ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Γ΄Λυκείου
Θεωρία

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr www.iliaskos.gr

Μιγαδικοί Αριθμοί

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών

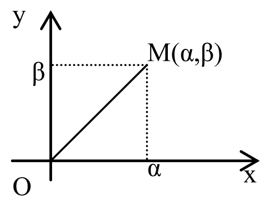
Το σύνολο **C** των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου **R** των πραγματικών αριθμών στο οποίο επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που ισχύουν στο **R**, με το 0 να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 να είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Υπάρχει ένα στοιχείο **i** τέτοιο ώστε $\mathbf{i^2=-1}$. Κάθε στοιχείο z του **C** γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Ο πραγματικός αριθμός α λέγεται **πραγματικό μέρος** ($\alpha=\mathrm{Re}(z)$) του z και ο πραγματικός αριθμός β ($\beta=\mathrm{Im}(z)$) λέγεται **φανταστικό μέρος** του z. Ο αριθμός βi λέγεται **φανταστικός αριθμός**.

__Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\mathrm{Im}(z)=0$.

__Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z)=0$.

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού

Κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ (ή $M(z)$) λέγεται **εικόνα του μιγαδικού z**. Ο άξονας x΄x λέγεται **πραγματικός άξονας** και ο άξονας y΄y λέγεται **φανταστικός άξονας**.



Πράξεις μιγαδικών αριθμών

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$.

__**Πρόσθεση:** $z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

__**Αφαίρεση**: $z_1-z_2=(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών z_1 και z_2 είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

__**Πολλαπλασιασμός**: $z_1z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

__**Διαίρεση:** $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma-\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta i^2}{\gamma^2-\delta^2 i^2}=$$

$$=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{(\beta\delta-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Ισότητα μιγαδικών

- Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1=α+βi, z_2=γ+δi είναι ίσοι όταν α=γ και β=δ, δηλαδή:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \text{και} \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν ισχύει $z_1 \geq z_2$ τότε είναι: $\alpha \geq \gamma$ και β=δ=0 αφού διάταξη στον σύνολο **C** *δεν ορίζεται, οπότε οι z_1, z_2 είναι πραγματικοί.*

Δυνάμεις του μιγαδικού z και δυνάμεις του i

__ $z^1=z$, $z^2=zz$, $z^\nu=z^{\nu-1}z$ με ν θετικό ακέραιο και ν>1.

__ $z^o=1$, $z^{-\nu}=\frac{1}{z}$ με $z\neq 0$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

__ $i^o=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.

__ Γενικά ισχύει: $i^\nu = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \nu = 4\rho \\ i, & \text{αν} \quad \nu = 4\rho+1 \\ -1, & \text{αν} \quad \nu = 4\rho+2 \\ -i, & \text{αν} \quad \nu = 4\rho+3 \end{cases}$, $\quad \rho \in \mathbf{Z}$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\boldsymbol{i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho}\cdot i^\upsilon = (i^4)^\rho \cdot i^\upsilon = 1^\rho \cdot i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad \upsilon = 0 \\ i, & \alpha\nu \quad \upsilon = 1 \\ -1, & \alpha\nu \quad \upsilon = 2 \\ -i, & \alpha\nu \quad \upsilon = 3 \end{cases}}$$

Συζυγής μιγαδικού

- **Συζυγής μιγαδικού αριθμού** z=α+βi ονομάζεται ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z}$=α-βi, δηλαδή ισχύει: $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\bar{z})$ και $\mathrm{Im}(z)=-\mathrm{Im}(\bar{z})$.

Αν Μ(α,β) είναι η εικόνα του μιγαδικού z=α+βi, τότε το Μ΄(α,-β) είναι η εικόνα του συζυγή του, δηλαδή τα Μ, Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα x'x.

Για τους συζυγείς δύο μιγαδικών αριθμών z_1=α+βi, z_2=γ+δi ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

__ $z+\bar{z} = 2\alpha \Rightarrow z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ και

$z-\bar{z} = 2\beta i \Rightarrow z-\bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)i \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

__ $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\boldsymbol{\overline{z_1+z_2} = \overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)} = \overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} = (\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i =}$$

$$\boldsymbol{= (\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$$

__ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

__ $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_\nu} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \cdot \dots \cdot \overline{z}_\nu$

__ $\overline{(z_1^\nu)} = (\overline{z}_1)^\nu$

__ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

__ $\overline{(\overline{z}_1)} = z_1$

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Αν ο αριθμός z είναι πραγματικός, τότε* $z = \overline{z}$ *και αντιστρόφως αφού:*

$$z \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow Im(z)=0 \Leftrightarrow 2Im(z)i=0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}\,.$$

- ✓ *Αν ο αριθμός z είναι φανταστικός, τότε* $z = -\overline{z}$ *και αντιστρόφως αφού*

$$z \in \boldsymbol{I} \Leftrightarrow Re(z)=0 \Leftrightarrow 2Re(z)=0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}\,.$$

Λύσεις της εξίσωσης $αz^2+βz+γ=0$,$α \neq 0$ και $α,β,γ \in \mathbf{R}$

Έστω η εξίσωση $αz^2+βz+γ=0$ (1) με $α,β,γ \in \mathbf{R}$ και $α \neq 0$ και $Δ=β^2-4αγ$ η διακρίνουσα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

__ Αν Δ>0 η (1) έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$

__ Αν Δ=0 η (1) έχει μία διπλή πραγματική λύση: $z = -\frac{β}{2α}$

__ Αν Δ<0 η (1) έχει δύο μιγαδικές λύσεις (και μάλιστα συζυγείς): $z_{1,2} = \frac{-β \pm i\sqrt{-Δ}}{2α}$

<u>***Απόδειξη:***</u>

Από την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων της εξίσωσης $αz^2+βz+γ=0$ με Δ<0 προκύπτει:

$$\left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{Δ}{4α^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{(-1)(-Δ)}{4α^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{i^2\left(\sqrt{-Δ}\right)^2}{4α^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-Δ}}{2α}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{-β \pm i\sqrt{-Δ}}{2α}$$

