftrightarrow f(P(A-B))\le f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$f(P(A-B))\le \sqrt{e}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(P(A-B))\le 2\sqrt{e}-1$.

β) Αφού ισχύει ότι $P(A\cap B)\le 1$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ θα είναι $f(P(A\cap B))\le f(1) \Leftrightarrow f(P(A\cap B))\le e-1.$

ΘΕΜΑ 72

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Ε1. Να δείξετε ότι $P(A'\cup B')\ge P((A-B)\cup(B-A))$.

Ε2. Αν $P(B'-A)=0,2$ $P(B')=0,7$ και $P((A-B)\cup(B-A))=0,7$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A\cap B)$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=P(A')+P(B')-[P(A')-P(A'\cap B)]=$

$=P(A')+P(B')-P(A')+P(A'\cap B)=1-P(B)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(A\cap B)$

Ακόμη αφού τα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε για την πιθανότητα της ένωσής τους

$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

Άρα η προς απόδειξη γίνεται

$P(A'\cup B')\ge P((A-B)\cup(B-A)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\cancel{P(A\cap B)} \geq P(A\cup B)-\cancel{P(A\cap B)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \geq P(A\cup B) \Leftrightarrow P(A\cup B) \leq 1$ που ισχύει

Ε2. Έχουμε, $P(B')=0,7 \Leftrightarrow 1-P(B)=0,7 \Leftrightarrow P(B)=0,3$

επίσης,

$P(B'-A)=0,2 \Leftrightarrow P(B')-P(B'\cap A)=0,2 \Leftrightarrow P(B'\cap A)=0,5$

$\Leftrightarrow P(A-B)=0,5 \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=0,5$

και

$P((A-B)\cup(B-A))=0,7 \Leftrightarrow P(A-B)+P(B-A)=0,7$

$\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0,2 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,1$

Τέλος $P(A)-P(A\cap B)=0,5 \Leftrightarrow P(A)=0,6$.

ΘΕΜΑ 73

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι:

Ε3. $P(A\cup B) \geq \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

Ε4. $P(A\cap B) \geq P(B)-P(A')$.

Ε5. $P(A)+P(B) \leq 1+P(A\cup B)$.

Ε6. $P(A\cap B)+P(A\cup B) < P(A)+P(B)+1$.

Πηγή: Τουμάσης – Τσαπακίδης (Εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε, $P(A\cup B) \geq \dfrac{P(A)+P(B)}{2} \Leftrightarrow 2P(A\cup B) \geq P(A)+P(B)$

$\Leftrightarrow 2P(A)+2P(B)-2P(A\cap B) \geq P(A)+P(B)$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B) \geq P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B) \geq P(A\cap B)$ που ισχύει αφού $A\cap B \subseteq A\cup B$.

Ε2. Έχουμε διαδοχικά από τη ζητούμενη σχέση,

$P(A\cap B) \geq P(B)-P(A') \Leftrightarrow P(A\cap B) \geq P(B)-1+P(A) \Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B) \leq 1$

$\Leftrightarrow P(A\cup B) \leq 1$ που ισχύει.

Ε3. Έχουμε διαδοχικά από τη ζητούμενη σχέση,

$P(A)+P(B) \leq 1+P(A\cup B) \Leftrightarrow P(A\cup B)+P(A\cap B) \leq 1+P(A\cup B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) \leq 1$ που ισχύει.

Ε4. Έχουμε διαδοχικά από τη ζητούμενη σχέση,

$P(A\cap B)+P(A\cup B) < P(A)+P(B)+1 \Leftrightarrow P(A)+P(B) < P(A)+P(B)+1$

$\Leftrightarrow 0 < 1$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 74

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης $\Omega=\{1,2,,...,k\}$ με $k\in N^*$. Το δείγμα των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω έχει μέση τιμή $\bar{x}=3,5$, ενώ ισχύει $P(1)=\frac{P(2)}{2}=....=\frac{P(k)}{k}$.

Ε1. Να βρεθεί η τιμή του k.

Ε2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

Ε3. Θεωρούμε το δείγμα $\alpha,2\alpha,3\alpha$ με $\alpha\in\Omega$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "Η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του $\frac{2\sqrt{6}}{3}$".

Λύση:

Ε1. Το άθροισμα $1+2+...+k$ αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και διαφορά $\omega=1$. Επιπλέον το πλήθος τους είναι $\nu=\kappa$. Το άθροισμά τους είναι λοιπόν $S_\kappa=\frac{\kappa}{2}(1+\kappa)$.

Είναι $\bar{x}=3,5\Leftrightarrow\frac{1+2+...+k}{k}=3,5\Leftrightarrow\frac{\frac{k}{2}(1+k)}{k}=3,5\Leftrightarrow k=6$.

Ε2. Είναι,

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},P(1)=\frac{P(2)}{2}=\frac{P(3)}{3}=\frac{P(4)}{4}=\frac{P(5)}{5}=\frac{P(6)}{6}=\lambda$

και πρέπει

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1\Leftrightarrow\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda+6\lambda=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{21}$$

Έτσι $P(1)=\frac{1}{21},P(2)=\frac{2}{21},P(3)=\frac{1}{7},P(4)=\frac{4}{21},P(5)=\frac{5}{21},P(6)=\frac{6}{21}$.

Ε3. Είναι $\bar{x}=\frac{\alpha+2\alpha+3\alpha}{3}=2\alpha,$ και

$$s^2=\frac{(\alpha-2\alpha)^2+(2\alpha-2\alpha)^2+(3\alpha-2\alpha)^2}{3}=\frac{2\alpha^2}{3}.$$

Άρα $s=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$. Πρέπει $s>\frac{2\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}>\frac{2\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow\alpha>2$ και αφού $\alpha\in\Omega:\alpha=3,4,5,6.$

Ζητάμε τώρα την πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{3,4,5,6\}$.

Είναι : $P(A)=P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$.

ΘΕΜΑ 75

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Αν $\mathbf{A,A'}$ είναι δύο αντίθετα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $\mathbf{\Omega}$ να δείξετε ότι:

Ε1. $\left(P(A)\right)^2+\left(P(A')\right)^2\geq\frac{1}{2}$

Ε2. $P(A)\cdot P(A')\leq\frac{1}{4}$

Ε3. $P(A)\cdot\left(P(A')\right)^2\leq\frac{4}{27}$

Ε4. $P(A')\cdot\left(P(A)\right)^2\leq\frac{4}{27}$

Ε5. $\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\geq 4$

Ε6. $\frac{1}{\left(P(A)\right)^2}+\frac{1}{\left(P(A')\right)^2}\geq 8$

Ε7. $\left(P(A)\right)^3+\left(P(A')\right)^3\geq\frac{1}{4}$

Πηγή: Τουμάσης – Τσαπακίδης (Εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x^2+(1-x)^2\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+1-2x+x^2\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0$$

$\Leftrightarrow(2x-1)^2\geq 0$ που ισχύει.

Ε2. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x(1-x)\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow -x^2+x\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0\Leftrightarrow(2x-1)^2\geq 0$$ που ισχύει.

Ε3. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x(1-x)^2\leq\frac{4}{27},x\in[0,1]$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x(1-x)^2,x\in[0,1]$.

Έχουμε $f'(x)=(1-x)^2-2x(1-x)=3x^2-4x+1=(1-x)(1-3x)$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=\frac{1}{3}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	0		1/3		1
f΄(x)=3x²-4x+1		+	0	-	0
f(x)	Ο.ε	↗	Ο.μ	↘	Ο.ε

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3},1\right]$.

- Για $x=\frac{1}{3}$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x(1-x)^2 \le \frac{4}{27}$ $,x \in [0,1]$.

Ε4. Αν $P(A) = x,$ τότε $P(A') = 1 - x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$(1-x)x^2 \le \frac{4}{27}, x \in [0,1]$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (1-x)x^2,\ x \in [0,1]$.

Έχουμε $f'(x) = -x^2 + 2x(1-x) = -x^2 + 2x - 2x^2 = -3x^2 + 2x$.

Λύνουμε την εξίσωση,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$. Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	0		$2/3$		1
$f'(x)=-3x^2+2x$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	Ο.ε	$\nearrow$	Ο.μ	$\searrow$	Ο.ε

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$,.

- Για $x = \frac{1}{3}$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \le f\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow (1-x)x^2 \le \frac{4}{27}$ $,x \in [0,1]$.

Ε5. Αν $P(A) = x,$ τότε $P(A') = 1 - x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \ge 4 \Leftrightarrow 1 - x + x \ge 4x(1-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \ge 0$ που ισχύει.

Ε6. Αν $P(A) = x,$ τότε $P(A') = 1 - x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \ge 8, x \in (0,1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (0,1)$, που είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{-2(2x-1)(x^2-x+1)}{x^3(1-x)^3}.$$

Λύνουμε την εξίσωση,

$g'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-2(2x-1)(x^2-x+1)}{x^3(1-x)^3}=0 \Rightarrow (-4x+2)(x^2-x+1) \Rightarrow x=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ αφού

η εξίσωση $x^2-x+1=0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες αφού έχει διακρίνουσα αρνητική

και άρα $x^2-x+1>0$, ομόσημο του $\alpha=1>0$ για κάθε $x\in R$. Επίσης για κάθε

$0<x<1$ είναι $x^3>0$ και $(1-x)^3>0$. Συνεπώς προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

προσήμου της g' και μεταβολών της g.

x	0	1/2	1
g΄(x)	+	0	-
g(x)	↗	Ο.μ	↘

Για $x=\dfrac{1}{2}$ η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο

το $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x\in(0,1)$

είναι $g(x)\geq g\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\geq 8$,$x\in(0,1)$.

Άρα για $x=P(A)$ έχουμε $P(A')=1-P(A)=1-x$ οπότε

$$\frac{1}{(P(A))^2}+\frac{1}{(P(A'))^2}\geq 8.$$

Ε7. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x^3+(1-x)^3\geq\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3+1-3x+3x^2-x^3\geq\frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2-3x+\frac{3}{4}\geq 0$$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 76

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω A,B μη κενά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε το A να μην είναι υποσύνολο του B και $P(A)\neq P(A\cap B)$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,e]$.

Ε1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Ε2. Να δείξετε ότι $\left[P(A)\right]^{P(A-B)}\geq\left[P(A-B)\right]^{P(A)}$.

Ε3. Να δείξετε ότι $\left[P(A)\right]^{e}\leq e^{P(A)}$.

