ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Επανάληψη

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr www.iliaskos.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΠΡΩΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\lambda-\lambda i$ και $w=2\lambda+\lambda i$ με $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε δύο ευθείες οι οποίες είναι μεταξύ τους κάθετες.

ii) Να αποδείξετε ότι $z^{10}+w^{10}=0$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\nu\in\mathbb{N}^*$ για τις οποίες ισχύει $z^{\nu}+w^{\nu}=0$.

2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z,w για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$z+2w=4+4i.$$

i) Να βρείτε τους z,w σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ο z είναι πραγματικός και ο w φανταστικός.

β) ο w είναι ο συζυγής του z.

ii) Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $\varepsilon:\ y=x+2$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε μία άλλη ευθεία, παράλληλη προς την (ε).

iii) Αν η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει την ευθεία $\eta:\ y=x-1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w-i|$.

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2,z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=\mathrm{Re}(z_3) \text{ και } \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=6i.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{1}{\overline{z_1}}+\dfrac{1}{\overline{z_2}}+\dfrac{1}{\overline{z_3}}=-6i$.

ii) οι αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι φανταστικοί.

iii) αν $\mathrm{Im}(z_1)=2\,\mathrm{Im}(z_2)=3\,\mathrm{Im}(z_3)$, να βρείτε τους αριθμούς z_1, z_2, z_3.

4. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\overline{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$.

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z-i|=1$.

ii) Αν $w=\dfrac{1}{z}$, να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο.

β) τον μιγαδικό z για τον οποίο το $|w|$ γίνεται ελάχιστο.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=(3+4i)z+i$, όπου $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $\operatorname{Re}[f(z)]=3x-4y$ και $\operatorname{Im}[f(z)]=4x+3y+1$.

ii) αν η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $\varepsilon:\ y=x+1$, τότε η εικόνα του z κινείται επίσης σε ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) αν A, B, Γ, Δ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z, i, f(z), f(i)$ αντίστοιχα, τότε:

α) $f(z)-f(i)=(3+4i)(z-i)$.

β) $(\Gamma\Delta)=5(AB)$.

6. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$|z-2|=1 \quad \text{και} \quad |w-2i|=1.$$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z και w.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί z,w, τέτοιοι ώστε $z=w$.

iii) Να αποδείξετε ότι $|z|\le 3$ και $|w|\le 3$.

iv) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

7. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+yi\neq 0$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και $w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{\overline{z}}$.

i) Να γράψετε τον w στη μορφή $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τους μιγαδικούς z με $|z|=1$ και $w\in\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$|z|^2\cdot\operatorname{Re}(w)=2\operatorname{Im}^2(z).$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}+|z|,\ z\in\mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

ii) $f(z)\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $z\in\mathbb{R}$.

iii) αν $|z|\le 1$, τότε $|f(z)|\le 2$.

iv) δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z, τέτοιος ώστε $f(z)=2z-3i$.

9. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z-9| = 3|z-1|$.

i) Να βρείτε το $|z|$.

ii) Αν για το μιγαδικό αριθμό w ισχύει η σχέση $(w-5i)(\bar{w}+5i)=1$, τότε:

α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο.

β) να αποδείξετε ότι $1 \le |z-w| \le 9$.

10. A. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = (3\lambda-5)+(\mu-2)i \quad \text{και} \quad z_2 = (2\mu-1)+(\lambda-1)i.$$

Εάν $A(w_1)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_1 = z_1 + z_2$ η οποία κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon_1: y = x+2$, ενώ $B(w_2)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_2 = z_1 - z_2$ η οποία κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon_2: y = x$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί μ, λ.

B. Εάν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει η ισότητα $|z_1| = |z_2| = 1$, να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1| = |z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1|$.

11. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

ii) Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

α) Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2.

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

12. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $8z_1^3 = z_2^3 = 8$.

i) Να αποδείξετε ότι $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = \left|2z_1 + \dfrac{1}{2}z_2\right|$.

iii) Να αποδείξετε ότι $1 \le |z_1 + z_2| \le 3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=|z+2i|$, $z\in\mathbb{C}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(\overline{z})=|iz+2|$ και $f(-z)=f(\overline{z})$.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z, όταν ισχύει $f(1+i+z)=f(2+3i+z)$.

iii) Εάν ισχύει η ισότητα $f^2(z)+f^2(\overline{z})=10$, να δείξετε ότι $|z|=1$.

iv) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $f(z)=f(\overline{z})$, τότε και μόνο τότε $z\in\mathbb{R}$.

v) Να βρεθεί ο μιγαδικός $z=x+yi$, όταν ισχύει

$$z+f(z-2i)=f^2(1-i)+i\,f(i).$$

14. Δίνεται η μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής $u=f(z)$, $z\in\mathbb{C}$ για την οποία ισχύει $2f(z)+f(1-z)=3z^2-7z+14$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(z)=z^2-5z+6$, $z\in\mathbb{C}$.

ii) Να βρεθούν τα $\mathrm{Re}(f(z))$ και $\mathrm{Im}(f(z))$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(z)=-5z+9+4i$.

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f(z)=5-4z$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

v) Να λυθεί η ανίσωση $f(z)>0$.

vi) Να αποδείξετε ότι $f(z)\cdot f(\overline{z})>0$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

15. Α. Έστω $A(z_1)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z_1, ο οποίος κινείται πάνω σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$. Εάν $B(z_2)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z_2 και ισχύει $z_2=i\overline{z}_1-\dfrac{4}{z_1}$, τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z_2 κινείται επίσης σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2-z_1\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι $z_2-z_1=1$.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

iii) Αν ο αριθμός ${z_1}^2$ είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να αποδειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z}_1+1-i)^{20}=0$.

16. **Α.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει

$$\frac{|z_1|}{\sqrt{2}} = \frac{|z_2|}{2} = \frac{|z_3|}{2\sqrt{2}}.$$

Αν τα σημεία $A(z_1), B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα και το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90°$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)}{\mathrm{Re}(z_2\overline{z}_3)} = \dfrac{1}{2}$.

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει

$$|z_1 + z_2|^2 - 2\left[1 + \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right] + 3 \le 2\left(2|z_1| + 3|z_2| - 6\right).$$

i) Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών z_1, z_2.

ii) Δίνεται ο μιγαδικός $w = \dfrac{3z_1}{2z_2} - \dfrac{2z_2}{3z_1}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αριθμός.

17. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν

$$|w| = 1 \quad \text{και} \quad z = 4\sqrt{2}w + 1 - i.$$

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii) Να βρείτε ποιοι από τους μιγαδικούς z του παραπάνω γεωμετρικού τόπου έχουν το μεγαλύτερο και μικρότερο μέτρο και ποια είναι τα αντιστοιχα μέτρα.

18. **Α.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \quad \text{και} \quad 2z_1 - \overline{z}_2 = 5 + 5i.$$

Να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1, z_2.

Β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν

$$|z - 1 - 3i| \le \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |w - 3 - i| \le \sqrt{2}, \text{ τότε:}$$

i) να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w ώστε $z = w$.

ii) να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

19. **Α.**

i) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 = i\overline{z}$.

ii) Αν A, B και Γ είναι οι εικόνες των μη μηδενικών λύσεων της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

Β. Δίνεται η εξίσωση $4z^2+4\lambda z+4\lambda-3=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές;

ii) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, αν ο μιγαδικός $z_0=-1+\frac{1}{2}i$ είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

20. Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+2i}{z+1}$ με $z\neq-1$.

i) Να βρεθεί ο μιγαδικός z ώστε $f(z)=3-2i$.

ii) Αν ισχύει $\text{Re}(f(z))=0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

iii) Αν ισχύει $|f(1+2i+z)|=1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Β. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_1 κινείται πάνω στον κύκλο $|z+1+2i|=1$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού z_2 κινείται πάνω στον κύκλο $|z-3-i|=2$, να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου της διαφοράς z_1-z_2.

21. Αν z μιγαδικός με $\text{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$, τότε:

i) αν $\text{Im}(z)=1$, να βρείτε το $\text{Re}(z)$.

ii) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

iii) να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

iv) αν z_1, z_2 μιγαδικοί με $\text{Re}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)=\text{Re}\left(\dfrac{1}{z_2}\right)=\dfrac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$.

22.

i) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο C των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z-i|=1$ και $\text{Im}(z)\geq1$.

ii) Να δείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στο σύνολο C, τότε η εικόνα του μιγαδικού $w=\dfrac{1}{2}\left(z-i-\dfrac{1}{z-i}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

23. Έστω $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ και $w = \dfrac{iz+1}{z+i}$.

i) Αν η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z) < 0$.

ii) Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 2$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του w.

iii) Αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του z.

24. Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντιστοίχως οι σχέσεις

$$z\overline{z} + i(z - \overline{z}) = 1 \quad \text{και} \quad (w-3)^7 = \frac{1-2i}{2-i}.$$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Να βρείτε τη γραμμή C_2 που βρίσκονται οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο.

iii) Αν $M(z_1) \in C_1$ και $M'(z_2) \in C_2$, να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

25. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha > \dfrac{1}{4}$.

ii) Αν $|z| = 1$, τότε:

α) να βρείτε το α.

β) να λύσετε την εξίσωση.

γ) να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $(z - z_1)^5 - (z - z_2)^5 = 0$.

26. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $w = \dfrac{i}{\overline{z}}$.

i) Αν ισχύει $|w+1| = |w|$ (1), να δείξετε ότι $|z - i| = 1$.

ii) Αν ισχύει $|w - i| = \sqrt{2}$ (2), να δείξετε ότι $|z+1| = \sqrt{2}$.

iii) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους C_1 και C_2 των εικόνων M των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει αντίστοιχα η σχέση (1) και (2).

iv) Αν οι εικόνες M_1 και M_2 των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται στους C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

27. Έστω ο μιγαδικός z.

i) Να δείξετε ότι $\left|z(1+i)-2\right|=\sqrt{2}\left|z-1+i\right|$.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων z για τους οποίους ισχύει

$$\left|z(1+i)-2\right|=\sqrt{3}\left|iz\right|. \quad (1)$$

iii) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z' που επαληθεύει την (1).

iv) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 επαληθεύουν την (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $\left|z_1-z_2\right|$.

28. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(f(x))=x^9 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι 1-1.

ii) αν $f(2)=8$, τότε η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μοναδική λύση την $x=\sqrt[3]{2}$.

iii) για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η ευθεία $y=\alpha$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

29. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(f(x))=f(x)+2x-2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε το $f(1)$.

iii) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f(2)=3$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(x)=x-2+2f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) να βρείτε το $f(3)$.

γ) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

30. Έστω η συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1, συνεχής και τέτοια

ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{\sigma\upsilon\nu x-1}=-2$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$.

ii) $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

31. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\left[f^2(x)+1\right]\eta\mu^2 x \le 2x^2 f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}=1$.

iii) αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε $\ell=1$.

iv) αν η f είναι συνεχής και $f(\pi)=\pi$, τότε υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=2$.

32. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=1$.

i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x}{f(x)-\lambda x}=3.$$

ii) Αν η C_f δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

iii) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, να βρείτε:

α) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) το πρόσημο της f.

33. Έστω οι δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$f(0)<0 \quad \text{και} \quad f(x)+g^2(x)=x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η g είναι συνεχής και $g^2(x)\ne x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής.

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

iii) $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

v) η εξίσωση $(2x-1)g(x)=x^2-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

34. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{x-3}=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $x_0\in(1,3)$, τέτοιος ώστε

$$f(x_0)=\frac{f(2)+f(e)}{2}.$$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2f(x-2)}{x-3}=1$.

35. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f^2(1)+f^2(4)+10=2f(1)+6f(4)$ και $f^2(x)-4f(x)+3\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τους $f(1)$ και $f(4)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο m και ολικό μέγιστο M.

iii) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

iv) Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

36. Έστω η συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε

$$f(x^2)<2f(x)\le f(2x) \quad \text{για κάθε } x\in(0,2).$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Αν η f είναι συνεχής και $f(2)=2$, να βρείτε:

α) το $f(0)$ και το $f(4)$.

β) το σύνολο τιμών της f.

37. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2-\sqrt{3-x}$.

i) Να υπολογίστε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να βρείτε σε ποιο σημείο η f τέμνει τον άξονα $x'x$.
iii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
iv) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.
v) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
vi) Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.
vii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και f^{-1}.
viii) Να μελετηθεί η f^{-1} ως προς τη μονοτονία.
ix) Να αποδείξετε ότι $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in(-\infty,3]$.

38. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(x)+f(1-x)=3x^2-7x+14 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρεθεί ο τύπος της f.

ii) Για ποιες τιμές του x η f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

iii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων
$f(x)$ και $g(-x)=-x^3+x^2+8x+8$.

39. A. Να λυθεί η ανίσωση $\ln\left(x^2-3x+7\right)-\ln(2x+1)<2^{2x+1}-2^{x^2-3x+7}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$x^3\cdot f(x)+y^3 f(y)>y^3\cdot f(x)+x^3\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ με $x<y$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(x^2-x\right)<f(x)$.