Επίσης ισχύουν οι τύποι του Vieta δηλ.: $z_1+z_2=-\frac{β}{α}$ και $z_1z_2=\frac{γ}{α}$.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u> *Από τον τύπο των ριζών του τριωνύμου $αz^2+βz+γ=0$ με Δ<0 προκύπτουν:*

- ✓ $z_1=\overline{z}_2$ *και* $\overline{z}_1=z_2$

✓ $z_1+z_2=-\frac{\beta}{a} \Rightarrow z_1+\bar{z}_1=-\frac{\beta}{a} \Rightarrow 2Re(z_1)=-\frac{\beta}{a} \Rightarrow Re(z_1)=-\frac{\beta}{2a}$ και ομοίως $Re(z_2)=-\frac{\beta}{2a}$, *οπότε* $Re(z_1)=Re(z_2)=-\frac{\beta}{2a}$

✓ $z_1z_2=\frac{\gamma}{a} \Rightarrow z_1\bar{z}_1=\frac{\gamma}{a} \Rightarrow |z_1|^2=\frac{\gamma}{a} \Rightarrow |z_1|=\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ και ομοίως $|z_2|=\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$, οπότε $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ *(όπου* $|z_1|$, $|z_2|$ *είναι τα μέτρα των* z_1, z_2 *αντίστοιχα όπως θα δούμε παρακάτω).*

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

➢ Έστω ο μιγαδικός αριθμός z=x+yi και η εικόνα του M(x,y). Ορίζουμε ως **μέτρο του z** την απόσταση του M από το O, δηλαδή το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$. Άρα:

$$|\mathbf{z}|=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}$$

Για το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

— $|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$

— $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

— $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

<u>Απόδειξη:</u>

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\text{, που ισχύει.}$$

— $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$

— $|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_\nu|$

— $|z^\nu|=|z|^\nu$

— $||z_1|-|z_2||\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

Γεωμετρικοί τόποι μιγαδικών

— Η απόσταση των εικόνων Α, Β δύο μιγαδικών z_1, z_2 είναι ΑΒ=$|z_1-z_2|$, δηλ. το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

— Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(z_1) και Β(z_2).

__Έστω $z=x+yi$ και $z_o=x_o+y_oi$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Η εξίσωση:

$$|z-z_o|=\rho \Leftrightarrow |(x-x_o)+(y-y_o)i|=\rho,\ \rho>0$$

παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_o,y_o)$ και ακτίνα ρ δηλ. c: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Η ανισοϊσότητα* $|z-z_1| \le |z-z_2|$ *παριστάνει το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο ΑΒ με $A(z_1)$ και $B(z_2)$ και το σημείο $A(z_1)$.*
- ✓ *Η ανίσωση* $|z-z_1| < |z-z_2|$ *παριστάνει το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο ΑΒ με $A(z_1)$ και $B(z_2)$ και το σημείο $A(z_1)$ με εξαίρεση την ΑΒ.*
- ✓ *Η ανισοϊσότητα* $|z-z_o| \le \rho$ *με ρ>0 παριστάνει κυκλικό δίσκο με κέντρο το $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.*
- ✓ *Η ανίσωση* $|z-z_o| < \rho$ *με ρ>0 παριστάνει το σύνολο των σημείων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου με κέντρο το $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.*
- ✓ *Η ανισοϊσότητα* $|z-z_o| \ge \rho$ *με ρ>0 παριστάνει το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω και εξωτερικά του κύκλου με κέντρο το $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.*
- ✓ *Η ανίσωση* $|z-z_o| > \rho$ *με ρ>0 παριστάνει το σύνολο των σημείων που βρίσκονται εξωτερικά του κύκλου με κέντρο το $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.*
- ✓ *Η ανισοϊσότητα* $\rho_1 \le |z-z_o| \le \rho_2$ *παριστάνει κυκλικό δακτύλιο που ορίζεται από το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω και εξωτερικά του κύκλου με κέντρο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ_1 και πάνω και εσωτερικά του κύκλου με κέντρο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ_2.*
- ✓ *Η ανίσωση* $\rho_1 < |z-z_o| < \rho_2$ *παριστάνει κυκλικό δακτύλιο που ορίζεται από το σύνολο των σημείων που βρίσκονται εξωτερικά του κύκλου με κέντρο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ_1 και εσωτερικά του κύκλου με κέντρο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ_2.*
- ✓ *Η εξίσωση* $|z-\gamma|+|z+\gamma|=2\alpha$ *με α,γ>0 παριστάνει την έλλειψη c:* $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.
- ✓ *Η εξίσωση* $|z-\gamma i|+|z+\gamma i|=2\alpha$ *με α,γ>0 παριστάνει την έλλειψη c:* $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.
- ✓ *Η εξίσωση* $\big||z-\gamma|-|z+\gamma|\big|=2\alpha$ *με α,γ>0 παριστάνει την υπερβολή c:* $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.
- ✓ *Η εξίσωση* $\big||z-\gamma i|-|z+\gamma i|\big|=2\alpha$ *με α,γ>0 παριστάνει την υπερβολή c:* $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.

Όριο - Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός συνάρτησης – Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Έστω A ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το A μία διαδικασία f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x). Την διαδικασία αυτή την εκφράζουμε $f: A \to \mathbf{R}$.

Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο που έχει στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A). Είναι δηλ.:

$$f(A)=\{y / y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει y=f(x), δηλ. το σύνολο των σημείων M(x,f(x)), $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f. H y=f(x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbf{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων της C_f, ενώ το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f(A) των τεταγμένων των σημείων της C_f. Τέλος η τιμή της f στο $x_o \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_o$ και της C_f.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x της γραφικής παράστασης της f.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Πράξεις συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το A και g με πεδίο ορισμού το B. Ισχύουν:

__ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ με $D_{f+g}=A \cap B$

__ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ με $D_{f-g}=A \cap B$

__ $(fg)(x)=f(x)g(x)$ με $D_{fg}=A \cap B$

__ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ με $D_{\frac{f}{g}}=\{x / x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$

Ισότητα συναρτήσεων

- Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

  __ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α

  και

  __ για κάθε $x \in A$ ισχύει f(x)=g(x) δηλ. έχουν τον ίδιο τύπο.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν $|f(x)| = |g(x)|$ τότε δεν είναι απαραίτητα $f(x) = \pm g(x)$.