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με τύπο $\mathbf{f(x)=\frac{\ln x}{x}, x\in(0,e]}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,e]}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}}$

Είναι $\mathbf{f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Rightarrow x=e}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	0 e
1-lnx	+
x	+
f΄(x)	+
f(x)	↗

Δικαιολόγηση πρόσημου

$$\mathbf{1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln x<\ln e \Leftrightarrow x<e}$$

Είναι $\mathbf{f'(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x\in(0,e)}$ αφού $\mathbf{x>0}$ και οπότε η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(0,e]}$.

Ε2. Έχουμε,

$$\mathbf{A-B\subseteq A \Rightarrow P(A-B)\le P(A) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(P(A-B))\le f(P(A)) \Rightarrow \frac{\ln(P(A-B))}{P(A-B)} \le \frac{\ln(P(A))}{P(A)}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow P(A)\cdot\ln(P(A-B))\le P(A-B)\cdot\ln(P(A)) \Rightarrow \ln(P(A-B))^{P(A)} \le \ln(P(A))^{P(A-B)}}$$

$$\mathbf{\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow} (P(A-B))^{P(A)} \le (P(A))^{P(A-B)}}$$

Ε3. Επίσης,

$$\mathbf{P(A)<e \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(P(A))<f(e) \Rightarrow \frac{\ln(P(A))}{P(A)} < \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e\ln(P(A))<P(A)\ln e}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \ln(P(A))^{e} < \ln e^{P(A)} \overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow} (P(A))^{e} < e^{P(A)}}$$

οπότε $\mathbf{(P(A))^{e} \le e^{P(A)}}$.

ΘΕΜΑ 77

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Σε μια πόλη το 85% των κατοίκων έχει αυτοκίνητο και το 35% έχει μοτοσικλέτα. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν κάτοικο να δείξετε ότι:

Ε1. Η πιθανότητα ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο και μοτοσικλέτα είναι μικρότερη ή ίση του $\mathbf{0,2}$ και μεγαλύτερη ή ίση του $\mathbf{0,35}$.

Ε2. Η πιθανότητα ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο ή μοτοσικλέτα είναι μικρότερη ή ίση του $\mathbf{1}$ και μεγαλύτερη ή ίση του $\mathbf{0,85}$.

Ε3. Η πιθανότητα ο κάτοικος να έχει μόνο αυτοκίνητο είναι μικρότερη ή ίση του $\mathbf{0,65}$ και μεγαλύτερη ή ίση του $\mathbf{0,5}$.

Ε4. Η πιθανότητα ο κάτοικος να έχει μόνο αυτοκίνητο ή μόνο μοτοσικλέτα είναι μικρότερη ή ίση του $\mathbf{0,8}$ και μεγαλύτερη ή ίση του $\mathbf{0,5}$.

Ε5. Η πιθανότητα ο κάτοικος να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μοτοσυκλέτα είναι μικρότερη ή ίση του $\mathbf{0}$ και μεγαλύτερη ή ίση του $\mathbf{0,15}$.

Λύση:

Έστω $\mathbf{A}$ το ενδεχόμενο να έχει αυτοκίνητο και $\mathbf{M}$ το ενδεχόμενο να έχει μηχανή. Έχουμε $\mathbf{P(A)=85\%}$ και $\mathbf{P(M)=35\%}$.

Ε1. Έχουμε

$\mathbf{P(A\cup M)\le 1 \Leftrightarrow P(A)+P(M)-P(A\cap M)\le 1 \Leftrightarrow P(A\cap M)\ge 0,2}$ και

$\mathbf{A\cap M\subseteq A \Rightarrow P(A\cap M)\le P(A)\Rightarrow P(A\cap M)\le 0,85}$ καθώς και

$\mathbf{A\cap M\subseteq M \Rightarrow P(A\cap M)\le P(M)\Rightarrow P(A\cap M)\le 0,35}$. Επομένως

$\mathbf{0,2\le P(A\cap M)\le 0,35}$.

Ε2. Έχουμε

$\mathbf{A\subseteq A\cup M\subseteq \Omega \Rightarrow P(A)\le P(A\cup M)\le P(\Omega)\Rightarrow 0,85\le P(A\cup M)\le 1}$

Ε3. Έχουμε $\mathbf{P(A-M)=P(A)-P(A\cap M)}$

Ακόμα $\mathbf{0,2\le P(A\cap M)\le 0,35 \Rightarrow -0,2\ge -P(A\cap M)\ge -0,35}$

$\mathbf{\Rightarrow -0,35+P(A)\le P(A)-P(A\cap M)\le -0,2+P(A)}$

$\mathbf{\Rightarrow 0,5\le P(A-M)\le 0,65}$.

Ε4. Έχουμε,

$\mathbf{0,2\le P(A\cap M)\le 0,35 \Rightarrow -0,4\ge -2P(A\cap M)\ge -0,7}$

$\mathbf{\Rightarrow -0,7+P(A)+P(M)\le P(A)+P(M)-2P(A\cap M)\le P(A)+P(M)-0,4}$

$\mathbf{\Rightarrow 0,5\le P((A-M)\cup(M-A))\le 0,8}$.

Ε5. Έχουμε

$\mathbf{0,85\le P(A\cup M)\le 1 \Rightarrow -0,85\ge -P(A\cup M)\ge -1}$

$\mathbf{\Rightarrow 0,15\ge 1-P(A\cup M)\ge 0}$

$\mathbf{\Rightarrow 0\le P(A\cup M)'\le 0,15}$

ΘΕΜΑ 78

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω $\mathbf{A,B\neq\varnothing}$ δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\mathbf{\Omega}$, με $\mathbf{0<P\left(A\cup B\right)<1}$.
Δίνονται οι συναρτήσεις

$\mathbf{f\left(x\right)=\frac{4}{3}x^3-2P\left(A\cup B\right)x^2+P\left(A\cup B\right)x+2,\ \ x\in R}$ και

$\mathbf{g\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-x+2007,\ \ x\in R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ δεν έχει ακρότατα.

Ε2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$.

Ε3. Αν η παραπάνω εφαπτομένη σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4τ.μ, τότε να αποδείξετε ότι $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Ε4. Αν η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=P(A-B)$, να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Πηγή: Μ. Αγιοπούλου - Ν. Πανουσάκης (εκδοτικός όμιλος συγγραφέων καθηγητών)

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^2-4P(A\cup B)x+P(A\cup B)$ και με διακρίνουσα $\Delta=16P^2(A\cup B)-16P(A\cup B)=16P(A\cup B)[P(A\cup B)-1]<0$ διότι $0<P(A\cup B)<1$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Ε2. **1^{ος} τρόπος**

η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(0)=P(A\cup B)$ και επειδή το σημείο επαφής $M(0,2)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $2=0+\beta\Rightarrow\beta=2$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $y=P(A\cup B)\cdot x+2$

2^{ος} τρόπος

Είναι $f(0)=2,\ f'(0)=P(A\cup B)$ $[...,...)$ Η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$y-f(0)=f'(0)x\Rightarrow y=P(A\cup B)x+2.$

Ε3. Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-\frac{2}{P(A\cup B)},0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,\ 2)$. Άρα το εμβαδό θα είναι

$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{P(A\cup B)}\right|2=\frac{2}{P(A\cup B)}$ και επειδή από υπόθεση $E=4$

προκύπτει ότι $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Ε4. Έχουμε $g'(x)=3x-1$. Λύνουμε την εξίσωση $g'(x)=0\Rightarrow 3x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
g´(x)	-	0	+
g(x)	↘	ο.ε	↗

Επομένως συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\frac{1}{3}$ το $g\left(\frac{1}{3}\right)$.

Άρα πρέπει $P(A-B)=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}.$$

ΘΕΜΑ 79

Προτείνει ο Δημήτρης

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω, που αποτελείται από 2004 στοιχεία, τα οποία είναι ισοπίθανα. Θεωρούμε τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του Ω, με $0<P(A)<1$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $4\cdot\dfrac{P(A)}{P(A')}+\dfrac{1}{P(A)}\geq 5$.

Ε2. Αν στην παραπάνω σχέση ισχύει η ισότητα τότε:

α. Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του A.

β. Αν κάποιο ενδεχόμενο B του Ω έχει 1453 στοιχεία, να αποδείξετε ότι τα A,B δεν είναι ασυμβίβαστα.

Πηγή: <u>(Στεργίου- Νάκης, εκδόσεις Σαββάλα)</u>

Λύση:

Ε1. Έχουμε,

$$4\frac{P(A)}{P(A')}+\frac{1}{P(A)}\geq 5\Leftrightarrow 4\frac{P(A)}{1-P(A)}+\frac{1}{P(A)}\geq 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4P^2(A)+1-P(A)\geq 5P(A)-5P^2(A)\Leftrightarrow 9P^2(A)-6P(A)+1\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left[3P(A)-1\right]^2\geq 0$ η οποία ισχύει άρα και η ισοδύναμη της αρχική.

Ε2. **α.** Αν ισχύει:

$$4\cdot\frac{P(A)}{P(A')}+\frac{1}{P(A)}=5\Leftrightarrow\left[3P(A)-1\right]^2=0\Leftrightarrow 3P(A)-1=0\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

και επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα θα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Δηλαδή αν $N(A)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του A θα έχουμε:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\underset{P(A)=\frac{1}{3}}{\overset{N(\Omega)=2004}{\Leftrightarrow}}\frac{1}{3}=\frac{N(A)}{2004}\Rightarrow N(A)=668$$

β. Αν $N(B)=1453$ τότε (από τα ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα θα είναι

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Rightarrow P(B)=\frac{1453}{2004}.$$

Αν τα ενδεχόμενα A,B είναι ξένα μεταξύ τους (ασυμβίβαστα) τότε θα ισχύει από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{668}{2004}+\frac{1453}{2004}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{2121}{2004}>1$$

άτοπο αφού $P(A\cup B)\in[0,1]$.

ΘΕΜΑ 80

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα πεπερασμένου πλήθους και δύο ενδεχόμενα του A και B για τα οποία ισχύει $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Δίνεται επίσης και η συνάρτηση $f(x)=x^3+3N(A)x^2+N(A)\cdot N(\Omega)x+8$ με $x\in\mathbb{R}$ και $N(A)$, $N(\Omega)$ το πλήθος των στοιχείων του A και του Ω αντίστοιχα.

Αν η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, τότε:

Ε1. Να δείξετε ότι $A\neq\varnothing$.

Ε2. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

Ε3. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$ τότε:

α) Να βρείτε το $N(\Omega)$.

β) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

Πηγή: Γιώργος Μαυρίδης

Λύση:

Ε1. Έστω $A=\varnothing$. Τότε $A\cap B=\varnothing$ και $P(A\cap B)=0$. Άτοπο αφού $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Άρα $A\neq\varnothing$.