40. A. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$g\big(f(x)\big)+f\big(f(x)\big)=x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)+f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Αν η συνάρτηση g είναι 1-1 και διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, για ποια τιμή του x οι συναρτήσεις f και f^{-1} τέμνονται;

B. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και 1-1 στο $\mathbb{R}$. Αν η f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,5)$, τότε να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(3-f^{-1}\left(1+f^{-1}\left(x^2-4\right)\right)\right)=5.$$

41. A. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0}\left[g(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\right]=3.$$

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to0}f(x)\cdot g(x)$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x^4\cdot g(x)}{x^2+\eta\mu^2 x}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5.$$

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+f(2x)}{x+f(-x)}$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(2x)+f(3x)}{x+\eta\mu 5x}$

42. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x)+f(x)=x^3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+x\cdot ημy+y \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

ii) Να υπολογίσετε την οριακή τιμή x_0, όταν ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=5.$$

43. **Α.** Δείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{συνx}{x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ με τιμές στο διάστημα $[0,3]$ για την οποία ισχύει

$$f(x)=f^{-1}\left(\frac{x^2-3x+4}{2}\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(f(x))>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,2)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

44. **Α.** Να λυθεί η εξίσωση $e^x+e^{2x}+x\cdot(x^2+2)=2$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x+\ln x=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

45. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x f(x)-4x^3+2x-ημx=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της f.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

46. **A.** Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν οι f,g είναι γνησίως αύξουσες, να δείξετε ότι και η $h=f+g$ είναι γνησίως αύξουσα.

B. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το λ ώστε $e^{\lambda+1}+\lambda=0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x-1>0$.

47. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=1-\ln x$ και $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

i) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii) Να βρείτε την g^{-1}.

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $g^{-1}\circ f$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}\big(f(x)\big)>0$.

48. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x f(x)+\eta\mu x=x^2\eta\mu\frac{1}{x} \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της f.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2-\sigma\upsilon\nu x$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii) Να βρείτε το $f(\Delta)$ και να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=2+\sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική λύση στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x}$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

v) Να λύσετε στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ την εξίσωση $f(x)+f\left(x^2\right)+f\left(x^{2007}\right)=-9$.

50. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3ημ\dfrac{1}{x}+λx & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$ με $|λ|<\dfrac{1}{π}$.

i) Να βρείτε την f'.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-\dfrac{1}{π},\dfrac{1}{π}\right)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

51. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$|ημx|\leq f(x)\leq |x| \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iii) η f^2 είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iv) ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f^2.

52. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε $g(1)=1$, $f'(1)=3$ και

$$f(g(x))=[g(x)]^2+αx^2+βx-1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου $α,β$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $α=2$ και $β=-1$.

ii) να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x)=g(f(x))$ στο σημείο $x_0=1$.

iii) να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(f(x))-g(x)}{x-1}=6$.

53. Έστω η συνάρτηση $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$5x-x^2\le f(x)\le 10x-2x^2 \quad \text{για κάθε } x\in[0,5].$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

α) για κάθε $x\in(0,5)$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,x)$ και $\xi_2\in(x,5)$, τέτοιοι ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(x)}{x-5}.$$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,5)$ με $\xi_1<\xi_2$, τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=0.$$

54. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f(0)\ne 0 \quad \text{και} \quad f(x)f'(x)=x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

ii) η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

iii) η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

iv) αν $f(0)=1$, τότε $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

55. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z=\frac{f'(x)+f(x)i}{x+i},\ x\in\mathbb{R}$$

i) Αν $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ii) Αν $f(0)=1$ και ο z είναι πραγματικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in\mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

β) να βρείτε τον τύπο της f.

56. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f'(2)=g'(2)+3 \quad \text{και} \quad f''(x)=g''(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)=g'(x)+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) αν $f(1)=2$ και $g(1)=-1$, τότε:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{g(x)+x}=1$.

β) $f(x)-g(x)=3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) υπάρχει $x_0\in(0,2)$, τέτοιος ώστε $(4x_0+1)f(x_0)=10+3^{x_0}g(x_0)$.

57. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f'(x)\left(e^x+e^{-x}\right)=f(x)\left(e^x-e^{-x}\right) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x+e^{-x}},\ x\in\mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^2$.

iv) Αν $f(0)=2$, να βρείτε τον τύπο της f.

58.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x)=x^2-x+\ln x,\ x\in(0,+\infty)$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=1+x-x^2 \quad \text{και} \quad h(x)=1+\ln x$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτόμενες ευθείες τους είναι κάθετες μεταξύ τους.

iii) Να αποδείξετε ότι $2+x\ln x>x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

59. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $xf(x^2)+f^2(x)=2x^2+4x$ για κάθε $x\geq 0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$.

60. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε

$$f'(x)\neq f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x),\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη.

ii) αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(1,e)$, τότε:

α) η g είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $e^x<f(x)<2e^x$ για κάθε $x\in(0,1)$.

61. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Αν η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0,f(0))$, να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)>1$ για κάθε $x>0$.

ii) $0<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=xe^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

i) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2},\ x\in(1,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

ii) $e^{x-2}\geq \ln\left(\dfrac{e}{x-1}\right)$ για κάθε $x\geq 2$.

iii) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^4+x^2+2x-3$.

64. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$(x^2+4)f''(x)+xf'(x)=f(x)\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η f έχει τοπικό ακρότατο το $f(0)=2$, να αποδείξετε ότι:

i) $\left((x^2+4)f'(x)\right)'=\left(xf(x)\right)'$.

ii) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^2+4},\ x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

iii) $f^2(x)=x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

65.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x)=e^{2x}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z=e^x+(x-1)i\quad \text{και}\quad w=e^x-i,\ \text{με } x\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ο $z\cdot w$ είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι $z=w=1-i$.

β) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z έχει ελάχιστο μέτρο.

66. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f(1)=2\quad \text{και}\quad (f(x))^2\geq 4x\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(1)=1$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2}{x-1}=5$.

iii) η εξίσωση $(f(x))^2=3x+2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2]$.

67. Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε

$$f(1)=2 \quad \text{και} \quad f(f(x))=x \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

ii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$, τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

iii) η f δεν έχει ακρότατα.

iv) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

68. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ολικό μέγιστο M για $x=1$ και για $x=2$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

ii) η εξίσωση $f''(x)=(f'(x))^2$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

iii) αν $M\neq0$, τότε υπάρχει $x_0\in(1,2)$, τέτοιος ώστε $f'(x_0)=(2x_0-3)f(x_0)$.

69. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f(1)=3 \quad \text{και} \quad f(x)\geq 2x+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται στη C_f.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x}{\sqrt{x}-1}$.

iii) Αν η f' είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=2\xi f'(\xi)$.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=(x^2-4x+6)e^x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\sqrt{x}\ln x \quad \text{για κάθε } x>0.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της C_f.

iv) Να αποδείξετε ότι $\ln x \le \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x\ge 1$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\left(x^2+\alpha x+\beta\right)e^{-x} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να βρείτε τους α,β, έτσι ώστε η ευθεία $\varepsilon:\ y=-3x+7$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

ii) Αν $\alpha=4$ και $\beta=7$, τότε:

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) να αποδείξετε ότι $(7-3x)e^{x}\le x^2+4x+7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

73. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια ώστε

$$f'(0)=2f(1) \quad \text{και} \quad f'(1)=f(1).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)<0<f(0)$.

ii) αν $f(2)=0$, τότε:

α) η f δεν είναι 1-1.

β) η f έχει ολικό ελάχιστο.

74. Έστω η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-x}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-f'(x)\right)=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η ευθεία $y=1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ii) η ευθεία $y=0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f'.

iii) αν $f(x)f'(x)\ge e^{-2x}$ για κάθε $x>1$, τότε:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x>1$.

β) η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f'(x)}=+\infty$.

75. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x} \quad \text{και} \quad g'(x)=\frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{x},\ x\in(0,+\infty)$ είναι σταθερή.

ii) αν $f(1)=3$ και $g(1)=1$, τότε:

α) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ και $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.

76. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f(x)-g(x)=x-1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Αν η ευθεία $\varepsilon:\ y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, να βρείτε:

α) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

β) την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Αν $f(0)=f(2)=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)\neq 1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

α) η g είναι 1-1.

β) η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

77. **Α.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 για την οποία ισχύει

$$f^3(x)-x\cdot f^2(x)+x^2\cdot f(x)-x^2\cdot \eta\mu x=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

Να υπολογισθεί η παράγωγος $f'(0)$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=3$ για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)+(x^2-x)(y^2-y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f για $x\in(0,+\infty)$.

78. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0)=0$ και $f(2)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2):\ f'(\xi)=\xi$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, με συνεχή παράγωγο f' στο $[0,2]$ και $f'(0)=2$, $f'(2)=1$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2):\ f'(x_0)=x_0$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6+6x+12=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

79.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=2x^4-3x^2-2\ln x$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της στο $(0,+\infty)$.

ii) Να μελετηθεί η συνάρτηση $g(x)=2x^5-5x^3+10x-10x\cdot\ln x$ ως προς τη κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της στο $(0,+\infty)$.

iii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$p(x)=2x^3-3x,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x)=\frac{2\ln x}{x},\ x>0.$$

Δείξτε ότι έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία στο $(0,+\infty)$.

80.

i) Να αποδείξετε την ανίσωση $xe^x \geq e^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=xe^x-3e^x+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα στο $\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(0,f(0))$.

γ) Να αποδείξετε την ανίσωση $f(x)+2x\geq -3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

81. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-3x+6\ln x$, $x>0$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της στο $(0,+\infty)$.

ii) Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $(0,+\infty)$.

Β. Δίνονται δύο συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)\cdot g(x)=x\cdot g^2(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η g διέρχεται από το σημείο $A(x_0,3)$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $B(x_0,f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon:\ 3x+10y-7=0$.

82. Α. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$: $f(x_0)=x_0$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$: $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

83. Α. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$.

i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f'(x)+f(x)\right)\cdot e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Δείξτε ότι $\left(f(x)\cdot e^{x}\right)'=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Δείξτε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει
$$xf(x)-2f(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty) \text{ και } f(1)=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2\ln x$, $x>0$.

ii) Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της f.

iii) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να αποδείξετε ότι $x^{2ex}\geq e^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

84. Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=6\left(e^{x}-e^{-x}\right)+x^3+2$, $x\in\mathbb{R}$.
Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το μηδέν και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2}\cdot\left(\dfrac{5}{2}-\ln x\right)$, $x>1$.

i) Να αποδείξετε ότι $f''(x)=\dfrac{x^4-10+3\ln x}{x^4}$, $x>1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $\left(1,e^2\right)$.

85. **Α.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: \; y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, τότε:

i) να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + 3x + 5}{x f(x) - 2x^2 + 1}$.

ii) αν $g(x) = f(x) - x$, να υπολογισθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3g(x) + 5x + ημ2x}{x g(x) - x^2 + συν7x}$, β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2f(x) + 5x + 3\ln x}{2x g(x) - 2x^2 + 6e^{-x}}$.

iii) να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της g στο $+\infty$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

i) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

86. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$(x^2 + 1)f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 1 τοπικό ακρότατο το $\dfrac{1}{2}$, τότε:

i) να βρεθεί ο τύπος της f και το είδος του ακρότατου.

ii) θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x+1) \cdot (x^2 + 1) \cdot f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της f που άγεται από το $A\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + 18x^2 + 12συνx$, $x \in (0, +\infty)$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα στο $(0, +\infty)$.

ii) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) < x f'(x) + 12$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

87. **Α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε το σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη (ε) της f σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδόν.

Β. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{20}{3}x^3+300x^2+1000x+5$ χιλιάδες €, $0<x<105$. Η είσπραξη από την πώληση ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=210x-\frac{2}{3}x^2$ €. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή x, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να γίνεται μέγιστος.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=(x-1)e^x+2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$g(0)=1 \quad \text{και} \quad g'(x)=f(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{xe^x}{f(x)}dx=\ln 2$.

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\int_2^x \ln(u^2-3)du$ και $F(x)=\int_2^x f(t)dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της F.

ii) Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(\sqrt{3},+\infty)$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

iv) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

90. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$f(1)=\frac{1}{2}\int_1^4 f(t)dt \ , \quad f(4)=2\int_1^4 f(t)dt \ , \quad f(x)>0 \quad \text{και} \quad f'(x)>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\int_1^x (t-x)f(t)dt+\frac{x^2}{2}\int_1^4 f(t)dt \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ακριβώς ένας $\xi\in(1,4)$, τέτοιος ώστε $f(\xi)=\int_1^4 f(t)dt$.

ii) ο αριθμός ξ του ερωτήματος (i) είναι η θέση του μοναδικού σημείου καμπής της γραφικής παράστασης της g.

iii) αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (1,4)$, τέτοιος ώστε $f'(x_0)=1$.

91. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$g(x)=\int_1^x x f(t)\,dt \quad \text{και} \quad g(x)\ge e^x - x - 1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=0 \quad \text{και} \quad g(\xi)=-\xi^2 f(\xi).$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\eta\mu^2 x}=f(0)$.

92. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$f(x)=2e^{-x}+\int_0^x f(x-t)\,dt \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=f(x)-2e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

iii) $f(x)=e^x+e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

93. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και α ένας θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε

$$\int_0^\alpha x f''(x)\,dx = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' δεν είναι 1-1.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\alpha)$, τέτοιος ώστε $f''(x_0)=0$.

iii) Αν $f(x)=x^3-4x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε:

α) την τιμή του α.

β) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\sqrt{t^2+1}\,dt}{\eta\mu^3 x}$.

94. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in(x,2x)$, τέτοιος ώστε $xf'(\xi)=f(2x)-f(x)$.

ii) η συνάρτηση

$$g(x)=\int_0^{2x} f(t)dt-2xf(x)\ ,\quad x\in[0,+\infty)$$

είναι γνησίως αύξουσα.

iii) $\int_2^4 f(t)dt>4f(2)-2f(1)$.