Σύνθεση συναρτήσεων

- Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της g με την f** και την συμβολίζουμε **fog** τη συνάρτηση με τύπο (fog)(x)=f(g(x)).

Το πεδίο ορισμού $\Gamma \neq \varnothing$ της fog αποτελείται από όλα τα x του πεδίου ορισμού Β της g για τα οποία το g(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού Α της f, δηλαδή:

$$\Gamma = \{x \in B \,/\, g(x) \in A\}$$

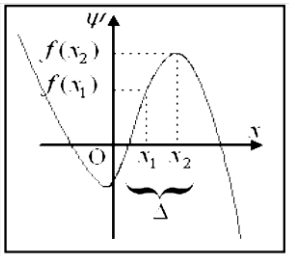
Γενικά, αν f,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fog και gof τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει: ho(gof)=(hog)of.

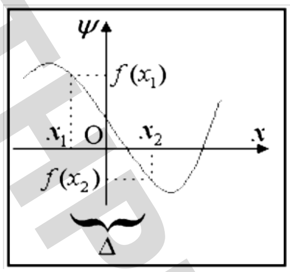
Μονοτονία συναρτήσεων

- Μία συνάρτηση f λέγεται:

  __**γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιοδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.



  __ **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιοδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.



Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ και είναι 1 – 1.

Μία συνάρτηση f λέγεται:

__ **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιοδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.

__ **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιοδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Μία συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέμε ότι είναι **μονότονη** στο Δ.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

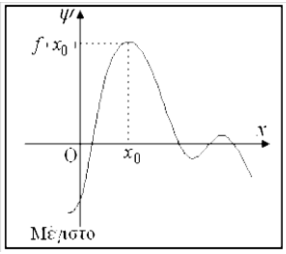
- ✓ *Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ τότε για κάθε x_1, $x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$.*
- ✓ *Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ τότε για κάθε x_1, $x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1>x_2$.*
- ✓ *Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται πάντοτε σε συγκεκριμένα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και όχι πάντα στην ένωσή τους.*

Ακρότατα συνάρτησης

➢ Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι:

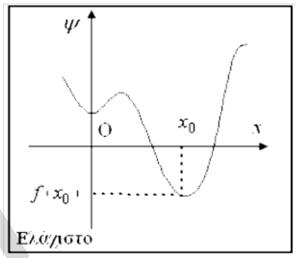
__παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_o)$ όταν, για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) \le f(x_o)$$



__παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_o)$ όταν, για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) \ge f(x_o)$$



Το (ολικό) μέγιστο ή το (ολικό) ελάχιστο της f λέγονται **ακρότατα** της f.

<u>Παρατήρηση:</u> *Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ανοιχτό διάστημα δεν έχει ακρότατα.*

Συνάρτηση 1 – 1

➢ Μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $x_1 \ne x_2$ τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$ ή $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Μία συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν:

__για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

__δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ είναι συνάρτηση 1-1. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μία συνάρτηση f: $A \to \mathbf{R}$ η οποία είναι 1-1. Ονομάζουμε **αντίστροφη συνάρτηση** της f, την συνάρτηση f^{-1}: $f(A) \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:
  - __ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f
  - __ έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f
  - __ ισχύει: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $f^{-1}(f(x))=x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y))=y$, $y \in f(A)$.

<u>Παρατήρηση:</u> *Η f και η f^{-1} έχουν την ίδια μονοτονία και είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.*

Όριο συνάρτησης στον πραγματικό x_o

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_o) \cup (x_o,\beta)$. Όταν οι τιμές της μεταβλητής x τείνουν προς τον πραγματικό αριθμό x_o, τότε οι τιμές της συνάρτησης f τείνουν προς έναν πραγματικό αριθμό ℓ. Τότε λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f στο x_o είναι ℓ και συμβολίζουμε $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$.

<u>Σχόλιο:</u> Για να αναζητήσουμε όριο μιας συνάρτησης f στο x_o πρέπει η f να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_o) \cup (x_o,\beta)$ ή (α,x_o) ή (x_o,β). Το x_o μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό. Η τιμή της f στο x_o μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_o ή διαφορετική απ' αυτό. Επίσης το όριο της f στο x_o είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α,x_o) και (x_o,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (α,x_o). Θα λέμε ότι η f έχει στο x_o από αριστερά όριο το $\ell \in \mathbf{R}$ και γράφουμε $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell$.

Ομοίως μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_o,β) έχει στο x_o από δεξιά όριο το $\ell \in \mathbf{R}$ και γράφουμε $\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell$.

Για μία συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $(\alpha,x_o) \cup (x_o,\beta)$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

Αν $\lim_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_o^+} f(x)$, τότε η f δεν έχει όριο στο x_o.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες:

__ $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o}\left(f(x) - \ell\right) = 0$

__ $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_o + h) = \ell$

Ιδιότητες ορίων

(1)__ Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$) κοντά στο x_o.

(2)__ Αν οι f, g έχουν όριο στο x_o και $f(x) \le g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.

(3)__ Ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$ και $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$

Αν οι f, g έχουν όριο στο x_o τότε υπάρχουν τα παρακάτω όρια και ισχύουν:

(4)__ $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) + \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

(5)__ $\lim\limits_{x\to x_o}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, $\kappa \in \mathbf{R}$

(6)__ $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

(7)__ $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) \neq 0$

(8)__ $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right|$

(9)__ $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}$, $f(x) \ge 0$

(10)__ $\lim\limits_{x\to x_o} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N^*}$

(11)__ Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o$ ένα πολυώνυμο και $x_o \in \mathbf{R}$ τότε: $\lim\limits_{x\to x_o} P(x) = P(x_o)$.

Απόδειξη:

$$\lim_{x\to x_o} P(x) = \lim_{x\to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_o\right) = \lim_{x\to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) + \lim_{x\to x_o}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right) + \cdots + \lim_{x\to x_o} \alpha_o =$$
$$= \alpha_\nu \lim_{x\to x_o}\left(x^\nu\right) + \alpha_{\nu-1} \lim_{x\to x_o}\left(x^{\nu-1}\right) + \cdots + \lim_{x\to x_o} \alpha_o = \alpha_\nu x_o^\nu + \alpha_{\nu-1}x_o^{\nu-1} + \cdots + \alpha_o = P(x_o)$$

(12)__ Έστω $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x) και Q(x) πολυώνυμα του x και $x_o \in \mathbf{R}$ με $Q(x_o) \neq 0$,

τότε: $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$.