Ε2. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2+6N(A)x+N(A)N(\Omega)$.

Για να μην παρουσιάζει ακρότατα η f, αρκεί η διακρίνουσα του τριωνύμου της f' να μην είναι θετική.

Άρα $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 36\left(N(A)\right)^2-12N(A)N(\Omega)\leq 0\Leftrightarrow 12N(A)\left(3N(A)-N(\Omega)\right)\leq 0$.

Επειδή $A\neq\varnothing$ έχουμε $N(A)\neq 0$ και $N(A)>0$.

Οπότε $3N(A)-N(\Omega)\leq 0\Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A)\leq\frac{1}{3}$.

Επιπλέον $A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A)\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq P(A)$.

Δηλαδή $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

Ε3. **α.**

Έχουμε, $M(-1,1)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=1 \Leftrightarrow -1+3N(A)-N(A)N(\Omega)+8=1$

$$\Leftrightarrow 3N(A)-N(A)N(\Omega)=-6 \Leftrightarrow 3\frac{N(\Omega)}{3}-\frac{N(\Omega)}{3}N(\Omega)=-6$$

$$\Leftrightarrow 3N(\Omega)-\left(N(\Omega)\right)^2=-18.$$

Η τελευταία δίνει $N(\Omega)=6$.

β. Για $N(\Omega)=6$ έχουμε $P(A)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow N(A)=2$.

Τότε $f(x)=x^3+6x^2+12x+18$ και $f'(x)=3x^2+12x+12$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{3x^2+12x+12}=\dfrac{64}{48}=\dfrac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ 81

Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Έστω $\Omega=\{1,2,3,....,n\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A,B δυο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε:

$$N(A\cup B)=5,\ P(A-B)=\frac{1}{10},\ P(A\cap B)=\frac{1}{20}.$$

Ε1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο **Α.**

Ε2. Να αποδείξετε ότι $P(B)=\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{10}$.

Ε3. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το **Β** και όχι το **Α** είναι ίση με $\dfrac{1}{10}$, να βρείτε το **n.**

Ε4. Αν **n=20** και $\bar{x},s$ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αριθμών **1, 2, 3, α, 4-α** όπου $\alpha\in\Omega$, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $\Gamma=\{\alpha\in\Omega\,/\,s>\bar{x}\}$.

Λύση:

Ε1. Ισχύει ότι: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow$

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\Rightarrow P(A)=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\Rightarrow P(A)=\frac{3}{20}.$$

Ε2. Επειδή ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα τότε σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας είναι

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{5}{n}.$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$

$$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)\Rightarrow P(B)=\frac{5}{n}+\frac{1}{20}-\frac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{5}{n}-\frac{1}{10}.$$

Ε3. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B και όχι το A είναι ίση με $\frac{1}{10}$.

Επομένως, $P(B-A)=\frac{1}{10}\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{10}\Rightarrow \frac{5}{n}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{10}\Rightarrow$

$\frac{5}{n}=\frac{5}{20}\Rightarrow n=20.$

Ε4. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων **1, 2, 3, α, 4-α**, ισούται με

$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}t_i=\frac{1+2+3+\alpha+4-\alpha}{5}=\frac{10}{5}=2.$ Ενώ η διακύμανση δίνεται από τη σχέση,

$$s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{x})^2=\frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2+(\alpha-2)^2+(2-\alpha)^2}{5}\Rightarrow$$

$$s^2=\frac{1+1+2(\alpha-2)^2}{5}\Rightarrow s^2=\frac{2+2\alpha^2-8\alpha+8}{5}\Rightarrow s^2=\frac{2\alpha^2-8\alpha+10}{5}.$$

Για να ισχύει ότι $s>\bar{x}$ πρέπει $\sqrt{\frac{2\alpha^2-8\alpha+10}{5}}>2\Leftrightarrow$

$\frac{2\alpha^2-8\alpha+10}{5}>4\Leftrightarrow 2\alpha^2-8\alpha-10>0\Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha-5>0$ δηλαδή $\alpha<-1$ ή $\alpha>5$.

Επειδή όμως $\alpha\in\Omega$ τότε $\Gamma=\{6,7,....,20\}$.

Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Γ, είναι $N(\Gamma)=15$, επομένως η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Γ είναι $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

<u>**Δικαιολόγηση προσήμου:**</u> Λύνουμε την εξίσωση $\alpha^2-4\alpha-5=0$. Είναι $\Delta=16+20=36>0.$ Επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $\alpha_1=\frac{4+6}{2}=5$, $\alpha_2=\frac{4-6}{2}=-1.$ Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου, γίνεται φανερό ότι $\alpha^2-4\alpha-5>0$ όταν $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$, δηλαδή $\alpha<-1$ ή $\alpha>5$.

α	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$\alpha^2-4\alpha-5$		+	0	-	0	+	

ΘΕΜΑ 82 — **Προτείνει ο Περικλής Παντούλας**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x,\ x>0$ και A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Ε1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Ε2. Αν $A\neq\varnothing$ και $A\subseteq B$, να αποδείξετε ότι $\ln\frac{P(A)}{P(B)}\leq P(A)-P(B)$.

Ε3. Αν η εφαπτομένη στην καμπύλη της f στο σημείο $x_0 = P(A)$ είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων, τότε:

α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f\big(P(A\cap B)\big) \le -\dfrac{\ln 4e}{2}$, για $A\cap B \ne \varnothing$.

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

Για την εύρεση της μονοτονίας λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Επομένως $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ και

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1.$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 1$ με τιμή $f(1) = -1$.

x	0	1	+∞
f′	+	0	-
f	↗	Ο.μ	↘

Έχουμε, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B) \overset{f \nearrow (0,1]}{\Rightarrow} f(P(A)) \le f(P(B)) \Rightarrow$

$\ln(P(A)) - P(A) \le \ln(P(B)) - P(B) \Rightarrow \ln(P(A)) - \ln(P(B)) \le P(A) - P(B) \Rightarrow$

Επομένως $\ln\left(\dfrac{P(A)}{P(B)}\right) \le P(A) - P(B)$

Ε2. **α).** Επειδή η εφαπτομένη στο $x_0 = P(A)$ είναι παράλληλη στην διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου θα είναι $f'(x_0) = 1$, άρα

$$f'(P(A)) = 1 \Leftrightarrow \frac{1-P(A)}{P(A)} = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

β. Ισχύει ότι $A\cap B \subseteq A$. Επομένως, $A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A) \overset{f \nearrow (0,1]}{\Rightarrow}$

$$f(P(A\cap B)) \le f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(P(A\cap B)) \le \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow f(P(A\cap B)) \le \ln 1 - \ln 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f(P(A\cap B)) \le -\ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{-2\ln 2 - \ln e}{2} = -\frac{\ln 4 + \ln e}{2} = -\frac{\ln 4e}{2}.$$

Συμπερασματικά είναι $f\big(P(A\cap B)\big) \le -\dfrac{\ln 4e}{2}$.

ΘΕΜΑ 83 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\mathbf{\Omega}$ με $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$.

Ε1. Να δείξετε ότι $P(A)+P(B)=1$.

Ε2. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A,B.

Ε3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{P(A)x^2-x+P(B)}{x-1}, & x\neq 1\\ -4P(A-B), & x=1\end{cases}$.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A,B.

Δ: Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A,B.

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα των $P(\Gamma),P(\Delta),P(A'\cup B),P(B'-A')$ είναι ομοιογενές.

Πηγή: Β.Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=P(A)+P(B)\Leftrightarrow P(A)+P(B)=1$$

Ε2. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A,B ισούται με $P((A-B)\cup(B-A))$.

Τα ενδεχόμενα $(A-B),(B-A)$ είναι ξένα μεταξύ τους αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$.

Επομένως ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος και κατά συνέπεια είναι

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

Συμπερασματικά,

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\overset{P(A)+P(B)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=1-\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Ε3. α). Από τη σχέση $P(A)+P(B)=1$ (1) έχουμε $P(B)=1-P(A)$.

Αφού η f η συνεχής στο $x_0=1$ είναι $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (2). Είναι,

$$\lim_{x\to 1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{P(A)x^2 - x + 1 - P(A)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{P(A)\left(x^2-1\right) - x + 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{P(A)(x-1)(x+1) - (x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)[P(A)(x+1)-1]}{x-1} = 2P(A) - 1.$$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2P(A) - 1$, και επίσης,

$$f(1) = -4P(A-B) = -4[P(A) - P(A\cap B)] = -4P(A) + 4\cdot\frac{1}{8} = -4P(A) + \frac{1}{2}$$

Έτσι από τη σχέση **(2)** προκύπτει $2P(A) - 1 = -4P(A) + \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$,

ενώ $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$.

β). Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A, B είναι το $\Gamma = \left(A\cap B\right)'$, και άρα η πιθανότητα $P(\Gamma)$ ισούται με,

$$P(\Gamma) = P[(A\cap B)'] = 1 - P(A\cap B) = 1 - \frac{1}{8} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{7}{8}.$$

Το ενδεχόμενο δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B είναι το $\Delta = \left(A\cup B\right)'$, και άρα η πιθανότητα $P(\Delta)$ ισούται με,

$$P(\Delta) = P[(A\cup B)'] = 1 - P(A\cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] = 1 - 1 + \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$P(\Delta) = \frac{1}{8}$$

Είναι ακόμη,

$$P(A'\cup B) = P(A') + P(B) - P(A'\cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A\cap B)$$

διότι $P(A'\cap B) = P\left(B - A\right) = P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$,

άρα $P(A'\cup B) = \frac{7}{8}$. Έχουμε επίσης,

$$P(B' - A') = P(B'\cap\left(A'\right)') = P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B) \Rightarrow P(B' - A') = \frac{1}{8}.$$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $P\left(\Gamma\right), P\left(\Delta\right), P\left(A'\cup B\right), P\left(B' - A'\right)$ είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} t_i = \frac{P\left(\Gamma\right) + P\left(\Delta\right) + P\left(A'\cup B\right) + P\left(B' - A'\right)}{4} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\frac{7}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8}}{4} = \frac{1}{2}$$

και η διακύμανση δίνεται από τον τύπο $s^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left(t_i - \bar{x}\right)^2$. Επομένως,

$$s^2 = \frac{(\frac{7}{8} - \frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{8} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{7}{8} - \frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{8} - \frac{1}{2})^2}{4} = \frac{2(\frac{7}{8} - \frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{8} - \frac{1}{2})^2}{4} = \frac{9}{64}.$$

Άρα μέση τιμή είναι $\bar{x}=\frac{1}{2}$, η διακύμανση $s^2=\frac{9}{64}$ και η τυπική απόκλιση $s=\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$. Συνεπώς ο συντελεστής μεταβολής ισούται με

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}=0,75 \text{ ή } CV=75\%>10\%$$ και άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 84

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ένα κουτί περιέχει 5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί. Αν η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη ή γαλάζια μπάλα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή γαλάζια είναι $\frac{3}{5}$, τότε:

Ε1. Να βρείτε τα x, y καθώς επίσης και πόσες μπάλες έχει το κουτί.