95. Έστω οι δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες ώστε

$$f(x)>0 \quad \text{και} \quad x^2+\int_1^x g(t)dt=2x-4+\int_0^x f(t)dt \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία $\varepsilon:\ y=3x+1$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, να βρείτε:

i) την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0,\ x=2$.

iii) το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0,\ x=1$.

96. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

i) $0<\int_0^1 f(t)dt<1$.

ii) υπάρχει μοναδικός $\xi\in(0,1)$, τέτοιος ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt=2\xi-1$.

iii) αν για τον αριθμό ξ του ερωτήματος (ii) γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0,\ x=\xi$ είναι ίσο με $\frac{1}{4}$, τότε $\xi=\frac{5}{8}$.

iv) $\int_0^x f(t)dt<2x$ για κάθε $x\in(0,1]$.

97. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε

$$f(0)=g(0) \text{ και } 2<f'(x)-g'(x)<4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $2x+g(x)\le f(x)\le 4x+g(x)$ για κάθε $x\ge 0$.

ii) η εξίσωση $f(x)+2x=g(x)+7$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$.

iii) αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, τότε $1\le E\le 2$.

98. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) \text{ και } g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+9}}dt \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)=f(x)-\ln 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=4$.

99. A. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)=xe^{-x}-\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}dt \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot \eta\mu 2x\right]$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

B. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$.

i) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$.

ii) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$.

100. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$2f'(x)=e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

ii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.

iii) Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

101. Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση ολοκλήρωμα

$$f(x)=\int_1^x (1+\ln t)\cdot t^t dt,\ x\in(1,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε, για κάθε $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$, την ανίσωση

$$2\int_1^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (1+\ln t)\cdot t^t dt<\int_1^{\alpha}(1+\ln t)\cdot t^t dt+\int_1^{\beta}(1+\ln t)\cdot t^t dt.$$

Β. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=2$ για την οποία ισχύει $\int_0^x f(t)dt\ge x\cdot e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

102. Α. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ με $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$g'(x)=e^{-x}\cdot g^2(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ με } g(0)=\frac{1}{2}$$

και η συνάρτηση $f(x)=\int_0^{\ln x} t\cdot g(t)dt,\ x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι η f εινα κυρτή στο $(0,1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

Β. Να αποδείξετε ότι $\int_1^x e^{t^2}dt \le \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-e\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

103. Α. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2-1-xe^x+e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f στο $[0,1]$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την f και τον άξονα $x'x$.

104. Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $g(x)>0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

105. Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+x(1-\ln x)-1$.

i) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g.

106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x-1}{e^x}$.

i) Να βρείτε το α ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=3$.

ii) Για $\alpha=1$

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x, y'y$.

107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=1$, $x=\lambda$, $\lambda>0$.

iii) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to 0} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} E(\lambda)$.

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-1}$.

i) Να βρείτε τα α,β ώστε η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\varepsilon:\ y=x$.

ii) Για $\alpha=1$ και $\beta=-1$

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f, τα ακρότατα και τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την (ε), τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=-1$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x\in(0,\pi)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$.

ii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $E>\dfrac{1}{2}$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{x f(x)}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

110. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x+1)^{x+1}=\dfrac{x}{2}$ στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=1$.

111.

i) Να δείξετε ότι $\ln x<\sqrt{x}$ για κάθε $x>0$.

ii) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>1$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

112. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha>1$.

i) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0=\alpha$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$.

iii) Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=2\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$.

113. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι

$$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=1.$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x+f(2x)$.

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{-x}+\dfrac{\alpha}{x} & , \ x<0 \\ \dfrac{x}{x+1} & , \ x\geq 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής.

ii) Για $\alpha=0$

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$.

115. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(2,3)$. Να δείξετε ότι:

i) $f(2)\neq f(3)$.

ii) υπάρχει $\xi\in(2,3)$, τέτοιο ώστε $5f(\xi)=2f(2)+3f(3)$.

iii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(2,3)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)>0$.

116.

i) Να δείξετε ότι $e^x>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$2e^{f(x)}-f^2(x)=2x.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1,0)$, να δείξετε ότι το M είναι σημείο καμπής της C_f.

117. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}-1-\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt,\ x>0.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\dfrac{\ln x-1}{x}$.

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $0<\lambda<1$.

v) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0}E(\lambda)$.

118. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x \frac{e^t}{t+1}dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

ii) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

iii) Να μελετήσετε την F ως προς τα κοίλα και να βρείτε την εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής της.

iv) Αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_F, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$, να δείξετε ότι $E>2$.

119. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-\frac{x}{4}-\ln 2,\ x>0$.

i) Να βρεθεί η μονοτονία της f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii) Αν $g(x)=f(x)+\frac{x}{4}+\ln 2$, να δείξετε ότι $g(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^3+x$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f''(x)}{5x}$.

121. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x)+f(x)+\frac{1}{2}x=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f^{-1}.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^3-x)>f(3-3x)$.

122. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$ για τους οποίους ισχύει

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=1.$$

i) Να δείξετε ότι οι εικόνες A, B των μιγαδικών z_1,z_2 και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ii) Να δείξετε ότι

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2009}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2009}=1\,.$$

123. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, τέτοιοι ώστε $w=\dfrac{z-3+4i}{1+i}$.

i) Αν $w=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z.

ii) Αν $|w|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο.

β) να βρείτε τους μιγαδικούς του προηγούμενου κύκλου που έχουν το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο.

124. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\left(-\dfrac{2008}{2009},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\ln(2009x+2008)$$

i) Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{2009x}$.

ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την τιμή $f^{-1}(0)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

125. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln x-x$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$.

126. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1)=3$.

127. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x-m(x+1)^2$, $m\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του m ώστε η C_f να στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στην περίπτωση που ισχύει

$$f'(0)+f''(0)=-2.$$

iii) Για $m=1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

128. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2x^3+3x^2+x$.

i) Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=(x^2+x)(\lambda x+\mu)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν ισχύουν

$$(x^2+x+1)^{2008}\cdot g'(x)=f(x) \quad \text{και} \quad g(0)=0.$$

129. Για κάθε $z\in\mathbb{C}$, ορίζουμε $f(z)=i(z^2+1)+z$.

i) Να βρεθούν οι τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες ισχύει

$$[f(i)]^\nu+[f(-i)]^\nu+2=0.$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(f(z))=\mathrm{Re}(z)\cdot[1-2\,\mathrm{Im}(z)]$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f(z)-f(\bar{z})}{4}=-1+i$.

130. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$[f(x)]^3+2\cdot f(x)=x+2.$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

iii) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(e^{x-1})=f(2-x)$.

131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

iii) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ αν ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{e^3}$.

132. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ,\ x\neq 0\\ \alpha+1 & ,\ x=0\end{cases}.$$

i) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii) Για $\alpha=-1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\left[f(x)\right]^{2009}=m$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα για κάθε $m\in\mathbb{R}$.

133. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha^{x+1}+1}{\alpha^{x}+1}$, $0<\alpha\neq 1$.

i) Να βρείτε την τιμή του α αν ισχύει $f'(0)=\ln\alpha$.

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

iii) Να δείξετε ότι ισχύει

$$\left(\alpha^{2008}+1\right)^{2}<\left(\alpha^{2007}+1\right)\cdot\left(\alpha^{2009}+1\right).$$

134. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+x^2+x-1$.

i) Να βρείτε τα όρια $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ και $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(e^{-x}\right)$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο $\alpha\in\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=0$.

iii) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(3x^2+2x+1\right)dx=1$.

iv) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_1^{2}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}dx$.

135. Έστω ο μιγαδικός $z\in\mathbb{C}$ με $|z-2|=1$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $x\cdot f''(x)=f'(x)$ για κάθε $x>0$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ii) Να βρείτε την $f(x)$, αν $f(1)=0$ και $f''(1)=|z|$.

iii) Να βρείτε τον z, αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος και επιπλέον $f(3)=8$.

136. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

i) Αν $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}=0$ και $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}+z_3^{\,3}=0$, να δείξετε ότι

$$|z_1+z_2+z_3|=\sqrt{3}.$$

ii) Έστω ότι $z_1+z_2+z_3=z_1z_2z_3=1$. Να δείξετε ότι

$$z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=1.$$

iii) Αν είναι γνωστό ότι οι z_1, z_2, z_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^3-z^2+z-1=0$, να δείξετε ότι

$$z_1^{\,2008}+z_2^{\,2008}+z_3^{\,2008}=3.$$

137. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^{\alpha}+\ln x\ ,\quad g(x)=x^{\alpha}\ ,\quad \alpha>0.$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε τις τιμές του α, αν ισχύει $f''(1)<0$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση $\rho\in(0,1)$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν E που περικλείεται από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις C_f, C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ και να δείξετε ότι $E<1$.

138. Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 1$ και έστω $w=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$.

i) Να βρεθεί ο μιγαδικός w όταν $z=2$.

ii) Να δείξετε ότι $\dfrac{w-2}{w+i}=\bar{z}$.

iii) Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και M είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

139. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2},\ x>0 \quad \text{και} \quad g(x)=e^x\cdot \ln x,\ x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $g''(x)=e^x\cdot f(x)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο περιέχεται.

iv) Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

140. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2}{x-3} &, \ x<2\\[2mm] -\dfrac{\beta}{x} &, \ x\geq 2\end{cases}.$$

i) Να προσδιορίσετε τα α,β ώστε η f να είναι συνεχής και η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x+3$ στο $-\infty$.

ii) Για $\alpha=1$ και $\beta=8$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$.

141. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x\ln x-2x+2$, $x\in(0,e]$.

i) Να μελετήσετε τη μονοτονία και το πρόσημο της συνάρτησης h.

ii) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g ισχύει

$$f(x)-g(x)=h(x) \quad \text{για κάθε } x\in(0,e].$$

α) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

β) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

142. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad (x^2+x+1)\cdot f'(x)=2x+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Αν x_1,x_2, με $x_1<x_2$ είναι οι τετμημένες δύο σημείων της C_f με $x_1+x_2=-1$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

143. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ καθώς και τη συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ για την οποία ισχύει $F(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να δείξετε ότι:

i) $\int_0^1 \left[F(x)+x\cdot f(x)\right]dx=F(1)$.

ii) $\int_0^1 (1-x)\cdot f(x)\,dx\geq 1$.

iii) $\int_0^1 f^2(x)\,dx\geq \frac{5}{3}$.

144. Θεωρούμε τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2009$ καθώς και τη συνάρτηση $F(x)=\ln f(x)+x^2$, $x>0$.

i) Αν $F''(x)>2$ για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Αν $\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{1}{e^3}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)+2\xi\cdot f(\xi)=0$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}$.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(\alpha^2+3)x^2-2x+1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y=2x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iii) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2x\cdot e^{2x}+e^{2x}-e$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο $\alpha\in(-1,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\alpha)=0$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}-ex^2$, $x\geq -1$.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η F είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(t)\,dt$.

147. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές των α,β αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα και ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)}-x\right)=1.$$

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν είναι γνωστό ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{g(x)}\right)=0.$$

iii) Αν η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα και επιπλέον ισχύει $f\circ g=g\circ f$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

148. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)$.

i) Να βρείτε τα όρια $\ell_1=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left(e^{f(x)}-e+\alpha x\right)=0$.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Να δείξετε ότι:

i) αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ και $g(0)=-\ln2$, τότε $f=g$.

ii) η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

iii) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{1}{e^{x+1}+1}\le f(x+1)-f(x)\le\dfrac{1}{e^x+1}$.

150. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ ως προς τη μονοτονία και το 1-1.

ii) Αν $h(x)=\displaystyle\int_x^{x^2-2} g(t)\,dt$, τότε:

α) να βρεθούν τα σημεία στα οποία η C_h τέμνει τον $x'x$.

β) να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η C_h βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

γ) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η C_h δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

151. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f'(1)=1 \quad \text{και} \quad f(xy)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x) \quad \text{για όλα τα } x,y \in (0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x)=1+\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

β) $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=x^2-1$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2f(x)$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=x^2-1$ και την ευθεία $x=e$.

152. Έστω ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}^*$ και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{e^{x\cdot|z|}}{x^2+|z|^2}.$$

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{2}\ln 2$.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $|z|\ge 1$.

153. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\int_y^x f(t)\,dt < f(x-y) \quad \text{για κάθε } x,y \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $\Phi(x)=e^{-x}\cdot\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) ισχύει $2009 \cdot \int_0^{\ln 2008} f(t)dt < 2008 \cdot \int_0^{\ln 2009} f(t)dt$.

iii) υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ στο σημείο $A(x_0, g(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$.

154. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $\mathrm{Im}(z) = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \ln\left(e^x + |z|\right)$.

i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

iii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{|z|}{e^{x+1} + |z|} < f(x+1) - f(x) < \dfrac{|z|}{e^x + |z|}$.

iv) Να βρείτε τον z, αν ισχύει $\int_0^1 \left[x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)\right]dx = -\ln 2$.

155. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ και $f(\alpha) < f(\beta)$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & , \ \alpha < x \le \beta \\ 0 & , \ x = \alpha \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = \beta$ με $g'(\beta) < 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η g παίρνει μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha}$.

156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

ii) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = \alpha$ $(\alpha > 0)$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι κάθετες.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha>0$.

iv) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{E(\alpha)}{\alpha^2}$ και $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{E(\alpha)}{e^{\alpha+1}+2}$.

v) Να βρείτε για ποια τιμή του α είναι $E(\alpha)=\dfrac{1}{2}$ τ.μ. .

157. Έστω η f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[1,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$G(x)=\int_1^x t^2 f(t)dt,\ x\geq 1 \quad \text{και} \quad H(x)=\int_1^x t f(t)dt,\ x\geq 1.$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{G(x)}{H(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x)=xH(x)-G(x)$, $x\geq 1$. Να δείξετε ότι:

α) $P(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$.