Απόδειξη:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_o} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} Q(x)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}.$$

Παρατηρήσεις:

- ✓ *Το αντίστροφο της ιδιότητας (1) δεν ισχύει πάντα.*
- ✓ *Η ιδιότητα (2) ισχύει και αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_o τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.*
- ✓ *Για την ιδιότητα (8) ισχύει ειδικά $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \left|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$.*

✓ *Για τις ιδιότητες (4), (6), (7) αποδεικνύεται ότι αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ στο x_o και υπάρχει το όριο της f στο x_o (ή της g στο x_o) τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_o (ή της f στο x_o).*

Κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν:

— $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o

και

— $\lim\limits_{x\to x_o} h(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \ell$

τότε υπάρχει το όριο της f στο x_o και ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$.

Τριγωνομετρικά όρια

Ισχύουν:

— $\lim\limits_{x\to x_o} ημx = ημx_o$, $\lim\limits_{x\to x_o} συνx = συνx_o$ και $|ημx| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

— $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} \frac{συνx - 1}{x} = 0$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_o} f(u)$, όπου $u=g(x)$, $u_o = \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ και $g(x) \ne u_o$ με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ και $\lim\limits_{u\to u_o} f(u)$.

Μη πεπερασμένο όριο στον πραγματικό x_o (ιδιότητες)

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty$

— Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ (αντ. $-\infty$) τότε $f(x)>0$ (αντ. $f(x)<0$) κοντά στο x_o.

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \left(-f(x)\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \left(-f(x)\right) = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } f(x) > 0 \\ -\infty, & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$ κοντά στο x_o

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[κ]{f(x)} = +\infty$

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

✓ *Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell < 0$ ή $-\infty$ τότε υπάρχει κ κοντά στο $x_o \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ τέτοιος ώστε $f(κ)<0$.*

✓ *Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell > 0$ ή $+\infty$ τότε υπάρχει κ κοντά στο $x_o \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ τέτοιος ώστε $f(κ)>0$.*

Απροσδιόριστες μορφές - Επιτρεπτές πράξεις

Απροσδιόριστες μορφές	Επιτρεπτές πράξεις
__ $(+\infty) - (+\infty)$ __ $(+\infty) + (-\infty)$ __ $0 \cdot (\pm\infty)$ __ $\frac{0}{0}$ __ $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ __ 0^0 __ $0^{(\pm\infty)}$ __ $(+\infty)^0$ __ $(+\infty)^{(\pm\infty)}$ __ $1^{(\pm\infty)}$	Αν $\alpha \in \mathbf{R}$: __ $\alpha + (+\infty) = (+\infty)$ __ $\alpha + (-\infty) = (-\infty)$ __ $\alpha - (+\infty) = (-\infty)$ __ $\alpha - (-\infty) = (+\infty)$ __ $\begin{cases} \alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \\ \alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \end{cases}, \text{αν} \quad \alpha > 0$ __ $\begin{cases} \alpha \cdot (+\infty) = (-\infty) \\ \alpha \cdot (-\infty) = (+\infty) \end{cases}, \text{αν} \quad \alpha < 0$ __ $\frac{\alpha}{(\pm\infty)} = 0$ __ $\frac{\alpha}{0} = (\pm\infty)$ με $\alpha \neq 0$ __ $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ __ $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$ __ $(+\infty) - (-\infty) = (+\infty)$ __ $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$ __ $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$ __ $(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)$

Όριο στο άπειρο

Για τα όρια στο $\pm\infty$ ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες των ορίων στο x_o με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Επιπλέον ισχύουν:

__ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$, $\nu \in \mathbf{N^*}$

__ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbf{N^*}$

__ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν} \quad \nu \quad \text{άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν} \quad \nu \quad \text{περιττός} \end{cases}$

__ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_o) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$

— $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_o}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_o} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ 0, & \text{αν} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{αν} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to 0^+}(\log x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$

— Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν όριο στο $\pm\infty$.

Ακολουθίες – Όριο ακολουθιών

- **Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση α: $\mathbf{N^*} \to \mathbf{R}$.

- Θα λέμε ότι μία ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in \mathbf{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε ε>0, υπάρχει $\nu_o \in \mathbf{N^*}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu>\nu_o$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

<u>Παρατήρηση:</u> Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$ ισχύουν και για τις ακολουθίες και υπολογίζονται με τις ίδιες μεθόδους.

Συνέχεια συνάρτησης

- Έστω μία συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο x_o, όταν:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

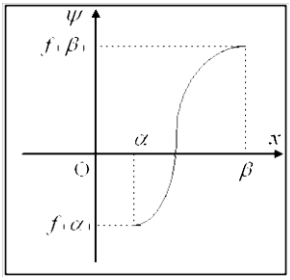
Οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι συναρτήσεις ημx και συνx, οι εκθετικές και οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' όλο το πεδίο ορισμού τους.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_o, τότε και οι συναρτήσεις f+g, cf, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$, $\sqrt[\nu]{f}$, fog, gof (g συνεχής στο $f(x_o)$) είναι συνεχείς στο x_o.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης προκύπτει ότι μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της όταν δεν υπάρχει το όριό της στο x_o ή υπάρχει το όριό της στο x_o αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή $f(x_o)$.*
- ✓ *Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.*
- ✓ *Αν μία συνάρτηση f είναι 1 – 1 και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο f(Δ).*

Θεώρημα Bolzano



Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

__ η f είναι συνεχής στο [α,β]

__ $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o)=0$,

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο (α,β).