Ε2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή πράσινη μπάλα.

Πηγή: Φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Ε1. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί. Επομένως τα ενδεχόμενα είναι απλά και ισοπίθανα και άρα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Τα ενδεχόμενα Π: "επιλέγω πράσινη μπάλα", K:"επιλέγω κίτρινη μπάλα" και Γ: "επιλέγω γαλάζια μπάλα" είναι ασυμβίβαστα με πιθανότητες:

$$P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{x}{x+y+5},\ P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{5}{x+y+5},\ P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{y}{x+y+5}$$

Είναι επίσης,

$$P(\Pi\cup\Gamma)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(\Pi)+P(\Gamma)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{x}{x+y+5}+\frac{y}{x+y+5}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$4(x+y)=3(x+y+5)\Rightarrow 4x+4y=3x+3y+15\Rightarrow x+y=5\quad(1)$$

και $$P(K\cup\Gamma)=\frac{3}{5}\Rightarrow P(K)+P(\Gamma)=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{5}{x+y+5}+\frac{y}{x+y+5}=\frac{3}{5}\Rightarrow$$

$$5(5+y)=3(x+y+5)\Rightarrow 25+5y=3x+3y+15\Rightarrow 3x-2y=10\quad(2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων **(1),(2)**

$$\begin{cases}x+y=15\\3x-2y=10\end{cases}\overset{\cdot(+2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x+2y=30\\3x-2y=10\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}5x=40\\x+y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=15-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=7\end{cases}$$

Έτσι προκύπτει η λύση $x=8$, και $y=7$, άρα το κουτί περιέχει

$5+x+y=5+7+8=20$ μπάλες.

2ος τρόπος:

Είναι $P(\Pi\cup\Gamma)=\frac{3}{4}$ άρα $\frac{x+y}{x+y+5}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x+y=15 \ (1)$. Επομένως το πλήθος όλων των μπαλών ισούται με $x+y+5\overset{(1)}{=}15+5=20$. Επίσης έχουμε $P(K\cup\Gamma)=\frac{3}{5}$ και επομένως $\frac{5+y}{20}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow y=7$ και από **(1)**, προκύπτει $x=15-y=8$.

Ε2. Ζητάμε την πιθανότητα $P(K\cup\Pi)=P(K)+P(\Pi)=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$.

ΘΕΜΑ 85

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Αν A,B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{2}{3}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Ε1. Να μην πραγματοποιηθεί το A.

Ε2. Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A,B.

Ε3. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B.

Ε4. Να πραγματοποιηθεί μόνο το A.

Ε5. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A,B.

Ε6. Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A,B.

Πηγή: Φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα.

Λύση:

Ε1. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το A είναι το A'.
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Ε2. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A,B είναι η $P(A\cup B)$. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)=\frac{47}{60}$$

Ε3. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B είναι το $(A\cup B)'$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}.$$

Ε4. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το A είναι,

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A-B)=\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\Leftrightarrow P(A-B)=\frac{7}{60}$$

Ε5. Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A,B, δηλαδή την $P((A-B)\cup(B-A))$. Τα ενδεχόμενα $(A-B),(B-A)$ είναι ξένα μεταξύ τους αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$. Επομένως ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος και κατά συνέπεια είναι,

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{52-10}{60}\Leftrightarrow P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{42}{60}=\frac{21}{30}.$$

Απόδειξη του τύπου:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

2ος τρόπος:

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{47}{60}-\frac{1}{12}=\frac{42}{60}=\frac{21}{30}.$$

Ε6. Τέλος το ενδεχόμενο πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A,B είναι το $(A\cap B)'$. Επομένως η πιθανότητα είναι

$$P\big((A\cap B)'\big)=1-P(A\cap B)\Leftrightarrow P\big((A\cap B)'\big)=1-\frac{1}{12}=\frac{12}{12}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.$$

ΘΕΜΑ 86

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Ε1. Αν A,B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A)=k^2,\ P(B)=5k^2-7k+3,\text{ να δείξετε ότι } \frac{1}{2}\le k\le\frac{2}{3}.$$

Ε2. Αν A ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$|2P(A)+3|-|2P(A)-5|=p,\text{ να αποδείξετε ότι ισχύει } |p|\le 2.$$

Ε3. Αν A,B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A)>\frac{1}{9},\ P(B)=\frac{4P(A)}{9P(A)-1},\text{ να βρείτε τις πιθανότητες } P(A),P(B).$$

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\mathbf{0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa \le 1 \quad (1)}$ και

$$\mathbf{0 \le P(B) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 5\kappa^2 - 7\kappa + 3 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa^2 - 7\kappa + 3 \ge 0 \\ 5\kappa^2 - 7\kappa + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \in R, \text{διότι } \Delta < 0 \\ \frac{2}{5} \le \kappa \le 1 \end{cases} \qquad (2)}$$

Επίσης τα $\mathbf{A,B}$ είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου $\mathbf{\Omega}$. Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 6\kappa^2 - 7\kappa + 3}$, αλλά

$$\mathbf{0 \le P(A \cup B) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 6\kappa^2 - 7\kappa + 3 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6\kappa^2 - 7\kappa + 3 \ge 0 \\ 6\kappa^2 - 7\kappa + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \in R \\ \frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{2}{3} \end{cases} \qquad (3)}$$

Οπότε από $\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} \mathbf{\frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{2}{3}}$.

<u>**Δικαιολόγηση προσήμων:**</u> Λύνουμε τις εξισώσεις, $\mathbf{5k^2 - 7k + 3 = 0}$ (1), $\mathbf{5k^2 - 7k + 2 = 0}$ (2), $\mathbf{6k^2 - 7k + 3 = 0}$ (3), $\mathbf{6k^2 - 7k + 2 = 0}$ (4). Οι εξισώσεις (1) και (3) έχουν αρνητική διακρίνουσα, και άρα δεν έχουν πραγματικές ρίζες ενώ οι (2), (4), έχουν δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $\mathbf{k_1 = \frac{2}{5}}$ ή $\mathbf{k_2 = 1}$.

k	$-\infty$	$+\infty$
$5k^2-7k+3$	+	

k	$-\infty$		$2/5$		1		$+\infty$
$5k^2-7k+2$		+	0	-	0	+	

k	$-\infty$	$+\infty$
$6k^2-7k+3$	+	

k	$-\infty$		$2/5$		1		$+\infty$
$6k^2-7k+2$		+	0	-	0	+	

Ε2. Ισχύουν οι ισοδυναμίες,

$\mathbf{0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2P(A) \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2P(A) + 3 \le 5}$ και

$\mathbf{0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2P(A) \le 2 \Leftrightarrow -5 \le 2P(A) - 5 \le -3}$.

Επομένως η σχέση $\mathbf{|2P(A)+3| - |2P(A)-5| = p}$ γίνεται,

$$\mathbf{|2P(A)+3| - |2P(A)-5| = p \Leftrightarrow 2P(A) + 3 - (5 - 2P(A)) = p \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{2P(A) + 3 - 5 + 2P(A) = p \Leftrightarrow 4P(A) = p + 2 \Leftrightarrow P(A) = \frac{p+2}{4}}.$$

Όμως, $\mathbf{0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{p+2}{4} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le p + 2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le p \le 2 \Leftrightarrow |p| \le 2}$.

Ε3. Είναι $\mathbf{P(A) > \frac{1}{9}}$, $\mathbf{P(B) = \frac{4P(A)}{9P(A)-1}}$ και επειδή $\mathbf{A,B}$ δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου $\mathbf{\Omega}$ έχουμε,

$$\mathbf{P(A)+P(B)\le 1 \Leftrightarrow P(A)+\frac{4P(A)}{9P(A)-1}\le 1 \overset{P(A)>\frac{1}{9}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\mathbf{9P^2(A)-P(A)+4P(A)\le 9P(A)-1 \Leftrightarrow 9P^2(A)-6P(A)+1\le 0 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{(3P(A)-1)^2\le 0 \Leftrightarrow 3P(A)-1=0 \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}.}$$

Οπότε $\mathbf{P(B)=\frac{4P(A)}{9P(A)-1}=\frac{\frac{4}{3}}{9\frac{1}{3}-1}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3}}$.

ΘΕΜΑ 87

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω $\mathbf{\Omega=\{0,1,2,\omega_1,\omega_2\}}$ με $\mathbf{\omega_1<\omega_2}$, ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $\mathbf{A=\{\omega_1,\omega_2\}}$, ώστε να ισχύουν:

$$\mathbf{P(A)=\frac{1}{2},\ P(0)=2P(1)=\frac{P(2)}{2}=P(\omega_1)}.$$

Ε1. Να βρείτε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του $\mathbf{\Omega}$.

Ε2. Αν η καμπύλη της συνάρτησης $\mathbf{f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1}$ έχει εφαπτομένη στο $\mathbf{x_0=1}$ παράλληλη στην ευθεία $\mathbf{\varepsilon: y=8x}$ και τα $\mathbf{\omega_1,\omega_2}$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της $\mathbf{f}$, τότε: Να βρείτε τους πραγματικούς $\mathbf{\alpha}$, $\mathbf{\omega_1,\ \omega_2}$.

Ε3. Για $\mathbf{\alpha=1,\ \omega_1=3,\ \omega_2=5}$,

α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\mathbf{B=\left\{\lambda\in\Omega:\lim_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lambda^2-5\lambda+\frac{26}{3}\right\}}$$

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathbf{\Gamma}$: δεν πραγματοποιείται κανένα από τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

γ) Να δείξετε ότι $\mathbf{P(A-B)\le\frac{1}{2}}$.

Λύση:

Ε1. Έστω $\mathbf{P(0)=2P(1)=\frac{1}{2}P(2)=P(\omega_1)=x}$.

Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε,

$$\mathbf{P(\Omega)=1\Leftrightarrow P(0)+P(1)+P(2)+P(\omega_1)+P(\omega_2)=1\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{P(0)+P(1)+P(2)+P(A)=1\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}x+2x+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}}$$

Άρα $\mathbf{P(0)=P(\omega_1)=\frac{1}{7}}$, $\mathbf{P(1)=\frac{1}{14}}$ και $\mathbf{P(2)=\frac{2}{7}}$.