β) η συνάρτηση $P(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$.

iii) Να βρεθεί το όριο

$$L=\lim_{x\to 1^+}\frac{H(x)\cdot\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{G(x)\cdot(x-1)^2}.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Έστω ότι οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι σημεία της ευθείας ε και ότι οι μιγαδικοί z_3, z_4 είναι σημεία της ευθείας δ. Να αποδειχθεί ότι:

$$\epsilon \perp \delta \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \mathbb{I}$$

2. Έστω ότι οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι σημεία της ευθείας ε. Να δειχθεί ότι οι μιγαδικοί z για τους οποίους ο $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{I}$ είναι σημεία ευθείας δ κάθετης στην ε.

3. (α') Να βρεθούν οι συνθήκες ώστε ο $z = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

   (β') Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}^*$, για την οποία ο $z = \frac{1+f'(x)i}{x+f(x)i}$ ανήκει στο $\mathbb{R}$.

4. (α') Να βρεθούν οι συνθήκες ώστε ο $z = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \in \mathbb{I}$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

   (β') Να βρεθεί μία συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, έτσι ώστε ο $z = \frac{x+f(x)i-i}{f'(x)+i}$ ανήκει στο $\mathbb{I}$.

5. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(z) = f(\overline{z}), f(z+w) = f(z) + f(w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ και $f(z) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f(z) = Re(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

6. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(-z) = f(\overline{z}), f(z+w) = f(z) + f(w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ και $f(z) = Im(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{I}$. Να δειχθεί ότι $f(z) = Im(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

7. Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και ο μιγαδικός $z(x) = f(x) + g(x)i$. Αν $(f(\alpha) + g(\alpha))(f(\beta) + g(\beta)) < 0$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $|z(\xi)| = \sqrt{2}|f(\xi)|$.

8. Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και ο μιγαδικός $z(x) = f(x) + g(x)i$. Αν $f(\alpha) = g(\beta), f(\beta) = g(\alpha)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in [\alpha, \beta]$ ώστε $|z(\rho)| = \sqrt{2}|f(\rho)|$.

9. Έστω $f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και οι $z = f(\alpha) + \alpha^2 i$ και $w = f(\beta) - \beta^2 i$. Αν για τους z, w ισχύει $|z + \overline{w}| < |\overline{z} - w|$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.

10. Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ και ο μιγαδικός $z(x) = f(x) + g(x)i$. Αν τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται εντός κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$ και $\rho = 1$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 1)$, ώστε $|z(\xi)| = \xi$

11. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta], (\alpha > 0)$ και οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = f(\alpha) + f(\beta)i$. Αν $|z| + |w| = |z - w|$, να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο της f στο οποίο η εφαπτομένη της f να περνά από την αρχή των αξόνων.

12. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί $z = f(\alpha) + g(\beta)i, w = g(\alpha) + f(\beta)i$. Αν $|z + \overline{w}| = |\overline{z} - w|$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

13. Έστω $z = 2\sqrt{x} + ie^x$ και $M(z)$ η εικόνα του.

   (α΄) Να βρεθεί η εικόνα M που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

   (β΄) Να δειχθεί ότι οι εικόνες των $w = \frac{1}{z-3i}$ βρίσκονται στο εσωτερικό κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. Έστω $z = (\ln x - 1)\sqrt{x} + i\sqrt{3x(2-\ln x)}$ και $M(z)$ η εικόνα του.

   (α΄) Να βρεθεί η εικόνα M που απέχει τη μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

   (β΄) Να δειχθεί ότι οι εικόνες των $w = \frac{1}{z}$ βρίσκονται στο εξωτερικό κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{3}$.

15. Έστω $f(x) = 3w^2x^3 + 3x^2 + w^2x + c$, όπου $w = \frac{2z}{1+z^2}$ και z μιγαδικός που η εικόνα του $M(z)$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho = 1$. Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

16. Έστω $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 - \frac{3}{2}(\beta^2 - 1)x^2$, όπου $z = \alpha + \beta i$ δεν εμφανίζει σημεία καμπής, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών z.

17. Δίνονται οι $z = \sqrt{2f(\beta)\alpha} + f(\alpha)i$ και $w = \sqrt{2f(\alpha)\beta} + f(\beta)i$, όπου $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, συνάρτηση παραγωγίσιμη. Αν για τους μιγαδικούς ισχύει $Re(z^2 + w^2) \geq \alpha^2 + \beta^2$ να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της $f(x)$ είναι παράλληλη στη $\delta : x + y = 0$.

18. Δίνονται οι $z = \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} + f(\alpha)i$, $w = f(\beta) + \sqrt{f(\alpha)f(\beta)}i$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη με σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για τους μιγαδικούς ισχύει $Re(z^2) \geq Re(w^2)$ να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο, στο οποίο η εφαπτόμενη της f είναι παράλληλη στον $x'x$.

19. Έστω $w = xz + 1$ και $f(x) = Re(w^2)$. Να αποδειχθεί ότι αν η f εφάπτεται στον $x'x$ στο $x_0 = 1$, τότε $w = 1 - x$.

20. Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $f(x) = |i + xz|$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι, αν η f εμφανίζει στο $x_0 = 0$ ακρότατο, τότε $z \in \mathbb{R}$.

21. Αν η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + \alpha^2 - 1}, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu(\beta x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$.

22. Αν η $f(x) = \begin{cases} \alpha^2x^2 + \beta^2x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2\alpha x + 4\beta + 20}{e^{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$.

23. Αν $z = \alpha + \beta i$ και ο $w = \frac{z-2+2i}{z-2-2i}$ ανήκει στο $\mathbb{I}$, να αποδειχθεί ότι η $f(x) = (\alpha^2 - 4\alpha)x^2 + (\beta^2 - 4)x + 4 - \beta^2$ έχει ρίζα στο $[0, 1]$.

24. Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha \neq 0$ και ο $w = \frac{z^2+1}{z+2i}$ φανταστικός, να αποδειχθεί ότι η $f(x) = (4\beta + 1)x^2 + \beta^2 x + \alpha^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 0)$.

25. (α΄) Να βρεθεί το πρόσημο των τιμών που παίρνει η συνάρτηση $f(x) = 2^x - 2x + x^2$, καθώς και η μονοτονία της για $x \geq 1$.

   (β΄) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - 3i| = 2$, να βρεθούν οι τιμές που παίρνουν οι $x_1 = |z|$ και $x_2 = |z + 4i|$. Κατόπιν να αποδειχθεί ότι:

$$|z - 3i|^{|z|} - |z^2 - 3zi| + |z|^{|z-3i|} \leq |z - 3i|^{|z+4i|} - |z^2 + zi + 12| + |z + 4i|^{|z-3i|}$$

26. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ όπου $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρτια και $f(0) = 1$. Έστω επίσης οι μιγαδικοί $z = f(x) - g(x)i$, $w = g'(x) + f'(x)i$. Αν $zw = |z|^2$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$.

27. Έστω οι μιγαδικοί $z = f'(x) + f(x)i$ και $w = g(x) + g'(x)i$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ρ_1, ρ_2 ρίζες της f, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $z\overline{w} \in \mathbb{I}$.

28. Έστω $f(x) = |(x^2 - x + 1)z + (x+1)w|$, όπου $z, w \in \mathbb{C}$ με εικόνες σημεία του ίδιου κύκλου Σ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνας ρ. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt \leq x^2 + 2\rho x$, να δειχθεί ότι $z = w$.

29. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = 0$, να δειχθούν:

    (α΄) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $\xi f'(\xi) = -f(\xi)$.

    (β΄) Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = f(\beta) + f(\alpha)i$ τότε ο $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

30. Αν για την παραγωγίσιμη $f(x)$ στο $x_0 = 1$ ισχύει $f^2(x) - (2x-2)f(x) = 2\,\eta\mu(x-1) - 2x\ln x$ για κάθε $x > 0$ να βρεθεί ο $w \in \mathbb{C}$, ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z - w| = |z - 2|$, να είναι η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$.

31. Αν για την παραγωγίσιμη $f(x)$ στο $x_0 = 0$ ισχύει $f^2(-x) - xf(2x) + x^2 = x(\sigma\upsilon\nu\, x - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z - \alpha i| = |z - 1|$, να είναι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.

32. Η τετμημένη της εικόνας A του μιγαδικού $z = x + yi$ έχει ταχύτητα $\upsilon_x = y$ και η τεταγμένη του έχει ταχύτητα $\upsilon_y = -x$. Να δειχθεί ότι οι μιγαδικοί z, σε κάθε χρονική στιγμή, ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.

33. Η τετμημένη της εικόνας A του μιγαδικού $z = x + yi$ που έχει $|z| = 2$, κινείται με ταχύτητα $\upsilon_x = y$. Να βρεθεί η ταχύτητα υ_y της τεταγμένης του z και να εξεταστεί αν το σημείο $A(z)$ κινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

34. (α΄) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ο $w = z^2 \in \mathbb{I}$.

    (β΄) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) + 2|f(x^2)| - \alpha x^2 = x(\sigma\upsilon\nu\, x - 1)$ να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η ευθεία που εφάπτεται στην f στο $x_0 = 0$ είναι ο παραπάνω γεωμετρικός τόπος.

35. (α΄) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, οι εικόνες $M(z)$ των οποίων ισαπέχουν από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(4,-2)$.

    (β΄) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $f(x) + x^2 - \alpha x + \beta = g(x) + \ln x$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν ο παραπάνω γεωμετρικός τόπος είναι η κοινή εφαπτομένη των παραγωγίσιμων f, g στο κοινό $x = 1$.

36. (α΄) Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w = \frac{z-2i}{z+1}$ είναι πραγματικός είναι η ευθεία $\epsilon : y = 2x + 2$.

    (β΄) Αν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στην παραγωγίσιμη $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ στο $x = 0$, να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο $x = 1$.

37. (α΄) Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο μιγαδικός $w = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$ έχει $Im(w) = 1$, είναι η ευθεία $\epsilon : y = x$.

(β') Αν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στην παραγωγίσιμη $g(x) = f(\ln x)$ στο $x = 1$, να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο $x = 0$.

38. Έστω $f(x) = |xz_1 - z_2|$, όπου z_1, z_2 μη μηδενικοί μιγαδικοί.

(α') Αν η f είναι άρτια να δειχθεί ότι ο $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{I}$.

(β') Αν η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ περνά από το $(0, |z_2|)$, να δειχθεί ότι ο $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

(γ') Αν η $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ είναι αρχική της $\frac{1}{f(x)}$ να δειχθεί ότι ο $u = \frac{1+z_1z_2-2(z_1+z_2)}{z_1-z_2} \in \mathbb{I}$.

39. Έστω $f(x) = |xz + 1|$, όπου z μη μηδενικός μιγαδικός.

(α') Αν η f είναι άρτια να δειχθεί ότι ο $z \in \mathbb{I}$.

(β') Αν η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ περνά από το $(0, 1)$, να δειχθεί ότι ο $z \in \mathbb{R}$.

(γ') Αν $f(x) \leq e^{|z|x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των z.

(δ') Αν η $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ είναι αρχική της $\frac{1}{f(x)}$ να βρεθεί ο z.

40. Έστω ότι $f(x) - f(x - 1) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου f συνεχής στο $x = 0$, με $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\text{συν}\, x}{x} = 2$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι $f'(0)$ και $f'(1)$. Αν επιπλέον η f έχει συνεχή 2η παράγωγο, τότε να υπολογιστεί το $I = \int_0^1 (f(x) - f''(x))\, e^{-x} dx$.

41. Έστω ότι $f(x) - 2f(x - 1) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου f συνεχής στο $x = 1$, με $\lim_{x\to 1} \frac{2f(x)-\ln x}{x-1} = 1$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι $f'(1)$ και $f'(2)$. Αν επιπλέον η f έχει συνεχή 2η παράγωγο, τότε να υπολογιστεί το $I = \int_1^2 xf''(x)dx$.

42. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq \frac{f(-1)+f(1)}{2} = 1$ και το $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^4} = -1$. Κατόπιν να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$ και τον άξονα $x'x$.

43. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq \frac{2f(0)+3f(2)}{5} = 2$ και το $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 1$. Κατόπιν να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$ και την ευθεία $\epsilon : y = 2$.

44. Έστω ο μιγαδικός $z(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-i} i$.

(α') Να βρεθεί εκείνος ο $z(x_0)$, η εικόνα του οποίου απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(β') Να αποδειχθεί η ανίσωση $|z(2003^{2004})| < |z(2004^{2003})|$.

45. Έστω ο μιγαδικός $z(x) = \frac{x+ai}{\sqrt{x}-i}$.

(α') Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η εικόνα του $z(1)$ απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(β') Για κάθε $x \in (-1, 0)$ να δειχθεί ότι ισχύει $|z(\text{συν}\, x)| < |z(x + 1)|$.

46. Έστω ότι για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν $f(x^2) + xf(x - 1) + x^2 + 2 = 0$ και $\lim_{x\to e} \frac{f(\ln^2 x)-f(1)}{x-e} = \frac{1}{e}$. Να βρεθεί ο μιγαδικός w, αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της f στο $x = 0$, είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 4 + 4i| = |z - w|$. Κατόπιν να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $|z|$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\mathrm{M}(x, y)$ τυχαίο σημείο της.

   (α΄) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (\mathrm{OM})$. Αν η $\epsilon : y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ είναι η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, να βρεθεί η ασύμπτωτη της $g(x)$ στο $+\infty$.