<u>Πόρισμα:</u> Από το θεώρημα Bolzano προκύπτουν ότι:

__ αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, τότε η f διατηρεί το πρόσημό της στο Δ.

__ μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει: είναι δυνατόν να υπάρχει ρίζα στο (α,β) μιας συνεχούς συνάρτησης στο [α,β] και να ισχύει $f(\alpha)f(\beta) \geq 0$ ή να υπάρχει ρίζα στο (α,β) και η f να μην είναι συνεχής στο [α,β]. Γενικά η συνθήκη f(α)f(β) είναι ικανή και όχι αναγκαία για να έχει μία συνεχής συνάρτηση στο [α,β] ρίζα στο (α,β).*
- ✓ *Το θεώρημα και το πόρισμα ισχύουν μόνο σε διάσημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.*

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

__ η f είναι συνεχής στο [α,β]

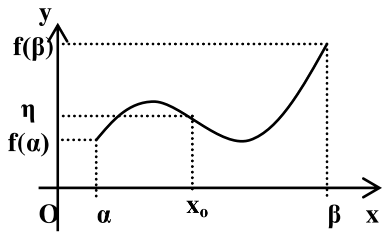
__ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f(x_o)=\eta$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω f(α)<f(β). Τότε θα ισχύει f(α)<η<f(β) όπως φαίνεται και στο σχήμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-\eta \ , \ x \in [\alpha,\beta].$$



__ Η g είναι συνεχής στο [α,β]

$$\text{—}\ \begin{cases} g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0 \\ g(\beta)=f(\beta)-\eta>0 \end{cases} \Rightarrow g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$g(x_o)=0 \Rightarrow f(x_o)-\eta=0 \Rightarrow f(x_o)=\eta$$

Σύμφωνα με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- ✓ *Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο [α,β] δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.*
- ✓ *Αν δεν ισχύει το θεώρημα τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.*
- ✓ *Η εικόνα μιας σταθερής συνάρτησης είναι σημείο.*
- ✓ *Η εικόνα ανοικτού διαστήματος μέσω συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι ανοικτό διάστημα.*

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης

Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m, δηλαδή $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης θα είναι τότε το [m,M].

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) και συνεχής σ' ένα ανοιχτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) (αντ. (Β,Α)), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Παρατηρήσεις:

- *Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] τότε υπάρχουν* $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ *τέτοιοι ώστε* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
- *Ειδικότερα αν η f είναι επιπλέον γνησίως αύξουσα στο [α,β] είναι* $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ *δηλ.* $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha),f(\beta)]$, *ενώ αν είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β] είναι* $f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ *δηλ.* $f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]$.

Διαφορικός Λογισμός

Η έννοια της παραγώγου στο x_o

- Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι πραγματικός αριθμός.
- Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_o και συμβολίζεται $f'(x_o)$, δηλαδή:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad \text{ή} \qquad f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Αν το σημείο x_o είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o αν και μόνο αν υπάρχουν στο **R** τα όρια:

$$\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

και είναι ίσα.

Εξίσωση εφαπτομένης

- Έστω μια συνάρτηση f και $A(x_o,f(x_o))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, δηλ.: $y-y_o=\lambda(x-x_o)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$ είναι:

$$\mathbf{y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)}$$

Ο παράγωγος αριθμός $f'(x_o)$ (εφόσον υπάρχει) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της παραπάνω εφαπτομένης στο Α και την λέμε κλίση της f στο x_o.

Παρατηρήσεις:

- ✓ *Μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με αυτήν.*
- ✓ *Μια ικανή συνθήκη για να μην έχει η εφαπτομένη δεύτερο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη και με παράγωγο 1 – 1.*

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

<u>Απόδειξη:</u>

Για $x \neq x_o$ έχουμε: $f(x) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o) + f(x_o)$ ***. Επομένως:***

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o) + f(x_o)\right] = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\cdot \lim_{x\to x_o}(x - x_o) + f(x_o) =$$

$$= f'(x_o)\cdot 0 + f(x_o) = f(x_o).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_o.

__ Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, τότε δεν είναι υποχρεωτικό η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

__ Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, τότε η f δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_o.

Παραγωγίσιμη συνάρτηση

➢ Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α.

__ Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in A$.

__ Η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$.

__ Η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$ και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbf{R}.$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

__ $(c)' = 0$, c πραγματική σταθερά.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω f(x)=c. Τότε:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{c - c}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} 0 = 0$$

__ $(x)' = 1$, $x \in \mathbf{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω f(x)=x. Τότε:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{x - x_o}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} 1 = 1$$

__ $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, $x \in \mathbf{R}$, $\nu \in \mathbf{N} - \{0,1\}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $f(x)=x^{\nu}$. Τότε:

$$f'(x_o)= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x^{\nu}-x_o^{\nu}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{(x-x_o)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+\cdots+x_o^{\nu-1})}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+\cdots+x_o^{\nu-1}) = x_o^{\nu-1}+\cdots+x_o^{\nu-1} = \nu x_o^{\nu-1}$$

__ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0,+\infty)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Τότε:

$$f'(x_o)= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}{(x-x_o)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x-x_o}{(x-x_o)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)} = \lim_{x\to x_o} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

__ $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbf{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $f(x)=\eta\mu x$. Τότε:

$$f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu h-\eta\mu x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\sigma\upsilon\nu x\frac{\eta\mu h}{h}\right) = \eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$$

__ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$, $x \in \mathbf{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Τότε:

$f'(x)=$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1 = -\eta\mu x$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν η γωνία x του ημx και συνx είναι σε μοίρες τότε: $(ημx)' = \frac{\pi}{180}συνx$ *και*

$(συνx)' = -\frac{\pi}{180}ημx$

Κανόνες παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε:

__ $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$

<u>Απόδειξη:</u>

$$(f+g)'(x_o) = \lim_{x\to x_o}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right] = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)+g'(x_o)$$

__ $(fg)'(x_o)=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_o)$

__ $(cf)'(x_o)=cf'(x_o)$

__ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}$

__ $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, $\nu \in N^*$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε φυσικό $\nu \in N^*$. Επομένως, αν $\kappa \in Z-\{0,1\}$, τότε $(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$.

__ $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
c	0	e^x	e^x
x	1	lnx	$\dfrac{1}{x}$
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	α^x	$\alpha^x \ln\alpha$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_\alpha x$	$\dfrac{1}{x\ln\alpha}$
ημx	συνx	εφx	$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
συνx	-ημx	σφx	$-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\mathbf{(fog)'(x_o) = f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)}$.

__ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, με $\alpha \in$ **R-Z** και $x>0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $y=x^a=e^{a\ln x}$ και θέσουμε $u=a\ln x$, τότε είναι $y=e^u$. Έχουμε:

$$y'=(e^u)'=e^u u'=e^{a\ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

__ $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$ με $\alpha>0$ και $x \in$ **R**.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $y=a^x=e^{x\ln a}$ και θέσουμε $u=x\ln a$, τότε είναι $y=e^u$. Έχουμε:

$y'=(e^u)'=e^u u'=e^{x\ln a} \ln a = a^x \ln a$.

__ $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ με $x \in \mathbf{R}^*$

<u>Απόδειξη:</u>

Αν x>0 τότε: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Αν x<0 τότε: : $\ln|x| = \ln(-x)$, ***οπότε αν θέσουμε*** $y=\ln(-x)$ ***και*** $u=-x$ ***έχουμε*** $y=\ln u$.

Επομένως: $y' = (\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$.

Ρυθμός μεταβολής

- Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση f(x)=y, όταν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_o, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_o την παράγωγο $f'(x_o)$.

Ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος s ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o είναι η παράγωγος $s'(t_o)$ και λέγεται ταχύτητα $u(t_o)$. Επίσης ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά κοντά στο t_o όταν $u(t_o) \geq 0$, ενώ κινείται προς τα αριστερά όταν $u(t_o) \leq 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας u ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o είναι η παράγωγος $u'(t_o)$ και λέγεται επιτάχυνση $\alpha(t_o)$.

Είναι δηλ.: $u(t_o)=s'(t_o)$ και $\alpha(t_o)=u'(t_o)=s''(t_o)$.

Θεώρημα Rolle

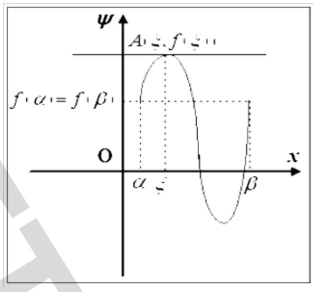
Αν μία συνάρτηση f είναι:

__ συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

__ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

__ f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=0$



<u>Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Rolle:</u> Γεωμετρικά το Θ. Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

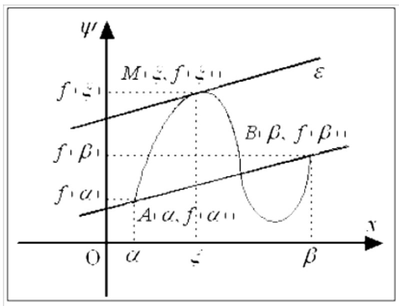
Αν μία συνάρτηση f είναι:

__ συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

__ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in$ (α,β) τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$



Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ.: Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ με $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Παρατηρήσεις:

- ✓ *Η πρώτη συνθήκη του Θ. Rolle και του Θ.Μ.Τ. μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη f συνεχής στα α και β αφού είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο (α,β).*
- ✓ *Δεδομένες τις δύο πρώτες συνθήκες των παραπάνω θεωρημάτων τα αντίστροφα αυτών δεν ισχύουν.*

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

- Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν:

__ η f είναι συνεχής στο Δ

__ $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η f είναι σταθερή σ' όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη:

Έστω x_1, $x_2 \in \Delta$.

__ Αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ δηλαδή η f είναι σταθερή.

__ Αν $x_1<x_2$ τότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1,x_2]$.

Επομένως υπάρχει $x_o \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Όμως $x_o \in (x_1,x_2)$ οπότε $f'(x_o) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$***, δηλαδή η f είναι σταθερή.***

__ Αν $x_1>x_2$ ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$, δηλαδή η f σταθερή.

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$, δηλαδή η f σταθερή.

- Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ. Αν:

__ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ

__ $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω f-g συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει: $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

Τότε η συνάρτηση f-g είναι σταθερή στο Δ, οπότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)+c$.

<u>Παρατήρηση:</u> *Τα παραπάνω ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.*

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.

__ Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

__ Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., επομένως υπάρχει $x_o \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f'(x_o)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1).$$

Όμως είναι: $\begin{cases} f'(x_o)>0 \\ x_2-x_1>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_o)(x_2-x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Δηλαδή για $x_1<x_2$ προκύπτει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Παρόμοια είναι και η απόδειξη στην περίπτωση της γνησίως φθίνουσας.

<u>Παρατηρήση:</u> *Αν μία συνεχής συνάρτηση f και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο Δ τότε $f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$) (εφόσον δεν υπάρχει υποδιάστημα του Δ στο οποίο η f να είναι σταθερή, δηλ. η f' μηδενίζεται σε διακεκριμένες θέσεις πεπερασμένου πλήθους ή μη).*

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

- Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

  $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A \cap (x_o-\delta, x_o+\delta)$

  Το x_o λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_o)$ τοπικό μέγιστο της f.

  Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_o)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο x_o **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο** το $f(x_o)$.

- Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_o) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_o-\delta, x_o+\delta)$$

Το x_o λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_o)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_o)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο x_o **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο** το $f(x_o)$.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

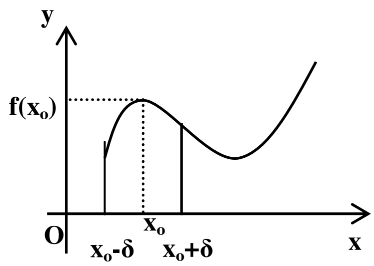
- ✓ *Μία σταθερή συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ έχει σε κάθε σημείο του Δ τοπικό και ολικό ελάχιστο και μέγιστο.*
- ✓ *Κάθε ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι και τοπικό μέγιστο (ελάχιστο). Το αντίστροφο δεν ισχύει.*
- ✓ *Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο).*
- ✓ *Το μεγαλύτερο (μικρότερο) από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα ανοιχτό διάστημα δεν είναι πάντα ολικό μέγιστο (ελάχιστο).*
- ✓ *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα, τότε το μεγαλύτερο (μικρότερο) από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) είναι ολικό μέγιστο (ελάχιστο).*
- ✓ *Αν μία συνάρτηση συνεχής σε ανοιχτό διάστημα είναι γνησίως μονότονη τότε δεν έχει τοπικά ακρότατα.*
- ✓ *Αν μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ (το Δ δεν είναι ένωση διαστημάτων) δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε είναι γνησίως μονότονη.*
- ✓ *Αν μία συνεχής συνάρτηση σε ανοιχτό διάστημα έχει μοναδικό τοπικό ακρότατο τότε είναι ολικό.*

Θεώρημα Fermat

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_o)=0$.