Επίσης είναι, $\mathbf{P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{7}+P(\omega_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{14}}$.

Ε2. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $\mathbf{f'(x)=\alpha x^2-8x+15}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο με τετμημένη 1 ισούται με $\boldsymbol{\lambda=f'(1)=\alpha+7}$. Άρα η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την $\mathbf{y=8x}$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{\lambda=8\Leftrightarrow\alpha=1}$. Για $\boldsymbol{\alpha=1}$ είναι $\mathbf{f'(x)=x^2-8x+15}$. Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow x=3}$ **ή** $\mathbf{x=5}$. Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	-∞	3	5	+∞
$f'(x)=x^2-8x+15$	+	0	- 0	+
f	↗	τ.μ	↘ τ.ε	↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\infty,3],[5,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,5]$. Στη θέση $\mathbf{x=3}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $\mathbf{f(3)}$ και στη θέση $\mathbf{x=5}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $\mathbf{f(5)}$.

Άρα αφού $\boldsymbol{\omega_1<\omega_2\Rightarrow\omega_1=3}$ και $\boldsymbol{\omega_2=5}$.
Τότε έχουμε $\mathbf{\Omega=\{0,1,2,3,5\}}$ και $\mathbf{A=\{3,5\}}$.

Ε3. **α)** Η συνάρτηση $\mathbf{f'}$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(x^2-8x+15\right)'=2x-8}$ και το όριο γίνεται,

$$\lim_{x\to2}\frac{f''(x)-8}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3}=\frac{8}{3}$$

Συνεπώς, $\boldsymbol{\lambda^2-5\lambda+\frac{26}{3}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\lambda^2-5\lambda+6=0}$, οπότε $\boldsymbol{\lambda=2}$ **ή** $\boldsymbol{\lambda=3}$ και άρα, το ενδεχόμενο $\mathbf{B}$ είναι το $\mathbf{B=\{2,3\}}$. Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας είναι $\mathbf{P(B)=P(2)+P(3)=P(2)+P(\omega_1)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}}$.

β) Είναι $\mathbf{A\cup B=\{2,3,5\}}$. Οπότε $\mathbf{\Gamma=(A\cup B)'=\{0,1\}}$ και άρα από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε, $\mathbf{P\left((A\cup B)'\right)=P(0)+P(1)=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{3}{14}}$.

γ) Τέλος είναι $\mathbf{A-B=\{5\}}$, επομένως από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας βρίσκουμε $\mathbf{P(A-B)=P(5)=\frac{5}{14}<\frac{7}{14}=\frac{1}{2}}$ και κατά συνέπεια προκύπτει το ζητούμενο $\mathbf{P(A-B)<\frac{1}{2}}$.

ΘΕΜΑ 88 — Προτείνουν οι Γιάννης Ευσταθίου και parmenides51

Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $(x-10)(x-11)\cdot\ldots\cdot(x-20)=0$.

Ε1. Αν ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda \in \Omega$, να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Ε2. Να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0,\ \lambda \in \Omega$ να έχει ρητές (πραγματικές) ρίζες στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από απλά ενδεχόμενα με πιθανότητες ανάλογες των ενδείξεων τους , δηλαδή $P(i)=ki,\ k \in R,\ i \in \Omega$.

Λύση:

Ε1. Έστω A το ενδεχόμενο A: " η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες". Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-10)(x-11)\cdot\ldots\cdot(x-20)=0$, είναι $x=10$ ή $x=11$ ή......ή $x=20$, οπότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{10,11,12,...,20\}$ με πλήθος στοιχείων $N(\Omega)=11$. Η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν η διακρίνουσα της είναι αρνητική. Δηλαδή εφόσον,

$\Delta<0 \Leftrightarrow 64-4\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>16 \overset{\lambda\in\Omega}{\Rightarrow} \lambda \in \{17,18,19,20\}$. Επομένως το ενδεχόμενο A, είναι $A=\{17,18,19,20\}$. Αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{11}$.

Ε2. Η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ έχει πραγματικές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι μη αρνητική, δηλαδή αν και μόνο αν $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow \lambda\le 16$. Οι ρίζες είναι ρητές όταν η διακρίνουσα είναι τετράγωνο ακεραίου. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\lambda \in \{12,15,16\}$ αφού πράγματι τότε θα είναι $\Delta=16=4^2,\ \Delta=4=2^2,\ \Delta=0$ αντίστοιχα.

Τα απλά ενδεχόμενα έχουν πιθανότητες $P(i)=ki, i\in\Omega$. Τότε από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας είναι,

$P(10)+P(11)+..+P(20)=1 \Leftrightarrow 10k+11k+...+20k=1 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{165}$. Οπότε αν $B=\{12,15,16\}$ είναι το ενδεχόμενο η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ να έχει ρητές ρίζες, τότε $P(B)=P(12)+P(15)+P(16)=12k+15k+16k=43k=\dfrac{43}{165}$.

ΘΕΜΑ 89 — Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Μια ομάδα μαθητών αποτελείται από μ αγόρια και ν κορίτσια.. Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους μαθητές της ομάδας. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέχθηκε είναι αγόρι και K το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι.

Για τους μαθητές της ομάδας γνωρίζουμε ακόμη ότι:

- Η μέση τιμή της ηλικίας όλων των μαθητών είναι 16 χρόνια.
- Η μέση τιμή της ηλικίας των μ αγοριών είναι $16+2x$ χρόνια, ενώ η μέση τιμή της ηλικίας των ν κοριτσιών είναι $16-\ln(ex)$ χρόνια.
- Το x είναι πραγματικός αριθμός με $0<x<e$, για τον οποίο η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι η μέγιστη.

Ε1. Δείξτε ότι ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια, είναι $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\ln(ex)}{2x}$.

Ε2. Δείξτε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α εκφράζεται από τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(ex)}{2x+\ln(ex)}$.

Ε3. Υπολογίστε τον αριθμό x.

Ε4. Δείξτε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου K είναι διπλάσια της πιθανότητας του ενδεχομένου A.

Λύση:

Ε1. Έστω $\bar{x}$ η μέση τιμή της ηλικίας όλων των μαθητών, $\bar{a}$ και $\bar{k}$ οι μέσες τιμές των ηλικιών των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα. Τότε έχουμε,

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}x_i}{\mu}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\mu}x_i=(16+2x)\mu \quad \text{και} \quad \bar{k}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i=\left(16-\ln(ex)\right)\nu .$$

Οπότε $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}x_i+\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\mu+\nu}=\frac{(16+2x)\mu+\left(16-\ln(ex)\right)\nu}{\mu+\nu}$, άρα,

$$16=\frac{(16+2x)\mu+\left(16-\ln(ex)\right)\nu}{\mu+\nu}\Leftrightarrow 16(\mu+\nu)=(16+2x)\mu+\left(16-\ln(ex)\right)\nu$$

$$\Leftrightarrow 16\mu+16\nu=16\mu+2\mu x+16\nu-\ln(ex)\nu\Leftrightarrow 2\mu x-\ln(ex)\nu=0\Leftrightarrow\frac{\mu}{\nu}=\frac{\ln(ex)}{2x}\quad(1).$$

Ε2. Έχουμε $P(A)=\frac{\mu}{\mu+\nu}=\frac{\frac{\mu}{\nu}}{\frac{\mu+\nu}{\nu}}=\frac{\frac{\mu}{\nu}}{\frac{\mu}{\nu}+1}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{\ln(ex)}{2x}}{\frac{\ln(ex)}{2x}+1}=\frac{\ln(ex)}{\ln(ex)+2x}$.

Συνεπώς η πιθανότητα του ενδεχομένου A εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln(ex)}{2x+\ln(ex)}\ \text{με}\ 0<x<e.$$

Ε3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,e)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=2\dfrac{1-\ln(ex)}{(\ln(ex)+2x)^2}$.

Η εξίσωση $f'(x)=0$ μηδενίζεται για $x_o=1$ αφού

$2\dfrac{1-\ln(ex)}{(\ln(ex)+2x)^2}=0 \Rightarrow 1-\ln(ex)=0 \Rightarrow \ln(ex)=1 \Rightarrow ex=e \Rightarrow x=1$ και είναι

$f'(x)>0$ για $x\in(0,1)$ αφού $1-\ln(ex)<0$ όταν $x<1$ και $f'(x)<0$ για $x\in(1,e)$ διότι αφού $1-\ln(ex)>0$ για $x>1$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,e)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ ίσο με $f(1)$.

x	0 1 e
f′	+ 0 -
f	↗ Ο.μ ↘

Ε4. Είναι επίσης $P(A)=f(1)=\dfrac{1}{3}$.

Επιπλέον $P(A)+P(K)=1$ αφού τα δύο ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά. Άρα

$$P(A)+P(K)=1 \Leftrightarrow P(K)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=2\cdot\frac{1}{3}=2P(A).$$

ΘΕΜΑ 9ο

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Ε1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+(1-x)^4,\ 0\le x\le 1$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=4(2x-1)(x^2-x+1)$.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

Ε2. Αν A ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι

$$P^4(A)+P^4(A')\ge\frac{1}{8}$$

Λύση:

Ε1. α) Έχουμε $f(x)=x^4+(1-x)^4, 0\le x\le 1$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο,

$$f'(x)=4x^3+4(1-x)^3(1-x)'=4x^3-4(1-x)^3=4\left(x^3-(1-x)^3\right)=$$

$$4\left(x-(1-x)\right)\left(x^2+x(1-x)+(1-x)^2\right)=4(2x-1)(x^2+x-x^2+1-2x+x^2)=$$

$$4(2x-1)(x^2-x+1).$$

Επομένως, $f'(x)=4(2x-1)(x^2-x+1)$.

β). Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f'(x)=0}$. Συνεπώς έχουμε,

$$\mathbf{f'(x)=0 \Leftrightarrow 4(2x-1)(x^2-x+1)=0 \overset{x^2-x+1\neq 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}}$$

Είναι $\mathbf{x^2-x+1>0}$ διότι $\mathbf{\Delta<0}$ και επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\mathbf{\alpha=1>0}$.

x	0		1/2		1
$2x-1$		-	0	+	
x^2-x+1		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	0.ε	↗	

Συνεπώς η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[0,\frac{1}{2}]}$ και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[\frac{1}{2},1]}$. Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=\frac{1}{2}}$ με τιμή $\mathbf{f(\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}}$. Ας δούμε και τον πίνακα μεταβολής.