   (β΄) Κατόπιν αν $g(0) = 0$ να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi > 0$, για το οποίο ισχύει $f(\xi) = \xi + 2$.

48. (α΄) Να εξεταστεί η $g(x) = e^x + x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

   (β΄) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0, x = 1$, όπου f συνάρτηση για την οποία για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 1 + ln(x + 1)$.

49. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες είναι $f(0) = 0, g(0) = 1$ και $f'(x) = f(x) + g(x), g'(x) = g(x) - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Να δειχθεί ότι $f(x) = e^x\, ημ\, x$ και $g(x) = e^x\, συν\, x$.

   (β΄) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, την $g(x)$, τον άξονα $y'y$ και την $\epsilon : x = \frac{\pi}{2}$.

50. (α΄) Αν ισχύει $xf'(x) = \nu f(x)$ για κάθε $x \geq 0$, όπου $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, να δειχθεί ότι $f(x) = \alpha x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

   (β΄) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση g, της οποίας η εφαπτομένη στο τυχαίο $(x_0, g(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\frac{\kappa-1}{\kappa}x_0$, όπου $x_0 > 0$ και $\kappa \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Να δειχθεί ότι $g(x) = \alpha x^{\kappa}$.

   (γ΄) Αν η εφαπτομένη της g στο $\mathrm{A}(1, 1)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $g(x)$ και την παραπάνω εφαπτομένη.

51. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ όπου $\mathrm{A}(x, f(x)), x > 0$ και $\mathrm{B}(-x, f(-x))$ σημεία της δύο φορές παραγωγίσιμης και άρτιας $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ και Δ, Γ οι προβολές των Α, Β στον $x'x$ αντίστοιχα. Έστω $\mathrm{E}(x)$ εμβαδόν του ΑΒΓΔ και λ_{A} η κλίση της εφαπτομένης της f στο σημείο Α.

   (α΄) Αν ισχύει $\mathrm{E}(x) = -\lambda_{\mathrm{A}}$ για κάθε $x > 0$, να δειχθεί ότι το $\mathrm{E}(x)$ εμφανίζει ακρότατη τιμή αν οι κορυφές του ΑΒΓΔ είναι πάνω στα σημεία καμπής της $f(x)$.

   (β΄) Αν $f(0) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της f.

52. δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x)ln(x^2 + \alpha x)$ όπου $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f(2) = 2f(4) \neq 0$.

   (α΄) Αν για την h πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[2, 4]$, να δειχθεί ότι το $\alpha = 0$.

   (β΄) Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)\ln \xi^{\xi} + f(\xi) = 0$.

   (γ΄) Αν η $f(x)$ έχει στο $x = 2$ οριζόντια εφαπτομένη, να αποδειχθεί ότι η $h(x)$ δεν έχει στο $x = 2$ οριζόντια εφαπτομένη.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 3 + xe^{-x}$.

   (α΄) Να εξετασθούν οι $f(x)$ και $f'(x)$ ως προς τη μονοτονία.

   (β΄) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της f.

(γ΄) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, την πλάγια ασύμπτωτη της και την ευθεία $\epsilon : x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

(δ΄) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

54. (α΄) Έστω $f(x) \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ με $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 2$.

i. Να δειχθεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii. Να δειχθεί ότι $f(x) = e^{2x}$.

(β΄) Αν η εφαπτομένη της παραπάνω f στο 0 είναι ασύμπτωτη μιας συνάρτησης g στο $+\infty$, να βρεθεί το

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2(x+1)g(x) - 4x^2 + 2x + \eta\mu\, x}{g(x) + x(g(x) - 1) - 2x^2 + 2x - 1}$$

55. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και το πρόσημο στο $(0, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) = x^e e^{\frac{1}{x}} - 1$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $h(x) = x^{-e}$ και ότι οι g, h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, η οποία να βρεθεί.

56. Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(\eta\mu\, x)$, όπου f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - 3}{x} = 4$.

(α΄) Να δειχθεί ότι $f'(0) = 3$.

(β΄) Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f'(x)$ στο $x_0 = 0$.

(γ΄) Να υπολογιστεί η $g''(0)$.

57. (α΄) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ο $w = \frac{z-1}{z+6i}$ είναι πραγματικός, είναι ευθεία ε η οποία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 3$ στο σημείο $A(3, 12)$.

(β΄) Να δειχθεί ότι το χωρίο που περικλείεται από την f, τον $x'x$ και τις $x = 0, x = 3$, χωρίζεται από την ευθεία ε σε δύο μέρη με λόγο εμβαδών 2.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3$ με $\kappa < \lambda$. Να αποδειχθεί ότι:

(α΄)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$$

(β΄) Η $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο (κ, λ).

(γ΄) Να υπολογιστεί το $I = \int \ln|f(x)| dx$ στο $(\lambda, +\infty)$.

59. (α΄) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \int_0^x (t + 1 - e^t - f^2(t)) dt$, να αποδειχθεί ότι η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

(γ΄) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $O(0, 0)$.

(δ΄) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 5x + 6) > 0$.

60. Έστω $f(x) = g(h(x))$, όπου g, h παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις.

(α΄) Αν η $\epsilon_1 : y = 3x + 2$ εφάπτεται στην $h(x)$ στο $x_1 = 0$ και η $\epsilon_2 : y = 2x - 5$ εφάπτεται στην $g(x)$ στο $x_2 = 2$, να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της f στο 0 είναι η $\epsilon : y = 6x - 1$.

(β΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)+2f(x)+\eta\mu(5x)}{x}$.

61. Δίνονται οι συαρτήσεις $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ και $g(x) = \frac{2}{x}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη ε.

(β΄) Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ε με τους άξονες και $\Pi(x)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f και 2 σημεία του $x'x$, να δειχθεί ότι $\mathrm{E} \geq \Pi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

62. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύουν: $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,3], f(2) = 0$ και $f(3) = 1$.

(α΄) Να βρεθούν τα $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ ώστε για την $g(x) = f(x) - \alpha x - \beta$ να ισχύουν $g(2) = g(3) = 0$.

(β΄) Κατόπιν να δειχθεί ότι ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,3)$.

63. (α΄) Αν $xf'(x) \geq 2e^x - 2 + x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η μονοτονία της f.

(β΄) Κατόπιν, αν η $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να δειχθεί ότι $f''(0) \geq 2$.

(γ΄) Να δειχθεί ότι $\int_0^x f(t)dt \geq (f(0) + f'(0))x$ για κάθε $x \geq 0$.

(δ΄) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{3} = xf(x)$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0,1)$.

64. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^3 + \beta(f(x))^2 + \gamma(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, με $\beta^2 < 3\gamma$. Να δειχθεί ότι:

(α΄) Η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

(β΄) Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(γ΄) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα ρ στο διάστημα $(0,1)$.

(δ΄) Αν $f(0) = -1$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $g(x) = \frac{3x^2-4x+6}{3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma}$, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $\epsilon : x = \rho$.

65. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(2) - f(0) = 2$, για την οποία ισχύει ότι $f(x^2 - x) - f(4x - 2x^2) \leq 3x^2 - 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της f στα $x_1 = 0, x_2 = 2$ είναι παράλληλες.

(β΄) Να δειχθεί ότι η f έχει δύο πιθανά σημεία καμπής.

66. (α΄) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει ότι $|z-2| = 2004$, τέμνει την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στα $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο η εφαπτόμενη της f να είναι κάθετη στην ΚΜ, όπου $\mathrm{K}(2,0)$.

(β΄) Έστω $f(x) \geq 0$ συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f(0) = 0$. Αν σε κάθε σημείο $\mathrm{M}(x, f(x))$ της $f(x)$ η εφαπτομένη της είναι κάθετη στην ΚΜ, να βρεθεί ο τύπος της.

67. Έστω $g(x) = x^2 f(x)$, όπου f συνάρτηση με συνεχή 2η παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν $x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

(α΄) Να μελετηθεί η $g(x)$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα.

(β΄) Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$.

(γ') Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $x_0 f'(x_0) = (1 - 3x_0) f(x_0)$.

68. (α') Έστω $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

(β') Αφού αποδειχτεί ότι η f αντιστρέφεται, να δειχθεί ότι $f(e^x) \geq f(x+1)$ στο $\mathbb{R}$.

(γ') Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.

(δ') Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f^{-1}(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

69. Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $\frac{z}{w} = 1 + \sqrt{3}i$. Αν η εικόνα A του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 2$, τότε:

(α') Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων B των μιγαδικών w.

(β') Να βρεθεί το είδος του τριγώνου AOB.

(γ') Αν τη χρονική στιγμή t_0 που η εικόνα $A(z)$ είναι στο $\left(1, \sqrt{3}\right)$, η τεταγμένη έχει ταχύτητα $\upsilon_y = \sqrt{3} m/s$, να βρεθεί η ταχύτητα υ_x της τετμημένης του.

(δ') Την ίδια χρονική στιγμή t_0 να βρεθούν οι ταχύτητες υ_x, υ_y του $B(w)$.

(ε') Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ για το οποίο να ισχύει $|(1 - 2x_0)z + x_0 w| = e^{x_0}$.

70. (α') Αν $f''(x)$ συνεχής να δειχθεί ότι $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f''(x)) \,\text{συν}\, x dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

(β') Με δεδομένο ότι $I = 2f(0)$, να δειχθεί ότι στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχουν δύο παράλληλες εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f.

(γ') Να δειχθεί ότι η f έχει στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ πιθανό σημείο καμπής.

71. (α') Ο ρυθμός ρίψης βομβών t μέρες μετά την έναρξη ενός πολέμου είναι $501\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$ βόμβες την ημέρα. Να βρεθεί ο τύπος που δίνει τη συνάρτηση $N(t)$.

(β') Να βρεθεί ο αριθμός N των βομβών που έπεσαν από την 11η ως και την 15η μέρα.

72. (α') Να εξεταστεί η $g(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ ως προς τη μονοντονία.

(β') Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $\phi(x) = \frac{f'(x)}{\alpha f^2(x) + \beta f(x)}$ να έχει στο $\mathbb{R}$ παράγουσα την $g(f(x))$, όπου $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(γ') Έστω ότι για την παραπάνω συνάρτηση $f(x)$, για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $f(x) = 1 + \int_1^x \frac{f^2(t) + f(t)}{t^2 + t} dt$.

i. Να βρεθεί το πρόσημο και η μονοτονία της $f(x)$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$.

(δ') Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται, από τις παραπάνω συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.

73. (α') Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x)e^{x^2}$ να είναι αρχική της $f(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β') Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης στο $(0, +\infty)$ συνάρτησης $g(x)$, για την οποία ισχύει $\frac{g'(x)}{2x^2+1} = e^{x^2 - g(x)}$ για κάθε $x > 0$, με $g(1) = 1$.

74. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f'(x))^3 + \beta(f'(x))^2 + \gamma f'(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, με $\beta^2 < 3\gamma$. Να δειχθεί ότι:

(α') Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

(β') Σε κάθε διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx \le (a+\beta)\frac{f(\beta)-f(a)}{2}$.

(γ') Η f έχει ένα μόνο ακρότατο ρ στο διάστημα $(0, 1)$.

(δ') Αν $f(\rho) = f(0) - 1$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση $g(x) = \frac{3x^3-4x^2+6x}{3(f'(x))^2+2\beta f'(x)+\gamma}$, τους άξονες $x'x, y'y$ και την $\epsilon : x = \rho$.

75. (α') Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + f(x-1) = συν(\pi x) + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν η $\epsilon : y = 2x + 1$ εφάπτεται στην παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $x = 0$, να βρεθεί η εφαπτομένη (δ) της f στο $x = 1$.

ii. Αν $f(x) > 0$ και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, την ευθεία δ, την $x = -1$ και τον $y'y$ ισούται με $\frac{1}{2}$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, την ευθεία δ, την $x = 1$ και τον $y'y$.

iii. Να δειχθεί ότι το χωρίο που περικλείεται από την f, την $g(x) = 2x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ είναι ισεμβαδικό με αυτό που περικλείεται από την f, την $h(x) = -συν(\pi x)$ και τις ευθείες $x = 0, x = -1$.

(β') Αν επιπλέον η συνάρτηση $f(x)$ έχει συνεχή 2η παράγωγο, τότε:

i. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = -2$.

ii. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (f(x) - f''(x))e^x dx$

76. (α') Να δειχθεί ότι $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β') Έστω συνάρτηση $f(x)$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x)e^{f(x)} - f^2(x) = x$.

i. Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.

ii. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

(γ') Να βρεθεί το $I = \int_0^{e-1} \frac{x}{e^{f(x)}-f(x)+f(x)(e^{f(x)}-1)}dx$.

77. (α') Έστω $f(x) = \int_0^x e^{xt}dt$ με $x \ge 0$. Να αποδειχθούν τα εξής:

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$.

ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(β') Έστω $z = a + \beta i$ με $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ και $\beta \in \mathbb{R}^*$. Αν $A = |z|^2 - 2Re(z)$, τότε:

i. $|z-1| > |z|$.

ii. $\int_0^{A+1} |z|e^x dx > \int_0^{A+2Re(z)} |z-1|e^x dx$.

78. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\int_{\frac{1}{x}}^1 |xtz - 1 - 2i|dt \ge 2\sqrt{5}\ln x$ για κάθε $x > 0$. Κατόπιν να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1, z_2 με το ελάχιστο - μέγιστο μέτρο.

79. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $1 + \int_a^x xf(t)dt \ge e^{x^2-ax}$, όπου $f(x)$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $a > 0$, να αποδειχθεί ότι:

(α') το ολοκλήρωμα $\int_0^a xf'(x)dx = 0$

(β') υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 1$

(γ') υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\xi, a)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho) = 0$.