Απόδειξη:

Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε:



$(x_o-\delta,x_o+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_o)$ για κάθε $x\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

__ ***Αν $x\in(x_o-\delta,x_o)$ τότε:*** $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\geq 0$ ***, οπότε*** $f'(x_o)=\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\geq 0$ ***(1)***

__ ***Αν $x\in(x_o,x_o+\delta)$ τότε:*** $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\leq 0$ ***, οπότε*** $f'(x_o)=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\leq 0$ ***(2)***

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x_o)=0$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο.

Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων

Από το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

__ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται (στάσιμα σημεία),

__ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται (γωνιακά σημεία),

__ τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται ή δεν παραγωγίζεται (δηλ. τα στάσιμα και τα γωνιακά σημεία) λέγονται κρίσιμα σημεία.

<u>Κριτήριο πρώτης παραγώγου:</u>

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). (Σχ. 35γ).

<u>Απόδειξη:</u>

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι

ii) γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$

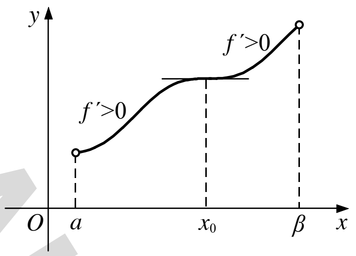
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

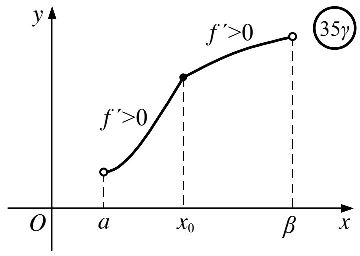
$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Κυρτότητα συνάρτησης

- Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ θα λέμε ότι:

  __ Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

  __ Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

__ Αν f''(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

__ Αν f''(x)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω (αντιστοίχως πάνω) από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

- ✓ *Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) και δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) τότε $f''(x)\geq 0$ ($f''(x)\leq 0$) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.*

Σημεία καμπής συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν:

__ η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως

και

__ η c_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$

τότε το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και λέμε ότι η f παρουσιάζει **καμπή** στο x_o.

Προσδιορισμός σημείων καμπής

Αν το $A(x_o,f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της c_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_o)=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

__ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται,

__ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Αν μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_o\in(\alpha,\beta)$ και:

__ η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o και

__ ορίζεται η εφαπτομένη της c_f στο $A(x_o,f(x_o))$,

τότε το $A(x_o,f(x_o))$ είναι σημείο καμπής.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Τα σημεία καμπής είναι μόνο σε εσωτερικά σημεία διαστημάτων του πεδίου ορισμού.*
- ✓ *Αν το $(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f τότε η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα που περιέχει το x_o και η f' διατηρεί διαφορετικό είδος μονοτονίας εκατέρωθεν του x_o στο διάστημα αυτό.*
- ✓ *Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη.*

Ασύμπτωτες συνάρτησης

- ➢ Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $\pm\infty$, τότε η ευθεία $x=x_o$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της c_f.
- ➢ Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbf{R}$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της c_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).
- ➢ Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$), τότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της c_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Παρατήρηση: *Η διαφορά $f(x) - (\lambda x+\beta)$ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση στη θέση x των συναρτήσεων $f(x)$ και $y=\lambda x+\beta$.*

Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της c_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right], \quad \lambda,\beta\in\mathbf{R}$$

αντιστοίχως

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right], \quad \lambda,\beta\in\mathbf{R}$$

Παρατήρηση: *Στην περίπτωση που $\lambda=0$ έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη.*

Συμπεράσματα ορισμών των ασύμπτωτων

__ Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

__ Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

__ Ασύμπωτες μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής,
- στο $\pm\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

Κανόνες de L' Hospital

Αν για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g κοντά στο x_o ισχύει $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$ και $\lim_{x\to x_o} g(x)=0$ (ή $\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty$ και $\lim_{x\to x_o} g(x)=\pm\infty$), $x_o\in\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_o}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρατηρήσεις:

- ✓ *Στον παραπάνω κανόνα οι f,g είναι παραγωγίσιμες με $g'(x)\neq 0$ κοντά στο x_o. Οι f,g μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμες ή και να μην ορίζονται στο x_o όταν $x_o\in\mathbf{R}$.*
- ✓ *Το θεώρημα de L' Hospital ισχύει και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να το εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.*

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα συνάρτηση

- Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in Δ$.

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε:

__ όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in \mathbf{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ,

__ κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in \mathbf{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ αφού: $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in Δ$.

Έστω G μία παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in Δ$ ισχύουν:

$$\begin{cases} F'(x)=f(x) \\ G'(x)=f(x) \end{cases} \Rightarrow F'(x)=G'(x) \Rightarrow G(x)=F(x)+c \text{, για κάθε } x\in Δ.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$. Με τα σημεία $α=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_ν=β$ χωρίζουμε το $[α,β]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $Δx=\frac{β-α}{ν}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $ξ_κ\in[x_{κ-1},x_κ]$, για κάθε $κ\in\{1,2,\ldots,ν\}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_ν=\sum_{κ=1}^{ν} f(ξ_κ)Δx$. Το όριο $\lim_{ν\to\infty} S_ν$ ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το α στο β** και συμβολίζεται: $\int_α^β f(x)dx=\lim_{ν\to\infty} S_ν$.