Ε2. Αφού η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με $\mathbf{\frac{1}{8}}$, από τον ορισμό της ελάχιστης τιμής ισχύει ότι $\mathbf{f(x)\geq\frac{1}{8}}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$ και επειδή ισχύει $\mathbf{0\leq P(A)\leq 1}$, θα είναι και $\mathbf{f(P(A))\geq\frac{1}{8}}$. Συνεπώς,

$$\mathbf{f(P(A))\geq\frac{1}{8}\Leftrightarrow (P(A))^4+(1-P(A))^4\geq\frac{1}{8}\Leftrightarrow (P(A))^4+(P'(A))^4\geq\frac{1}{8}}.$$

ΘΕΜΑ 91

Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας

Από τους μαθητές ενός Λυκείου

- Το $\mathbf{20\%}$ αυτών συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.
- Το $\mathbf{85\%}$ δεν συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ.
- Και το $\mathbf{8\%}$ συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Ε1. Γ: Ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανένα από τους δύο διαγωνισμούς.

Ε2. Δ: Ο μαθητής να συμμετέχει σ’ ένα μόνο διαγωνισμό.

Ε3. Ε: Ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.

Ε4. Ζ: Ο μαθητής να συμμετέχει το πολύ σ’ ένα διαγωνισμό.

Από φυλλάδιο Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΜΕ ,

B: συμμετέχει στο διαγωνισμό της ΕΕΦ Είναι

από τα δεδομένα έχουμε :

$\mathbf{P(A)=20\%, P(B)=15\%, P(A\cap B)=8\%}$

Ε1. Είναι $\mathbf{P((A\cup B)')=100\%-35\%+8\%=73\%}$

Ε2. Είναι $\mathbf{P((A-B)\cup(B-A))=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\Leftrightarrow}$

$\mathbf{P((A-B)\cup(B-A))=19\%}$

Ε3. Είναι $\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=12\%}$

Ε4. Είναι $\mathbf{P((A\cap B)')=1-P\left(A\cap B\right)=1-\frac{8}{100}=92\%}$.

ΘΕΜΑ 92

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Οι 14 από τους 15 μαθητές ενός τμήματος έγραψαν τους παρακάτω βαθμούς σε ένα test:

11, 17, 13, 11, 18, 19, 20, 13, 17, 10, 12, 17, 13, 19..

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος των παραπάνω βαθμών είναι ίση με τη μέση τιμή τους.

Ε1. Να βρεθεί ο **15ος** βαθμός αν γνωρίζετε ότι είναι ακέραιος.

Ε2. Να βρεθεί η διακύμανση των παραπάνω βαθμών.

Ε3. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και έστω τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής έγραψε τουλάχιστον **17**

B: ο μαθητής έγραψε τουλάχιστον **13**

α) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες: $\mathbf{P\left(A\right), P\left(B\right), P\left(B-A\right)}$ και $\mathbf{P\left(A'-B\right)}$.

β) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου Γ, όταν: $\mathbf{A\cup\Gamma=B}$.

Λύση:

Ε1. Το γνωστό δείγμα είναι:

$$10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 13,\ 13,\ 15,\ 17,\ 17,\ 17,\ 18,\ 19,\ 19,\ 20$$

Έστω $\alpha \in \mathbf{Z}$ ο άγνωστος βαθμός. Η μέση τιμή του δείγματος είναι ίση με

$$\bar{x} = \frac{10+2\cdot 11+\ldots+20+\alpha}{15} = \frac{210+\alpha}{15}.$$

Ισχύει $0 \le \alpha \le 20 \Leftrightarrow 210 \le 210+\alpha \le 230 \Leftrightarrow \frac{210}{15} \le \frac{210+\alpha}{15} \le \frac{230}{15} \Leftrightarrow$

$14 \le \bar{x} \le 15{,}3$ άρα και $14 \le \delta \le 15{,}3$.

Παρατηρούμε ότι στο γνωστό δείγμα δεν υπάρχουν οι βαθμοί $14, 15$ άρα έχουμε δύο περιπτώσεις:

- $\bar{x} = \delta = 14$.

  Τότε $\frac{210+\alpha}{15} = 14 \Leftrightarrow 210+\alpha = 210 \Leftrightarrow \alpha = 0$ άτοπο γιατί τότε $\delta = 13$.

- $\bar{x} = \delta = 15$.

  Τότε $\frac{210+\alpha}{15} = 15 \Leftrightarrow 210+\alpha = 225 \Leftrightarrow \alpha = 15$ δεκτή αφού τότε $\delta = 15$.

Ε2. Το δείγμα πλέον είναι:

$10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 13,\ 13,\ 13,\ 15,\ 17,\ 17,\ 17,\ 18,\ 19,\ 19,\ 20$ και έχει διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(10-15)^2 + 2(11-15)^2 + (12-15)^2 + \ldots + 2(19-15)^2 + (20-15)^2\right] =$$

$$= \frac{156}{15} = \frac{52}{5}.$$

Ε3. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι μαθητές και ο βαθμός που έγραψαν.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}
10	11	11	12	13	13	13	15	17	17	17	18	19	19	20

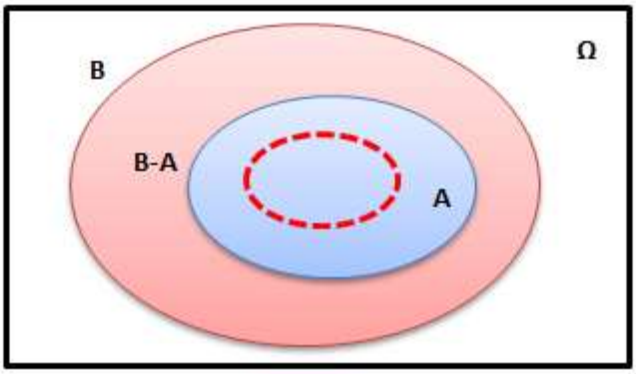
Τότε: . $A = \{M_9, M_{10}, \ldots, M_{15}\}$ και $B = \{M_5, M_6, \ldots, M_{15}\}$

α) $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{7}{15}$, $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{11}{15}$

$$B-A=\{M_5,M_6,M_7,M_8\}\Rightarrow P(B-A)=\frac{4}{15}$$

$A'=\{M_1,M_2,...,M_8\}$ οπότε $A'-B=\{M_1,M_2,M_3,M_4\}$ και $P(A'-B)=\dfrac{4}{15}$.

β) Είναι $B-A\subseteq\Gamma\subseteq B\Rightarrow P(B-A)\le P(\Gamma)\le P(B)\Rightarrow\dfrac{4}{15}\le P(\Gamma)\le\dfrac{11}{15}$



Το σύνολο Γ είναι ότι βρίσκεται μέσα στο Β και έξω από την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή.

ΘΕΜΑ 93	Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-4\kappa x+2001, x\in R$ και $\kappa=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f''(x)}{4x^2-1}$

Ε1. Να δείξετε ότι $\kappa=3$.

Ε2. Να βρείτε το σημείο $M(x_0,f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Ε3. Αν $P(A)=\dfrac{1}{2}$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{0,1,2,5\}$ ενός δειγματικού χώρου Ω , που περιέχει το στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{0\}$ και όλα τα δυνατά αθροίσματα των στοιχείων του A .

Να υπολογίσετε τα $\lambda,\mu\in R$ όταν $P(\omega_i)=\begin{cases}\lambda, \omega_i\in A\\ \mu, \omega_i\notin A\end{cases}, \omega_i\in\Omega$.

Ε4. Για $\lambda=\mu=\frac{1}{8}$, θεωρούμε το δείγμα των παρατηρήσεων $x_1,x_2,...,x_8$ με τιμές τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω. Θεωρούμε επίσης το δείγμα των παρατηρήσεων $y_i=2\lambda x_i-\mu$ με $i=1,2,...,8$.

Να κρίνετε τα δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Λύση:

Ε1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x^2-6x-4k$ και $f''(x)=12x-6$. Τότε έχουμε $k=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f''(x)}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=3$

Ε2. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x,f(x))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(x)=6x^2-6x-4k.$

x	$-\infty$ $\quad$ $1/2$ $\quad$ $+\infty$
$f''(x)=12x-6$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
f'	$\searrow$ Ο.ε $\nearrow$

Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=12x-6$

Από τον πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=\frac{1}{2}$, άρα η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης, στο σημείο με τετμημένη $x_o=\frac{1}{2}$ και συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3989}{2}\right)$.

Ε3. Αν $A=\{0,1,2,5\}$ και το Ω περιέχει το στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{0\}$ και όλα τα δυνατά αθροίσματα των στοιχείων του A, τότε $\Omega=\{0,1,2,3,5,6,7,8\}$. Τότε έχουμε: $P(\omega_i)=\begin{cases}\lambda, \omega_i\in A\\ \mu, \omega_i\notin A\end{cases}$. Άρα $\sum\limits_{i=1}^{8}P(\omega_i)=1\Leftrightarrow 4\lambda+4\mu=1\Leftrightarrow\lambda+\mu=\frac{1}{4}$.

Επιπλέον $P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\lambda=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{8}$. Οπότε και $\mu=\frac{1}{8}$.

Ε4. Το δείγμα των τιμών $\mathbf{x_i}$ έχει μέση τιμή $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{32}{8} = 4$ και τυπική απόκλιση $S_x = \sqrt{\frac{15}{2}}$. Έχουμε $y_i = 2\lambda x_i - \mu = \frac{1}{4}x_i - \frac{1}{8} = 0,25x_i - 0,125$ με $i = 1,2,...,8$. Θεωρούμε $z_i = 0,25x_i$ με $i = 1,2,...,8$.

Τότε $\bar{z} = 0,25\bar{x} = 0,25 \cdot 4 = 1$ και $S_z = 0,25S_x = 0,25\sqrt{\frac{15}{2}}$.

Τέλος $y_i = z_i - 0,125$ με $\bar{y} = \bar{z} - 0,125 = 1 - 0,125 = 0,875$ και $S_y = S_z = 0,25\sqrt{\frac{15}{2}}$.

Για τη σύγκριση ως προς την ομοιογένεια, θα χρησιμοποιήσουμε συντελεστές μεταβλητότητας. Έχουμε $CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{4}$ και $CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{0,25\sqrt{\frac{15}{2}}}{0,875}$. Έστω $CV_x \geq CV_y$. Τότε $CV_x \geq CV_y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{4} \geq \frac{0,25\sqrt{\frac{15}{2}}}{0,875} \Leftrightarrow 0,875 \geq 1$, Άτοπο και συνεπώς $CV_x < CV_y$ που σημαίνει ότι το δείγμα των x_i είναι πιο ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 94

Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς

Έστω A, B, Γ είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω έτσι ώστε $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ με A, Γ ασυμβίβαστα.

Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν τα B, Γ ταυτόχρονα είναι $0,2$, η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν τα A, B ταυτόχρονα είναι $0,4$, τα $A \cap B', B' \cap \Gamma$ ισοπίθανα και $P(A') = 0,5$ τότε:

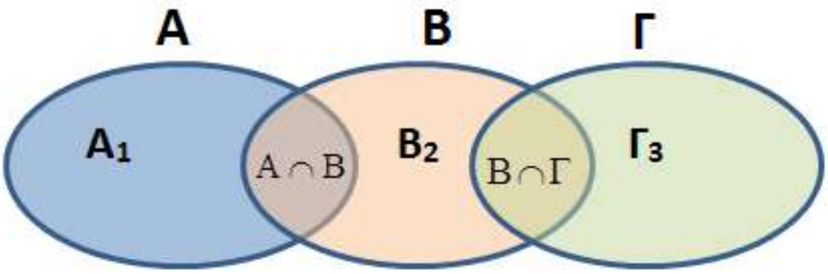
Ε1. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, Γ.

Ε2. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το B.

Ε3. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το A ή μόνο το B.

Λύση:

Ένα διάγραμμα Venn πάντα βοηθάει.



Ε1. Από τα δεδομένα έχουμε: $\mathbf{P(B \cap \Gamma) = 0{,}2}$, $\mathbf{P(A \cap B) = 0{,}4}$ και $\mathbf{P(A) = 1 - P(A') = 0{,}5}$.

Επίσης

$$\mathbf{P\left(A \cap B'\right) = P\left(\Gamma \cap B'\right) \Rightarrow P(A) - P\left(A \cap B\right) = P\left(\Gamma\right) - P\left(\Gamma \cap B\right) \Rightarrow}$$
$$\mathbf{0{,}5 - 0{,}4 = P(\Gamma) - 0{,}2 \Rightarrow P(\Gamma) = 0{,}3}$$

Τότε:

$$\mathbf{A \cup B \cup \Gamma = \Omega \Rightarrow P\left(A \cup B \cup \Gamma\right) = 1 \Rightarrow}$$
$$\mathbf{P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P\left(A \cap B\right) - P\left(B \cap \Gamma\right) - P\left(\Gamma \cap A\right) = 1}$$
$$\mathbf{\Rightarrow 0{,}5 + P(B) + 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}2 - 0 = 1 \Rightarrow P(B) = 0{,}8}$$

Ε2. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα ζητάμε την πιθανότητα του $\mathbf{B_2}$ που είναι ίση με: $\mathbf{P\left(B_2\right) = P(B) - P\left(A \cap B\right) - P\left(B \cap \Gamma\right) = 0{,}2}$.

Ε3. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα ζητάμε την πιθανότητα του $\mathbf{A_1 \cup B_2}$ που είναι ίση με:

$$\mathbf{P\left(A_1 \cup B_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(B_2\right) \overset{(*)}{=} 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3}$$

(*) είναι $\mathbf{P(A_1) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}1}$

Προφανώς $\mathbf{A_1 \cap B_2 = \varnothing}$.

ΘΕΜΑ 95

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$.

Ε1. Αν το δείγμα $P(\omega_1),P(\omega_2),\ldots,P(\omega_n)$ έχει μέση τιμή $\frac{1}{9}$, να δείξετε ότι $n=9$.

Ε2. Αν το εύρος του δείγματος $P(\omega_1),P(\omega_2),\ldots,P(\omega_9)$ είναι 0,01 , δείξτε ότι τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

Ε3. Αποδείξτε ότι η διάμεσος του δείγματος $P(\omega_1),P(\omega_2),\ldots,P(\omega_9)$ δεν μπορεί να ισούται με $0,51$.

Λύση:

Ε1. $\bar{x}=\dfrac{P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+\ldots+P(\omega_n)}{n}\Leftrightarrow \dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow n=9$.

Ε2. Αν τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα τότε

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=\ldots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$$

και το εύρος τους θα είναι $R=0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $R=0,01$, άρα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου δεν είναι ισοπίθανα.

Ε3. Αν θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$P(\omega_1)\le P(\omega_2)\le P(\omega_3)\le P(\omega_4)\le P(\omega_5)\le P(\omega_6)\le P(\omega_7)\le P(\omega_8)\le P(\omega_9)$ τότε, αν είναι $\delta=0,51$, επειδή ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι $n=9$, περιττός, θα ισχύει, $\delta=P(\omega_5)=0,51$ και $0,51=P(\omega_5)\le P(\omega_6)\le P(\omega_7)\le P(\omega_8)\le P(\omega_9)$.

Οπότε $P(\omega_6)+P(\omega_7)+P(\omega_8)+P(\omega_9)\ge 4\cdot 0,51>1$. Άτοπο

Άρα δεν μπορεί να είναι $\delta=0,51$.

ΘΕΜΑ 96

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω A,B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $A,B\neq\varnothing$.

Δίνεται επίσης και η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(A\cap B)\cdot x$ με $x\in R$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $x=P(A-B)$.

Ε2. Αν $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $f(P(A)) = 2f(0)$.

Ε3. Αν $B \subseteq A$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

β) Ο τύπος της f γράφεται $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (P(A) - P(B))x + \frac{1}{2}P^2(A)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Αλέξανδρος Τραγανίτης

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = x - P(A) + P(A \cap B) \overset{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}{=} x - P(A-B)$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = P(A-B)$

x	$-\infty$	P(A-B)	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘	Ο.ε	↗

Από τον διπλανό πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, P(A-B)]$ και γνησίως αύξουσα. στο $[P(A-B), +\infty)$ ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = P(A-B)$.

Ε2. Αφού $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ και συνεπώς $P(A \cap B) = P(A)$

και άρα: $f(P(A)) = P(A \cap B) \cdot P(A) = P^2(A) = 2f(0)$.

Ε3. Γενικά $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$. Οπότε έχουμε $P(A \cap B) = P(B)$ και $P(A \cup B) = P(A)$.

α) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

β) $f(x) = \frac{x^2}{2} - P(A)x + \frac{P^2(A)}{2} + P(B)x = \frac{x^2}{2} + (P(B) - P(A))x + \frac{P^2(A)}{2}$.

γ) Η διακρίνουσα της εξίσωσης :

$$\frac{x^2}{2} + (P(B) - P(A))x + \frac{P^2(A)}{2} = 0$$

είναι:

$\Delta=\left[P(B)-P(A)\right]^2-P^2(A)=P^2(B)-2P(B)P(A)=P(B)\left[P(B)-2P(A)\right]<0$ Αφού $0<P(B)\le P(A)<2P(A)$.

ΘΕΜΑ 97

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Ε1. Αν A,B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ και $P^2(B)-\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)P(B)+\frac{P(A)}{2}\le 0\ (1)$, τότε να δείξετε ότι $P(B)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Ε2. Έστω A,B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $B\subseteq A$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $2P(A)[2P(A)-P(B)]\ge P^2(A)+P^2(B)$.

Ε3. Αν A,B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A)-2P(A')+3P(B)\ge 2P(A\cup B)+2P(A\cap B)$. Να δείξετε ότι $P(A)=P(B)$.

Μάμαλης, Μιχαήλογλου, Τόλης

Λύση:

Ε1. Είναι $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$

- Αν $P(B)=0$ τότε η $P(A)\le P(B)$ δίνει $P(A)\le 0\Rightarrow P(A)=0$ και η (1) γίνεται $0^2-\left(0+\frac{1}{2}\right)0+\frac{0}{2}\le 0$ που ισχύει.

- Αν $P(B)\ne 0$ τότε η (1) δίνει

$$P(B)\left[P(B)-P(A)\right]-\frac{P(B)-P(A)}{2}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[P(B)-P(A)\right]\left[P(B)-\frac{1}{2}\right]\le 0\Leftrightarrow\left[P(A)-P(B)\right]\left[P(B)-\frac{1}{2}\right]\ge 0.$$

Έχουμε $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)\Leftrightarrow P(A)-P(B)\le 0$ οπότε από τη τελευταία ανίσωση προκύπτει $P(B)-\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow P(B)\le\frac{1}{2}$.

Άρα ισχύει $0\le P(B)\le\frac{1}{2}$.

Ε2. $B \subseteq A \Rightarrow 0 \le P(B) \le P(A)$.

Τότε: $2P(A)[2P(A)-P(B)] \ge P^2(A)+P^2(B) \Leftrightarrow$

$3P^2(A)-2P(A)P(B)-P^2(B) \ge 0 \Leftrightarrow$

$[P(A)-P(B)]^2+2[P(A)-P(B)][P(A)+P(B)] \ge 0 \Leftrightarrow$

$[P(A)-P(B)][3P(A)+P(B)] \ge 0$. Το οποίο ισχύει .

Ε3. Ισχύει $0 \le P(A) \le 1$ και $0 \le P(B) \le 1$ οπότε $0 \le P(A)+P(B) \le 2$.

Τότε:

$P(A)-2P(A')+3P(B) \ge 2P(A \cup B)+2P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(A)-2+2P(A)+3P(B) \ge 2P(A)+2P(B)-2P(A \cap B)+2P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(A)+P(B) \ge 2$. Όμως $0 \le P(A) \le 1$ και $0 \le P(B) \le 1$. Επομένως έχουμε ότι $P(A)=P(B)=1$.

ΘΕΜΑ 98

Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,...,\nu\}$ του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Αν ν είναι η μέση βαθμολογία ενός μαθητή στα 5 μαθήματα, στα οποία οι βαθμοί ήταν $12,10,16,18,14$ και οι συντελεστές βαρύτητας $2,3,1,1,3$ αντίστοιχα, τότε:

Ε1. Να βρείτε το $N(\Omega)$.

Ε2. Έστω τα ενδεχόμενα $A=\{\alpha \in \Omega / \alpha$ **είναι άρτιος**$\}$

και $B=\{\alpha \in \Omega, \alpha$ **ρίζα της εξίσωσης** $x^3-5x^2+4x=0\}$.

α) Να βρεθούν $P(A)$ και $P(B)$.

β) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα $A \cup B, A \cap B$ καθώς και οι πιθανότητες αυτών.