80. Έστω $f(x) + (x-1)g(x-1) \le \ln x$ για $x > 0$, όπου f παραγωγίσιμη στο $x = 1$, με $y = x - 1$ εφαπτομένη της στο $x = 1$ και g παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα.

(α') Να δειχθεί ότι η $g(x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(β') Αν $\int_{a+1}^{1} f(x)dx = a$ για κάθε $a > -1$, να δειχθεί ότι $\int_0^a xg(x)dx \geq \ln(a+1)^{a+1}$.

(γ') Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(e-1-x) = \int_0^x tg(t)dt$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, e-1)$.

81. Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = f(\beta) + f(a)i$. Αν ο $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$, και f συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, να βρεθεί το άθροισμα $\int_a^\beta f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$.

82. Αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι $xf'(x) - 1 < 0$, να δειχθούν τα εξής:

(α') Η $g(x) = f(x) - \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(β') $f(e) - 1 < f(1)$

(γ') Υπάρχει $\xi \in (1, e)$ ώστε $f'(\xi) < \frac{1}{e-1}$.

(δ') $\int_1^e xf''(x)dx > ef'(e) - f'(1) - 1$.

(ε') $\int_0^1 f(x)dx > f(e) - 2$.

83. Έστω η συνεχής στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f, για την οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $xf(x) = \ln x - \int_1^e f(x)dx$.

(α') Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

(β') Να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ') Να αποδειχθεί ότι $e \ln 16 < 6 + e$.

84. Έστω η συνάρτηση $f(x)$που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\int_0^1 (f(x) - a)f''(x)dx = 0$ με $f(0) = f(1) = a$.

(α') Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είναι σταθερή.

(β') Να βρεθεί ο τύπος της f, αν είναι γνωστό ότι στη γραφική της παράσταση ανίκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους $|z-2| = |z-2-4i|$.

85. Έστω συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $g(x) = \int_0^x f(t)dt - x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(xt)dt$.

(α') Αν η g είναι κοίλη, να βρεθεί η μονοτονία της f.

(β') Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx$.

(γ') Αν $g(x) = -x^2 + ax + \beta$ να βρεθούν οι a, β καθώς και ο παραπάνω αριθμός ξ.

(δ') Αν $f(\xi) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της f.

86. Έστω συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f''(x) = f(x)$.

(α') Αν $f'(1) + f(1) = 0$, να υπολογιστεί το $I_1 = \int_0^1 \left[(f'(x))^2 - (f(x))^2\right] dx$.

(β') Αν $f(0) = 1 = -f'(0)$ να βρεθεί ο τύπος της $g(x) = (f(x) - f'(x))e^x$ και να υπολογιστεί το $I = \int_0^1 \frac{2x}{f(x)-f'(x)} dx$.

(γ') Να υπολογιστεί το $I_2 = \int_0^\pi f(x)\,\eta\mu\, x dx$.

(δ') Αν δοθεί ότι $I_2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

87. Έστω η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(0)} = \int_0^x \frac{1}{1+e^{f(t)}}dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$.

(β') Να υπολογιστεί το $I_1 = \int_1^{e+1} f(x)dx$.

(γ') Να δειχθεί ότι $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{f(x)}}dx = e^{f(0)}$.

(δ') Να Λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x) + 1 - e) + \int_0^1 \frac{1}{1+e^{f(x)}}dx > \int_0^2 \frac{1}{1+e^{f(x)}}dx$.

88. Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής $f(x)$ για την οποία, για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$.

(α') Να εξεταστεί η g ως προς το πρόσημο, τη μονοντονία και τα ακρότατα.

(β') Να δειχθεί ότι $g(a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$ για κάθε $a > 0$.

(γ') Να δειχθεί ότι αν $g(a) = g(\beta)$, τότε $a = \beta$ ή $a\beta = 1$.

89. (α') Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία η $f'(x)$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια.

(β') Να μελετηθεί η $f(x) = \int_a^x te^{\sigma\upsilon\nu\, t}dt$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Αν $a \neq 0$, να βρεθεί το πρόσημο του ακροτάτου και να λυθεί η $f(x) = 0$.

90. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ γι κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να εκφραστεί η f' σαν συνάρτηση της f.

(β') Να δειχθεί ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

(γ') Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$, να δειχθεί ότι $\frac{1}{4} < \text{E} < \frac{1}{2}f(1)$.

91. (α') Αν ο μιγαδικός $\frac{z-i}{z-2}$ είναι φανταστικός, να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα.

(β') Αν το παραπάνω σημείο Κ αντιστοιχεί στο ακρότατο της συνάρτησης $f(x) = \frac{ax}{x^2+\beta}$, $a \neq 0$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον άξονα $x'x$ και την $\epsilon : x = -1$.

92. (α') Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ο $w = \frac{z-1}{z+6i}$ είναι πραγματικός, είναι ευθεία (ϵ), η οποία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 3$ στο σημείο $\text{A}(3, 12)$.

(β') Να δειχθεί ότι το χωρίο που περικλείεται από την $f(x)$, τον $x'x$ και τις $x = 0, x = 3$, χωρίζεται από την ευθεία (ϵ) σε 2 μέρη με λόγο εμβαδών 2.

93. (α') Αν οι ρίζες της εξίσωσης $(z-4)^\nu = (z+2-2i)^\nu$ ανήκουν σε ευθεία ϵ που εφάπτεται στην $f(x) = ax^3 + \beta x$ στο $x = 1$, να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(β') Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον $x'x$ και την εφαπτομένη ϵ.

94. Έστω $f(x)$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, έτσι ώστε $f(x)f''(x) - 2[f'(x)]^2 = af^3(x)$ και $f'(0) = 0$. Αν $g(x)$ συνάρτηση συνεχής με $\int_0^x g(t)dt = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $h(x) = x - g(x)$ να είναι σταθερή στο $[0, 1]$. Κατόπιν να βρεθούν οι τύποι των h, g, f.

95. (α') Αν $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sigma\upsilon\nu\, x}{x} = 2$, να βρείτε την παράγωγο στο $x = 0$ της συνεχούς $f(x)$.

(β') Αν επιπλέον ισχύει $f(x) - f(x-1) = e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 2$.

(γ') Αν $\int_2^3 f(x)dx = e$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την θετική $f(x)$, τους άξονες $x'x, y'y$ και την $\epsilon : x = 1$.

96. Έστω f, g παραγωγίσιμες με $\int_1^x f(t)dt - \int_1^x g(t)dt = \ln x - x + 1$ για κάθε $x > 0$.

(α') Αν η g έχει ρίζες $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$, να δειχθεί ότι η f έχει ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

(β') Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)\xi^2 = -1$.

(γ') Αν η f είναι κοίλη, να δειχθεί ότι και η g είναι κοίλη και ότι έχει ακρότατο του οποίου να βρεθεί το είδος.

(δ') Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και την $x = e$.

97. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) = \int_0^x [f^2(t) + e^t - t - 1]dt$.

(α') Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

(β') Να λυθεί η εξίσωση $f'(x) = 0$.

(γ') Να λυθεί η ανίσωση $f''(x) < 0$.

(δ') Να γίνει γραφική παράσταση της f.

98. (α') Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος c_1 των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(\overline{z} + z)\left[\frac{1}{4}(z^2 + \overline{z^2})i + \frac{i}{2}(|z|^2 + 4)\right] = \overline{\overline{z} - z}$.

(β') Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος c_2 των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w = \frac{3}{2}(z + \overline{z})^2 + i(z - \overline{z}) + 2i$ είναι φανταστικός.

(γ') Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $(c_1), (c_2)$ των παραπάνω γεωμετρικών τόπων.

99. (α') Να δειχθεί ότι $2 \leq I \leq 2e$, όπου $I = \int_{-1}^1 e^{x^2} dx$.

(β') Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της $g(x) = \int_x^I \frac{f(t)}{\ln t} dt$, όπου f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ') Να βρεθούν οι συναρτήσεις f για τις οποίες $xf(x) = g(x) + 1$, για κάθε $x \in A$.

(δ') Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e, x = e^2$ ισούται με $\ln 4^a$, να βρεθεί, συναρτήσει του a, ο τύπος της $f(x)$.

100. Έστω f γνήσια αύξουσα με συνεχή παράγωγο στο $[0, a]$ και σύνολο τιμών το $[0, a]$. Να βρεθεί η παράσταση $\Pi = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f^{-1}(x)dx$

101. Έστω f γνήσια φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[a, \beta]$ και σύνολο τιμών το $[a, \beta]$. Να βρεθεί η παράσταση $\Pi = \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta f^{-1}(x)dx$

102. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I(a) = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \qquad (a > 0)$$

103. Έστω $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 με $f(0) = 1$ και

$$(x-1)f(x) = \int_{\frac{1}{f(x)}}^1 f(x)f^{-1}(tf(x))dt - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

104. Αν $f(x)$ συνεχής και περιττή αν αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} x^2 f(\eta\mu\, x)dx = -2\pi^2 \int_0^{\pi} f(\eta\mu\, x)dx$$

105. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^x \left(\int_1^y e^{t^3} dt \right) dy \right) dx$$

106. Αν $f(\eta\mu\, x) + xf(x) = x^2 + 1$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$

107. Αν $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$ τότε να δείξετε ότι το $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+2)}{f(x-2)} = 16$.

108. Αν $f(x) = \frac{2|z_1|^x + |z_2|^x}{|z_1|^x + 2|z_2|^x}$ να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

109. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $(f(x))^3 + f(x) = x + 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει f^{-1} και να βρεθεί.

110. Αν $f(x) = \int_0^{\varepsilon\varphi\, x} \frac{1}{1+t^2} dt$ με $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ να βρείτε την $f'(x)$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt$.

111. (α΄) Αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-a, a]$ και η f συνεχής στο $[-a, a]$ να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

(β΄) Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x) = x + x^{2004} \int_{-1}^{1} f(x^2 t^2)\, \eta\mu(xt)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

112. Αν $f(x) = \int_0^x (x - t)e^t dt$ να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

113. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $(x - 1)\int_0^x f(t)dt \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = 0$ και $f(0) = 0$.

114. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα σημεία καμπής της $g(x) = \int_{2-x}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}$.

115. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(0) = 2, f(x+y) + 2f(xy) = f(x)f(y) + 2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να δείξετε ότι $f'(x) - 2f(x) = -4x$.

(β΄) Να δείξετε ότι η $g(x) = (f(x) - 2x - 1)e^{-2x}$ είναι σταθερή.

(γ΄) Να βρείτε την f.

(δ΄) Να βρείτε το

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{\nu}\, \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \right)$$

.

116. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 6x + \int_x^0 (t-x)f(t)dt$. Να δείξετε ότι $f''(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$.

117. Έστω συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x\int_0^1 f(xt)dt, x \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Να δείξετε ότι $f(x) \geq -\frac{1}{e^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (β΄) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2, x = -1$.

   (γ΄) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)$.

118. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $x(1 - f'(x))\ln a = 1, x > 0$ και $0 < a < 1$.

   (α΄) Να βρείτε την $f(x)$.

   (β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   (γ΄) Να δείξετε ότι $f(y) - f(x) > y - x$ με $x < y$ και $x, y \in (0, +\infty)$.

119. Αν f άρτια, g περιττή και f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{e^{g(x)} + 1} dx = \int_0^1 f(x)dx$$

120. Αν $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 e^t dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

121. Δίνεται η f συνεχής στο $(-1, +\infty)$ με $f(0) = -1, f(1) = \ln 2$ και $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση $\int_0^x f(t)dt \int_x^1 f(t)dt \geq a(x-1)\ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$.

122. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = x - \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Να δείξετε ότι $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = (f(x) - \text{ημ}\, x)^2 + (f'(x) - \text{συν}\, x)^2$ είναι σταθερή και ίση με το μηδέν.

   (γ΄) Να βρείτε τον τύπο της f.

123. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, με $f(a) = a$ και $f(\beta) = \beta$ όπου $0 < a < \beta$. Να δειχθεί:

   (α΄) υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

   (β΄) υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = a + \beta - x_0$.

   (γ΄) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

   (δ΄) αν υπάρχει η f'' στο $[a, \beta]$ και είναι συνεχής ώστε $\int_a^\beta xf''(x)dx = 0$ τότε η εξίσωση $xf''(x) + f'(x) = 1$ έχει λύση στο (a, β).

124. Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει

$$\text{Re}\left(z + \frac{4}{z}\right) = 2\text{Re}(z) \qquad (1)$$

(α΄) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

(β΄) Αν $\text{Re}(z) \neq 0$ τότε

i. να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4 \leq w \leq 4$.

ii. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $c = z + 3 + 4i$.

iii. για το ερώτημα (ii) να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο του $|c|$.

(γ΄) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν τη σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί να αποδείξετε ότι

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$$

125. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f(x) = x, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(β΄) Να δείξετε ότι $f(f(x) + x) = x, \quad$ για κάθε $\quad x \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Να λύσετε την εξίσωση $f(t) + t = 0$.

126. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $g(0) = -1$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x)g(x) = 2e^x \quad \text{και} \quad f(x)g'(x) = -3e^x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.

(β΄) Να βρείτε τους τύπους των f, g.

127. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) < f(1)$.

(α΄) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{5f(0)+3f(1)}{8}$.

(β΄) Έστω ότι το x_0 του παραπάνω ερωτήματος είναι $\frac{1}{2}$.

i. Να δείξετε ότι $x_1, x_2 \in (0, 1)$, με $x_1 \neq x_2$ ώστε $5f'(x_1) = 3f'(x_2)$.

ii. Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + ax^2 + \beta x$ να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f''(\xi) = f(1) - f(0)$.

128. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $f'(1) = e$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + \mathrm{A} \int_0^x \frac{e^x}{x^2 + t^2} dt, \quad x > 0$$

όπου $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ σταθερά. Να δείξετε ότι:

(α΄) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(β΄) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = e^x \ln x, x > 0$.

(γ΄) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(δ΄) η εξίσωση $f^2(x) = f'(x) \int_x^e f(t)dt$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, e)$.

129. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και f'' συνεχή στο 0, για την οποία ισχύει:

$$x^2 f''(x) = 2(f(x) - x) \quad \text{για κάθε} \quad x \geq 0$$

(α΄) Να δείξετε ότι η f'' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β΄) Να βρείτε το τύπο της f.

130. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} + \int_x^{x^2} \frac{2}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \quad \text{για κάθε} \quad x > 0$$

(α΄) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

(β΄) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι ο $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$.

(γ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(δ΄) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = e$.

131. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να δείξετε ότι:

(α΄) υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y = x + 7$.

(β΄) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(x_0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(γ΄) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$

132. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ο σταθερός ακέραιος αριθμός α, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad f(x) = \alpha + \int_{2-x}^{x} \frac{e^x f(t)}{f(t) + f(2-t)} dt$$

(α΄) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β΄) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του α.

133. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = 1 + \int_x^{2x} f(t - x) dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β΄) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(γ΄) Να βρείτε την ευθεία $x = x_0$, η οποία χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ σε δύο μέρη που έχουν το ίδιο εμβαδόν.

134. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$f(x) = \int_0^1 x(f(xt) + xt)^2 dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(α΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = (f(x) + x)^2$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(β') Έστω οι συναρτήσεις $g, h, \phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g(x) = (f(x) + x)\,\text{συν}\, x - \text{ημ}\, x$$
$$h(x) = -\int_0^x (f(t) + t)dt$$
$$\phi(x) = g(x)e^{h(x)}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση ϕ είναι σταθερή.

(γ') Να δείξετε ότι $f(x) = \text{εφ}\, x - x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(δ') Να βρείτε τους $a \in \mathbb{R}^*$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\nu} = a$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x}{1+3^x}, x \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

(β') Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν υπάρχει το $(f^{-1} \circ f^{-1})\left(\frac{1}{4}\right)$.

(γ') Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

136. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία οποία ισχύει: $\lim_{x\to 0}[f(x)(x^2 - 5x - 4)] = +\infty$

(α') Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(β') Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\left(f(x)\,\text{ημ}\,\frac{1}{f(x)}\right)$.

(γ') Αν $g(x) < f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} g(x)$.

137. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

(α') $f(0) = 1$.

(β') $f(\nu x) = f^\nu(x)$.

(γ') Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(δ') Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f'(0)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ε') Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

138. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-a, a]$, $a > 0$ και οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $M(x_0, f(x_0))$ και $M'(-x_0, f(-x_0))$. Να αποδειχθεί ότι:

(α') Αν η f είναι άρτια, τότε οι εφαπτομένες στα M και M' τέμνονται στον $y'y$.

(β') Αν η f είναι περιττή, τότε οι εφαπτομένες στα M και M' είναι παράλληλες.

139. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- f άρτια και g περιττή.
- $f(x) + g(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρεθούν οι f, g.

(β') Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(γ') Να υπολογισθεί το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = a, a > 0$.

(δ') Να υπολογισθούν τα όρια $\lim_{a\to 0^+} E(a), \lim_{a\to+\infty} E(a)$

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(α') Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(β') Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x)) < 6$

(γ') Να αποδειχθεί ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της f^{-1} ακριβώς σε ένα σημείο.

(δ') Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 6$.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η ευθεία ϵ, που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2, 0)$ τέτοια, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ϵ να είναι ελάχιστο, καθώς και το εμβαδόν στην περίπτωση αυτή.

142. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z^3\overline{w} = w\overline{z}^7 = 1$. Να βρείτε:

(α') τα μέτρα των z και w,

(β') τους μιγαδικούς z και w.

143. Έστω a, β και γ μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες τα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα και ω μια ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. Αν $a + \beta\omega + \gamma\omega^2 = 0$, να αποδείξετε ότι:

(α') $a - \beta = \omega(\gamma - a)$,

(β') ΑΒ = ΑΓ,

(γ') το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

144. Σ' ένα σκαληνό τρίγωνο οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι μεγαλύτερες από 45°. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο RΒΓ, με ορθή γωνία στο σημείο R. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΕ και ΓΑΔ με ορθές γωνίες στο σημείο Α. Θεωρούμε ότι το όλο σχήμα βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο και ότι στα σημεία Α, Β και Γ απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_{\mathrm{A}} = ai, z_{\mathrm{B}} = 2\beta$ και $z_\Gamma = 2\gamma$ αντίστοιχα, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\gamma > \beta$.

(α') Να αποδείξετε ότι στο σημείο R αντιστοιχεί ο μιγαδικός $z_{\mathrm{R}} = \beta + \gamma + (\gamma - \beta)i$.

(β') Να βρείτε τους μιγαδικούς z_Δ και z_{E} που έχουν εικόνες τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

(γ') Να αποδείξετε ότι αν $w = \frac{z_\Delta - z_{\mathrm{R}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{R}}}$, τότε $w = -i$.

(δ') Να αποδείξετε ότι RΔ = RΕ.

(ε') Να αποδείξετε ότι RΔ ⊥ RΕ.

(ϝ') Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου RΔΕ.

145. (α') Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει η ισοδυναμία

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow Re(z_1\overline{z_2}) = 0$$

.

(β') Έστω μια συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a^2 + if(a)$ και $w = f(\beta) + i\beta^2$, με $a\beta \neq 0$. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[a, \beta]$.

146. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$ και η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$$

(α') Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z)$.

(β') Έστω $z = \alpha x + \beta y i$, με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < \beta$. Αν ο $f(z)$ είναι φανταστικός τότε:

i. να γράψετε τον $f(z)$ στην μορφή $\kappa + \lambda i$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,

ii. να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε έλλειψη.

147. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(x)f(y) + 1 = f(x) + f(y) + xy$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε τις δυνατές τιμές της f στο $x = 1$.

(β') Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις με τη δοσμένη ιδότητα.

148. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) \cdot f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ όπου $\alpha \neq 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 0$.

(β') Να βρείτε τον τύπο της f.

(γ') Ποια είναι η μονοντονία της f·

(δ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(ε') Να ορίσετε την f^{-1}.

149. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^2(x) \leq f(x)f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $f(0) = f(1)$.

(β') Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

(γ') Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

(β') Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

151. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

(α')

$$(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^3 x)(1 + \sigma\upsilon\nu^4 x) = 2\eta\mu^3 x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

(β')

$$\frac{2\,\eta\mu\, x}{1 + \sigma\upsilon\nu\, x} = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu^2 x}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

152. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο διάστημα $[0,4]$ με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.

(α') Να βρείτε το είδος και τη μονοτονία της f.

(β') Αν $a \in [1,7]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0,4]$.

(γ') Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,4)$ τέτοιος, ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$$

153. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(x)f(y)+xy=xf(y)+yf(x) \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

(α') Να βρείτε το τύπο της f.

(β') Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

154. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και έχει την ιδιότητα

$$\eta\mu\, 3x - x^2 \le xf(x) \le \eta\mu\, 3x + x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

(α') Να βρείτε το $f(0)$.

(β') Να υπολογίσετε το όριο

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(0)}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

.

155. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,\beta]$, με $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{1}{\xi-a}+\frac{1}{\xi-\beta}$$

156. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=0$ και $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$. Να αποδείξετε ότι:

(α')

$$\lim_{x\to a}[f^2(x)+g^2(x)]=0$$

(β')

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

157. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$ έχει την ιδιότητα $f(x-y)=f(x)f(y)+\eta\mu\, x\,\eta\mu\, y$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $f(0)=1$

(β') $f(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$

158. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=g(1)=0, f'(x)=-e^{g(x)}$ και $g'(x)=-e^{f(x)}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

(α') οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, (β') $f = g$,

(γ') η συνάρτηση $h(x) = e^{-f(x)} - x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$,

(δ') $f(x) = -\ln x, x > 0$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

(α') Να βρείτε το πρόσημο της f''.

(β') Να βρείτε το πρόσημο της f'.

(γ') Να λύσετε την εξίσωση $e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)$.

(δ') Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ε') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τα ολικά ακρότατα.

160. (α') Να αποδείξετε ότι

$$\ln\frac{\beta}{a} \leq \frac{\beta^2 - a^2}{2a\beta}$$

για κάθε $\beta \leq a$.

(β') Να λύσετε την εξίσωση

$$2ax\ln\frac{x}{a} = x^2 - a^2$$

.

161. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x) = x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1) \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(α') Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

(β') Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της g.

(γ') Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(δ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τα ολικά ακρότατα.

(ε') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

162. Μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Έστω $\mathrm{M}(a, f(a))$ τυχαίο σημείο της C_f.

(α') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ έχει μοναδική λύση.

(β') Να αποδείξετε ότι τα σημεία της C_f που είναι διαφορετικά από το Μ έχουν μεγαλύτερη τεταγμένη από τα σημεία της εφαπτομένηστης C_f στο Μ με την ίδια τετμημένη.

163. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - (1+\lambda)x + 2 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

(β') Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από σταθερό σημείο, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$

164. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)h(x)$ και $h^2(x) = 1 - (h'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, η h δύο φορές παραγωγίσιμη και το $\mathrm{M}(a, \beta)$ είναι κοινό σημείο των C_f και C_g με $f(a) \neq 0$, τότε:

(α') να βρείτε το $h(a)$,

(β') να αποδείξετε ότι η C_h έχει στο $N(a, h(a))$ οριζόντια εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση,

(γ') να εξετάσετε αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M.

165. Μια πολυωνιμική συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $(f(x)e^{-x})' = -(x^2 - 3x + 2)e^{-x}$. Να βρείτε:

(α') το βαθμό της f.

(β') τη συνάρτηση f.

166. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $(f'(x) - \sigmaυν\, x)(f(x) - ημ\, x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

167. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\lim_{x\to 0} g(x) = 1, f(x) = 1 + xg(x)$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $f'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$,

(β') η συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-x}$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή,

(γ') αν η g είναι συνεχής στο 0, τότε

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

168. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{36} < \text{συν}\,\frac{5\pi}{18} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

169. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $x \leq (f \circ f)(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

(α') να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β') να εξετάσετε αν η f είναι 1-1,

(γ') να βρείτε τον τύπο της f.

170. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \psi$ με $a, \beta, \psi \in \mathbb{R}$ με ρίζες τους αριθμούς $\rho_2 < \rho_2 < \rho_3$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $a^2 > 3\beta$,

(β')

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \rho_1} + \frac{1}{x - \rho_2} + \frac{1}{x - \rho_3}, \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R} - \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$$

,

(γ') αν το $f(a)$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε

$$\frac{1}{a - \rho_1} + \frac{1}{a - \rho_2} + \frac{1}{a - \rho_3} = 0$$

,

(δ') $[f'(x)]^2 \geq f(x)f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

171. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

(α') Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα$(0, +\infty)$, (β΄) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$,

(γ΄) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, να αποδειχθεί ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

172. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

(α΄) Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου.

(β΄) Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$.

(γ΄) Να υπολογισθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

(δ΄) Να βρεθεί το πρόσημο των ριζών του.

173. (α΄) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\nu$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\xi = \frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει $\frac{\xi-\alpha}{\beta-\xi} = \frac{\mu}{\nu}$.

174. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \ln x - x$, $x > 0$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι η $C_{f'}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(β΄) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

(γ΄) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(δ΄) Ποιος είναι ο τύπος της f;

175. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και οι αριθμοί $f(\alpha), f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \quad \text{και} \quad \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$$

είναι ίσοι.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ΄ ένα τουλάχιστον σημείο.

176. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

177. Ένα δοχείο γεμίζει με νερό με σταθερή παροχή. Ο όγκος $V(t)$ του νερού στο δοχείο μετά από t s δίνεται από τον τύπο

$$V(t) = \frac{2}{3}\left(20t^2 - \frac{t^3}{6}\right), 0 \leq t \leq 120$$

(α΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου, όταν $t = 20$s.

(β΄) Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;

178. Η ενέργεια που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο

$$E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}[2(\upsilon - 35)^2 + 750], \upsilon > 0$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.

(α΄) Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο, ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.

(β΄) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ
ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

1. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες:

   (α΄) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

   (β΄) Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται στο x_0, η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ισχύει

   $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

   (γ΄) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ με f' και g' συνεχείς στο Δ, τότε ισχύει

   $$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)$$

   (δ΄) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$, με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού $\nu > 2$, έχει την ιδιότητα $P''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $P(x)$ είναι άρτιου βαθμού και δεν έχει σημείο καμπής.

   (ε΄) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο από τη στήλη Β, δεδομένου ότι $z \neq 0$.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z+1\rvert = \lvert z-1\rvert$	α. $Re(z) = -Im(z)$
2. $\lvert z-i\rvert = \lvert z+i\rvert$	β. $Re(z) = Im(z)$
3. $\lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$	γ. $Re(z) = 0$
4. $\lvert z+1\rvert = \lvert z-i\rvert$	δ. $Im(z) = 0$

4. Να ορίσετε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

5. Να αποδείξετε ότι αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

6. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

7. Για τους μιγαδικούς z_1 και z_2, να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

8. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

   (α') Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f έχει ακρότατο για $x = x_0 \in (\alpha, \beta)$ και ισχύει $f'(x_0) = 0$.