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο Δ με $α,β,γ\in Δ$ με $α<γ<β$ και $λ,μ\in\mathbf{R}$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

__ $\int_α^β f(x)dx=-\int_β^α f(x)dx$

__ $\int_α^α f(x)dx=0$

__ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

__ $\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

__ $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

__ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

__ Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

__ Αν $f(x) \geq 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β] τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

__ $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$ για οποιοδήποτε $c \in \mathbf{R}$.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u>

- ✓ *Ισχύει:* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$.
- ✓ *Η έκφραση: «αν $f(x) \geq 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β]» ισοδυναμεί με την έκφραση: «υπάρχει $\kappa \in [\alpha,\beta]$ με $f(\kappa)>0$».*
- ✓ *Αν c>0 τότε το* $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ *εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση (β-α) και ύψος c.*

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Αν f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in \Delta$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή ισχύει:

$$F'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Σχόλια:

- Αν Ε(Ω) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x από x έως x+h με h>0 τότε το συμπέρασμα των παραπάνω προκύπτει ως εξής:

  $F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt = E(\Omega) \approx f(x)\cdot h$ για μικρά h>0 οπότε $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$.

  Άρα: $F'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

- Γενικότερα ισχύει: $F'(x)=\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right)' =f(g(x))g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

<u>Παρατήρηση:</u> Η ανεξάρτητη μεταβλητή της F είναι η $x\in\Delta$, ενώ η μεταβλητή t είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης η οποία βρίσκεται πάντα στο διάστημα [α,x] ή [x,α]. Τα α και x τα παίρνουμε πάντα στο ίδιο διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx =G(\beta)-G(\alpha)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ μία παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει $c\in R$ τέτοιο ώστε:

$$G(x)=F(x)+c \qquad (1)$$

Για x=α η (1) γράφεται: $G(a)=F(a)+c=\int_{a}^{a} f(t)dt +c=0+c=c \Rightarrow c=G(a)$.

Άρα:

$$G(x)=F(x)+G(a) \qquad (2)$$

Για x=β η (2) γράφεται: $G(\beta)=F(\beta)+G(a) \Rightarrow F(\beta)=G(\beta) - G(a) \Rightarrow \int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(a)$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω δύο συναρτήσεις f,g συνεχείς στο [α,β] και f΄, g΄ συνεχείς στο [α,β]. Τότε:

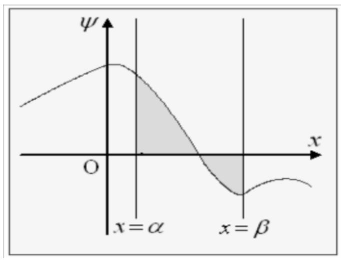
__ Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx$

__ Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου u=g(x) και du=g΄(x)dx, u_1=g(α), u_2=g(β).

<u>Παρατήρηση:</u> Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής ισχύει όταν η συνάρτηση g είναι 1 – 1 στο διάστημα [α,β].

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α,β] και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι $\boldsymbol{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$



Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα [α,β] με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α και x=β (Σχ. α).

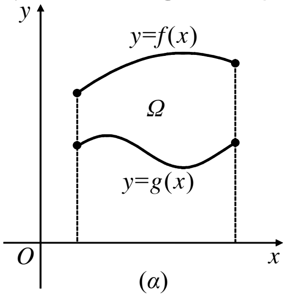
Παρατηρούμε ότι $\mathbf{E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

Επομένως, $\boldsymbol{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$ (1)

Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και

(ii) οι f και g είναι μη αρνητικές στο [α,β] .



(α)

Ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii).

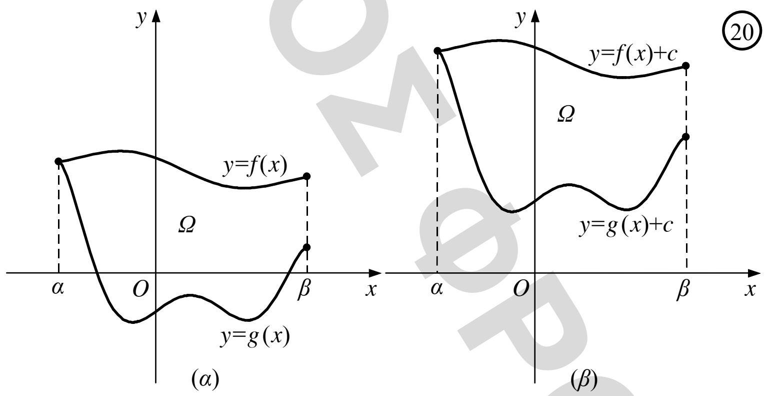
<u>Απόδειξη:</u>

Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[a,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_a^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_a^\beta(f(x)-g(x))dx\ .$$

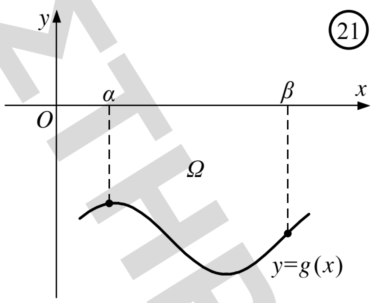
Άρα, $E(\Omega)=\int_a^\beta(f(x)-g(x))dx$



Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x'x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ και τις ευθείες x=α και x=β (Σχ. 21).

Πράγματι, επειδή ο άξονας x'x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

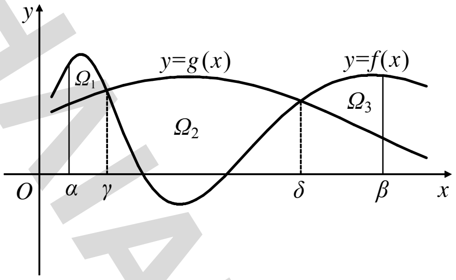
$$E(\Omega)=\int_a^\beta(f(x)-g(x))dx=\int_a^\beta[-g(x)]dx=-\int_a^\beta g(x)dx$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε

$$E(\Omega)=-\int_a^\beta g(x)dx$$

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α και x=β είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $\mathbf{\Omega_1}$, $\mathbf{\Omega_2}$ και $\mathbf{\Omega_3}$. Δηλαδή,



$$\mathbf{E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)}$$

$$= \int_\alpha^\gamma (f(x) - g(x))dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_\alpha^\gamma |f(x) - g(x)|dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)|dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

$$= \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

Επομένως, $\boldsymbol{E(\Omega) = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx}$

<u>Σχόλιο:</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx}$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x’x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x’x