Λύση:

Ε1. Ο σταθμικός μέσος των 5 μαθημάτων είναι:

$$\bar{x}=\frac{12 \cdot 2+10 \cdot 3+16 \cdot 1+18 \cdot 1+14 \cdot 3}{2+3+1+1+3}=\frac{130}{10}=13 .$$

Άρα $v=13$ οπότε $\Omega=\{1,2,3,...,13\}$ και $N(\Omega)=13$.

Ε2. α) Είναι $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ και $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{13}$.

$x^3-5x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-5x+4)=0 \Leftrightarrow x(x-4)(x-1)=0$.

Άρα $x=1$ ή $x=4$ ή $x=0\notin\Omega$.

Έτσι $B=\{1,4\}$ και $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{13}$.

β) Είναι $A\cup B=\{1,2,4,6,8,10,12\}$ και $P(A\cup B)=\dfrac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\dfrac{7}{13}$.

$A\cap B=\{4\}$ και $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{13}$.

ΘΕΜΑ 99

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ και οι πιθανότητες $P(k)=\dfrac{2|k|-k}{100}, k\in\Omega, k\neq 0$.

Ε1. Να βρεθούν οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

Ε2. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου A: " Η εξίσωση $x^2-4kx+12=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες".

Ε3. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου B: " Η συνάρτηση $f(x)=3x^4-6x^2+k$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=k$ ".

Ε4. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A\cap B, A\cup B$.

Λύση:

Ε1. Είναι $P(-3)=\dfrac{9}{100}$, $P(-2)=\dfrac{6}{100}$, $P(-1)=\dfrac{3}{100}$, $P(1)=\dfrac{1}{100}$, $P(2)=\dfrac{2}{100}$ και $P(3)=\dfrac{3}{100}$.

$P(-3)+P(-2)+P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=1\Rightarrow$

$$P(0)=1-\frac{9}{100}-\frac{6}{100}-\frac{3}{100}-\frac{1}{100}-\frac{2}{100}-\frac{3}{100}\Rightarrow$$

$$P(0)=\frac{76}{100}.$$

Ε2. Για να έχει η εξίσωση $x^2-4kx+12=0$ δύο άνισες πραγματικές ρίζες, πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow 16k^2-48>0\Leftrightarrow k^2>3\Leftrightarrow\{k<-\sqrt{3}\ \text{ ή }\ k>\sqrt{3}\}$.

Επειδή $k\in\Omega$ θα είναι $A=\{-3,-2,2,3\}$, οπότε:

$$P(A)=P(-3)+P(-2)+P(2)+P(3)\Leftrightarrow P(A)=\frac{9}{100}+\frac{6}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{20}{100}.$$

Ε3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=12x^3-12x.$$

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=k$ θα ισχύει:

$$f'(k)=0\Leftrightarrow 12k^3-12k=0\Leftrightarrow k(k-1)(k+1)=0\Leftrightarrow k=0 \text{ ή } k=1 \text{ ή } k=-1.$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1],[0,1]$ γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, $[-1,0]$.
Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις $k=-1$ και $k=1$.
Και τοπικό μέγιστο στη θέση $k=0$.

k	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
κ+1	-	0	+		+		+
κ-1	-		-		-	0	+
κ	-		-	0	+		+
$f'(k)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(k)$	↘	Τ.ε	↗	Τ.μ	↘	Τ.ε	↗

Έτσι $B=\{-1,0,1\}$ και

$$P(B)=P(-1)+P(0)+P(1)\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{100}+\frac{6}{100}+\frac{76}{100}\Leftrightarrow P(B)=\frac{85}{100}.$$

Ε4. Παρατηρούμε ότι:

$A\cap B=\varnothing$, οπότε $P(A\cap B)=0$ και $A\cup B=\Omega$, οπότε $P(A\cup B)=1$.

ΘΕΜΑ 100

Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω ισχύει ότι $P(\kappa)=\alpha\kappa+\beta, \kappa\in\Omega$.

Θεωρούμε επίσης το ενδεχόμενο

$A=\left\{\kappa\in\Omega / \text{οι παρατηρήσεις } 1,2,\kappa,2\kappa+4,2\kappa+3 \text{ έχουν } CV<\frac{\sqrt{14}}{5}\right\}$ για το οποίο ισχύει $P(A)=\frac{3}{10}$.

Ε1. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$.

Ε2. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$B=\left\{\kappa\in\Omega / \text{το ελάχιστο της } f(x)=x^2-2\ln x+\kappa^2-5\kappa \text{ είναι μεγαλύτερο του } -5\right\}$

α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $g(x)=P((A-B)\cup(B-A))x^3+\frac{x^2}{P(A\cup B')}-7x+1$ που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 135^0.

Λύση:

Ε1. $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1\Leftrightarrow$

$\alpha+\beta+2\alpha+\beta+3\alpha+\beta+4\alpha+\beta+5\alpha+\beta=1\Leftrightarrow$

$15\alpha+5\beta=1\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=0,2$ (1).

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $1,2,\kappa,2\kappa+4,2\kappa+3$ είναι:

$$\bar{x}=\frac{1+2+\kappa+2\kappa+4+2\kappa+3}{5}\Leftrightarrow \bar{x}=\kappa+2.$$

Η διακύμανση τους είναι:

$$s^2=\frac{(1-\kappa-2)^2+(2-\kappa-2)^2+(2\kappa+4-\kappa-2)^2+(\kappa-\kappa-2)^2+(2\kappa+3-\kappa-2)^2}{5}\Leftrightarrow$$

$s^2=\frac{4\kappa^2+8\kappa+10}{5}$. Ο συντελεστής μεταβολής τους είναι:

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow CV=\frac{\sqrt{4\kappa^2+8\kappa+10}}{\sqrt{5}(\kappa+2)}$$

$\mathbf{CV < \frac{\sqrt{14}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4\kappa^2+8\kappa+10}}{\sqrt{5}(\kappa+2)} < \frac{\sqrt{14}}{5} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\frac{4\kappa^2+8\kappa+10}{5(\kappa+2)^2} < \frac{14}{25} \Leftrightarrow \frac{2\kappa^2+4\kappa+5}{(\kappa+2)^2} < \frac{7}{5} \Leftrightarrow 3\kappa^2-8\kappa-3<0}$ (2).

$\mathbf{\Delta = 64+36 = 100}$ οπότε οι ρίζες της (2) είναι $\mathbf{\kappa = -\frac{1}{3}}$ και $\mathbf{\kappa = 3}$.

Για να ισχύει η (2) πρέπει $\mathbf{-\frac{1}{3} < \kappa < 3}$ και επειδή $\mathbf{\kappa \in \Omega}$ θα είναι $\mathbf{\kappa = 1}$ ή $\mathbf{\kappa = 2}$.

Με $\mathbf{\kappa = 1}$ είτε $\mathbf{\kappa = 2}$ θα είναι $\mathbf{A = \{1,2\}}$

$\mathbf{P(A) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) = \alpha+\beta+2\alpha+\beta = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta = 0{,}3}$ (3).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (3) βρίσκουμε ότι $\mathbf{\alpha = \frac{1}{30}}$ και $\mathbf{\beta = \frac{1}{10}}$

οπότε $\mathbf{P(\kappa) = \frac{1}{30}\kappa + \frac{1}{10}}$.

Ε2. **α)** Με $\mathbf{x > 0}$ είναι: $\mathbf{f'(x) = 2x - \frac{2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2-2}{x}}$

$\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1}$ **ή** $\mathbf{x = -1 < 0}$ απορρίπτεται.

Η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα για $\mathbf{x \in (0,1]}$ και γνησίως αύξουσα για $\mathbf{x \in [1,+\infty)}$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $\mathbf{x = 1}$ το $\mathbf{f(1) = \kappa^2 - 5\kappa + 1}$.Πρέπει

$\mathbf{f(1) > -5 \Leftrightarrow \kappa^2 - 5\kappa + 6 > 0 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow (\kappa-3)(\kappa-2) > 0}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x+1		-	0	+		+		+	
x-1		-		-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$						↘	Ο.ε	↗	

Έτσι $\mathbf{\kappa < 2}$ ή $\mathbf{\kappa > 3}$ και επειδή $\mathbf{\kappa \in \Omega}$ θα είναι $\mathbf{\kappa = 1}$ ή $\mathbf{\kappa = 4}$ ή $\mathbf{\kappa = 5}$.

Άρα $\mathbf{B = \{1,4,5\}}$ και τότε

$\mathbf{P(B) = P(1) + P(4) + P(5) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{4}{30} + \frac{1}{10} + \frac{5}{30} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{P(B) = \frac{10}{30} + \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) = \frac{19}{30}}$.

β) $A-B=\{2\}$, $B-A=\{4,5\}$ και $(A-B)\cup(B-A)=\{2,4,5\}$ οπότε

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(2)+P(4)+P(5)=\frac{2}{30}+\frac{1}{10}+\frac{4}{30}+\frac{1}{10}+\frac{5}{30}+\frac{1}{10}=\frac{2}{3}$$

$B'=\{2,3\}$ και $A\cup B'=\{1,2,3\}$ οπότε

$$P(A\cup B')=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{30}+\frac{1}{10}+\frac{3}{30}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}.$$

Άρα $g(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2-7x+1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=2x^2+4x-7$, $x\in R$.

Πρέπει $g'(x)=\varepsilon\varphi 135^\circ \Leftrightarrow 2x^2+4x-7=-1\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0\Leftrightarrow$

$x^2+2x-3=0\Leftrightarrow(x+3)(x-1)=0\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$.

Έτσι $g(-3)=\frac{2}{3}(-27)+2\cdot 9-7\cdot(-3)+1=-18+18+21+1=22$

$g(1)=\frac{2}{3}+2-7+1=\frac{2}{3}-4=\frac{-10}{3}$.

1ος τρόπος

Η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της C_g είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=g'(-3)=-1$ και επειδή το σημείο επαφής $A(-3,g(-3))$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $22=(-1)\cdot(-3)+\beta\Rightarrow\beta=19$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $y=-x+19$

Κατά τον ίδιο τρόπο, η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της C_g είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=g'(1)=-1$ και επειδή το σημείο επαφής $B(1,g(1))$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή,

$\frac{10}{3}=(-1)\cdot 1+\beta\Rightarrow\beta=-\frac{10}{3}+1=-\frac{7}{3}$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση

$y=-x-\frac{7}{3}$

2ος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(-3,g(-3))$ είναι η:

$$(\varepsilon_1): y-g(-3)=g'(-3)(x+3)\Leftrightarrow y-22=-x-3\Leftrightarrow y=-x+19.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $B(1,g(1))$ είναι η:

$$(\varepsilon_2): y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+\frac{10}{3}=-x+1\Leftrightarrow y=-x-\frac{7}{3}$$