   (β') Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$, τότε $\int_\alpha^\gamma f(x)dx > \int_\beta^\gamma f(x)dx$ με $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

   (γ') Αν η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$ έχει τέσσερις ασύμπτωτες, τότε η f δεν είναι 1-1.

   (δ') Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με f' συνεχή, ώστε $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$,τότε η f δεν είναι 1-1.

   (ε') Αν ορίζεται το άθροισμα $f + g$ δύο συναρτήσεων f και g, τότε οι f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

9. Να διατυπώσετε, χωρίς να αποδείξετε, το κριτήριο παρεμβολής.

10. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

11. Να αντιστοιχίσετε κάθε όριο της στήλης Α με την τιμή του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$	α. 1
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x + \etaμ\, x}{2x - \etaμ\, 2x}$	β. 2
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}$	γ. 3
4. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$	δ. $\frac{1}{3}$
	ε. $\frac{1}{2}$
	στ. 0
	ζ. $+\infty$

12. Να σημειώσετε τον αριθμό που αντιστοιχεί στο σωστό ισχυρισμό από τους επόμενους. Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι:

   (α') συνεχής και η γραφική της παράσταση έχει τρείς ασύμπτωτες,

   (β') συνεχής και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

   (γ') δύο φορές παραγωγίσιμη και σε σημείο x_0 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, με $f'(x_0) = f''(x_0)$,

   (δ') παραγωγίσιμη, με $f'(x_0) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία δεν έιναι 1-1,

   (ε') συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}^*$.

13. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

14. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

   (α') Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ έχει τουλάχιστον μία ασύμπτωτη.

(γ΄) Αν για τις συναρτήσεις f, g και h ισχύουν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ όπου $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$,

τότε $l_1 \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq l_2$.

(δ΄) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχεί στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_\alpha^x f(t)dt > \int_\alpha^x g(t)dt$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ τότε θα ισχύει και $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$.

(ε΄) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι οι f και $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0, με $f(x_0) \neq 0$ τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

15. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(α΄) Υπάρχει συνάρτηση f σ΄ ένα διάστημα Δ, ώστε να ισχύει $\int f(x)dx = 0$.

(β΄) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοικτού διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοικτό διάστημα ή κλειστό διάστημα.

(γ΄) Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, τότε και η συνάρτηση g, με $g(x) = f^2(x), x \in A$ παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο.

(δ΄) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ΄ ένα διάστημα Δ και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σ΄ ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $f(x) \geq \lambda x + \beta$ για κάθε $x \in \Delta$.

(ε΄) Αν z_1 και z_2 είναι τυχαίοι μιγαδικοί, τότε ισχύει $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$.

16. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

17. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(α΄) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f'(x_0) = 0$.

(β΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha)g(\beta)f(\gamma) < 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = 0$.

(γ΄) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x_0) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει διάστημα Δ στο οποί η f είναι γνησίως αύξουσα.

(δ΄) Αν το τετράγωνο ενός μιγαδικού z είναι αρνητικός αριθμός, τότε ο z είναι φανταστικός.

(ε΄) Αν η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία ε, τότε η ε δεν τέμνει την C_f.

18. Έστω η συνάρτηση f που έχει αντίστροφη την f^{-1}. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$.

19. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(α΄) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κυρτή στο $\mathbb{R}$, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, καθώς επίσης και 1-1, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$

(γ΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ώστε $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$, ώστε $f(x_0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(δ΄) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η f^2 μπορεί να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

(ε΄) Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε και κάθε παράγουσα της f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

20. Να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $x^3 f(x) \geq x - \eta\mu\, x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $f(0)$ είναι:

α. 0 β. 1 γ. $+\infty$ δ. $\frac{1}{6}$ ε. $\frac{2}{3}$

21. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

22. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $f(x) = x^x, x > 0$, στο σημείο της $A(1,1)$.

23. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(α΄) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

(β΄) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και δεν είναι 1-1 σ' αυτό, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $x_1 < x_2$, ώστε $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = 0$.

(γ΄) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > (\beta - \alpha)f(\alpha)$.

(δ΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$ τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη $\beta = \gamma$.

24. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

25. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

(α΄) Πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$;

(β΄) Πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$;

26. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 3x + 4$. Να αντιστοιχίσετε κάθε όριο της στήλης Α με την τιμή του από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$	α. $-\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 4x]$	β. 0
3. $\lim_{x\to 0^+} \left[x^{\frac{2}{x}}\right]$	γ. $+\infty$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+4x}{2f(x)+x}$	δ. 3
	ε. 1

27. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

28. Να αποδείξετε ότι $(\text{συν}\, x)' = -\,\text{ημ}\, x$

29. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

   (α') Αν $f(x) = |x|$, τότε $(f(0))' = 0$.

   (β') Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \text{για κάθε} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   (γ') Για τις διάφορες του $\nu \in \mathbb{N}^*$, το άθροισμα $S_\nu = i + i^2 + \ldots + i^\nu$ παίρνει τέσσερις τιμές.

   (δ') Αν ισχύει $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι $lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f^2(x)} = +\infty$.

30. Να αποδείξετε ότι $(\text{ημ}\, x)' = \text{συν}\, x, x \in \mathbb{R}$.

31. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

   (α') Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και η σύνθεση $f \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

   (β') Αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη την f^{-1}, τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

   (γ') Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε από όλους τους μιγαδικούς $z = x + f(x)i, x \in [\alpha, \beta]$, υπάρχει ακριβώς ένας που έχει μέγιστο μέτρο.

   (δ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

   (ε') Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό, δηλαδή δεν υπάρχει το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

32. Να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, ώστε $\int_0^1 f^2(x)dx = \lambda, \int_1^2 f^2(x)dx = \lambda^2, \int_0^2 f^2(x)dx = 6$, τότε ο λ είναι:

   α. 1 β. −3 γ. 2 ή −3 δ. 2 ε. 3 ή −2

33. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

34. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

   (α') Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και παραγωγίσιμη, τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

   (β') Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η σύνθεση $f \circ g$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, τότε και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

   (γ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε ορίζεται και η σύνθεση $f \circ f$ στο Δ και είναι συνεχής σε αυτό.

(δ΄) Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

35. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

36. Να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει $f(x_0) = n$.

37. Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $z_1 \neq z_2$, ο θετικός αριθμός ρ και η γωνία $\varphi \in [0, 2\pi)$. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α στον γεωμετρικό τόπο που εκφράζει και βρίσκονται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z - z_1\rvert > \lvert z - z_2\rvert$	α. εσωτερικό κύκλου
2. $\lvert z - z_1\rvert < \rho$	β. ημιεπίπεδο
3. $\lvert z - z_1\rvert > \rho$	γ. εξωτερικό κύκλου
	δ. ημιευθεία χωρίς αρχή
	ε. ευθεία

38. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

39. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες

(α΄) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$.

(β΄) Αν $f(x) = x^4$, τότε το σημείο $A(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(γ΄) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)\left(\int_\beta^\alpha f(x)dx\right) < 0$$

(δ΄) Αν f είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(x)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f^2 είναι γνησίως αύξουσα.

40. Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του μιγαδικού i^ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

41. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(α΄) Αν $lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0$, τότε $lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(β΄) Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει για άπειρες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(γ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα μοναδικό μέγιστο και ένα μοναδικό ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.

(δ') Αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)' = \int_\alpha^\beta f'(x)dx$$

42. Αν $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

43. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Σωστούς ή Λανθασμένους.

(α') Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ.

(β') Αν η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη για $x \to +\infty$ την ευθεία $y = \lambda x + \beta$, τότε η C_f δεν τέμνει αυτή την ασύμπτωτη.

(γ') Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη την f^{-1}, τότε η f^{-1} έχει αντίστροφη την f.

(δ') Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

44. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Σωστούς ή Λανθασμένους.

(α') Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε και η αντίστροφή της είναι f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β') Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(γ') Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$.

(δ') Αν η συνάρτηση f ορίζετε σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο.

(ε') Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάποιο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, τότε η f στο x_0 παρουσιάζει ακρότατο ή αλλάζει κοίλα.

(ϛ') Αν η συνάρτηση $f + g$ δεν παραγωγίσιμη στο x_0, τότε και η f και η g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

(ζ') Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(η') Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}^*$, τότε η f δεν είναι ρητή, δηλαδή πηλίκο πολυωνιμικών συναρτήσεων.

(θ') Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό, με $f(\beta) = 0$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$.

45. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες

(α') Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

(β') Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

(γ΄) Αν f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x_0) = 0, x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

(δ΄) Αν ισχύει $\lim_{x \to 0} f^2(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

46. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:
Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

47. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες

(α΄) Αν για τη συνάρτηση f υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, x_0 \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(β΄) Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε την παράγωγό της τη γράφουμε $f'(x_0)$ ή ισοδύναμα $(f(x_0))'$.

(γ΄) Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και μη σταθερή, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in A$, ώστε $f'(x_0) \neq 0$.

(δ΄) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, στο οποίο η f' δεν είναι συνεχής, τότε ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

(ε΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, τότε η εικόνα $f(\Delta)$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη διάστημα.

48. Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες σ΄ ένα διάστημα Δ. Αν:

- οι f, g είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

49. Να σημειώσετε τα γράμματα που αντιστοιχούν στις σωστές προτάσεις.

(α΄) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, τότε η f έχει ελάχιστο στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της είναι κλειστό διάστημα.

(γ΄) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και παραγωγίσιμη, τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

(δ΄) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε η σύνθεση $f \circ f$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνεχής στο Δ.

(ε΄) Ο αντίστροφος του i είναι το $-i$.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Ιδιότητες Συζυγών

- Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$$

$$= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 .$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_\nu$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_\nu .$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$$

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.
Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι, έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Επίλυση της Εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *και* $\alpha\neq 0$

Επειδή $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$, η εξίσωση $x^2=-1$ έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=i$ και $x_2=-i$. Ομοίως, η εξίσωση $x^2=-4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=2i$ και $x_2=-2i$, αφού

$$z^2=-4\Leftrightarrow z^2=i^2\cdot 4\Leftrightarrow z^2=(2i)^2\Leftrightarrow z=2i \quad \text{ή} \quad z=-2i\,.$$

Εύκολα, όμως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο $\mathbb{C}$. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0\,, \quad \text{με} \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \alpha\neq 0\,.$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\,,$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

  Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\,, \qquad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad [\text{αφού } \alpha\neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{Συμπληρώσαμε το 1ο}\\ \text{μέλος ώστε να γίνει}\\ \text{τέλειο τετράγωνο}\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.$$

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Όρια και πράξεις

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P(x)&=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)\\&=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0\\&=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0\\&=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0)\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)\,.}$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}P(x)}{\lim_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\,.$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\quad \text{εφόσον}\quad Q(x_0)\neq 0}$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

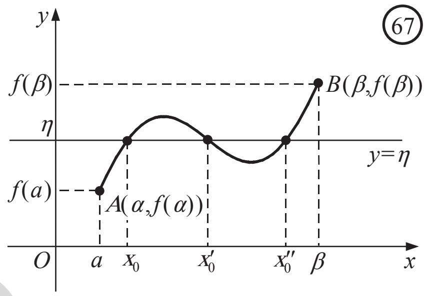
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■

Παράγωγος και συνέχεια

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

● Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)'=0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,$$

δηλαδή $(c)'=0$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,,$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}\,,$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η **$f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

● Έστω συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\text{συν}x$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{ημ}x)'=\text{συν}x}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{ημ}(x+h)-\text{ημ}x}{h}=\frac{\text{ημ}x\cdot\text{συν}h+\text{συν}x\cdot\text{ημ}h-\text{ημ}x}{h}$$

$$=\text{ημ}x\cdot\frac{(\text{συν}h-1)}{h}+\text{συν}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{ημ}h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\text{συν}h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{ημ}x\cdot 0+\text{συν}x\cdot 1=\text{συν}x.$$

Δηλαδή, $(\text{ημ}x)'=\text{συν}x$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-\text{ημ}x$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{συν}(x+h)-\text{συν}x}{h}=\frac{\text{συν}x\cdot\text{συν}h-\text{ημ}x\cdot\text{ημ}h-\text{συν}x}{h}$$

$$=\text{συν}x\cdot\frac{\text{συν}h-1}{h}-\text{ημ}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\text{συν}x\cdot\frac{\text{συν}h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}\right)$$

$$=\text{συν}x\cdot 0-\text{ημ}x\cdot 1=-\text{ημ}x.$$

Δηλαδή, $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \quad \blacksquare$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

Για παράδειγμα,

$$(x^{-4})'=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}, \qquad x\neq 0.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu>1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z}-\{0,1\}$, τότε

$$\boldsymbol{(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x \mid \text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2 x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x}=\frac{\text{συν}x\,\text{συν}x+\text{ημ}x\,\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$$

$$=\frac{\text{συν}^2 x+\text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x}=\frac{1}{\text{συν}^2 x}. \quad \blacksquare$$

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2=\mathbb{R}-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και
- $f'(x)=0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

● Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

● Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει:

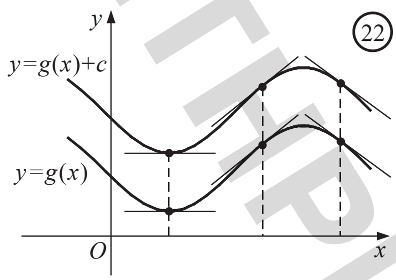
$$f(x)=g(x)+c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. ■



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

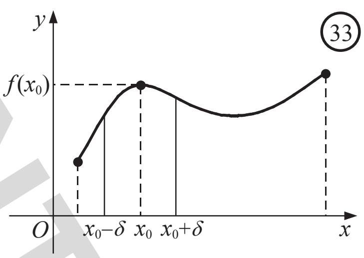
$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \quad \blacksquare$$