ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Συναρτήσεις

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr www.iliaskos.gr

2. Συναρτήσεις

2.1 Η έννοια της Συνάρτησης

Ορισμός

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και τιμές στο Β ονομάζεται κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του Α στο Β.

Η έκφραση του Α σημαίνει όλου του Α, δηλαδή κάθε $x \in A$ να έχει τιμή $y \in B$. Η λέξη μονοσήμαντη σημαίνει ότι σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ένα μόνο $y \in B$. Η συνάρτηση συμβολίζεται $f: A \to B$.

Οι τιμές που ανήκουν στο σύνολο Α αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που συμβολίζεται με D_f ή A_f. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$. Το σύνολο τιμών είναι υποσύνολο του συνόλου Β, $f(A) \subseteq B$.

Το γράμμα x, στοιχείο του Α, θα λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα $y = f(x)$, στοιχείο του Β, θα λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Μια συνάρτηση f είναι πλήρως ορισμένη, όταν μας δίνεται ο τύπος της $f(x)$ και ξέρουμε το πεδίο ορισμού της.

Προσοχή! Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α μπορεί να έχει μία μόνο τιμή $f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in A$. Επομένως κάθε κάθετη γραμμή στη γραφική παράσταση της f θα πρέπει να την τέμνει το πολύ σ΄ ένα σημείο.

π.χ. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν αποτελεί συνάρτηση. Ωστόσο το σχήμα του προηγούμενου κύκλου περιλαμβάνει τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από τον x'x και ορίζεται από την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και το ημικύκλιο που βρίσκεται κάτω από τον x'x και ορίζεται από τη συνάρτηση $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Κανόνες εύρεσης Πεδίου Ορισμού

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θα είναι όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν ο τύπος της f έχει κλάσμα. Το πεδίο ορισμού θα είναι το $\mathbb{R}$ εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
- Όταν ο τύπος της f έχει ρίζα μιας παράστασης $\varphi(x)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι οι τιμές του x που κάνουν το υπόρριζο μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός ($\varphi(x) \geqslant 0$).

- Όταν ο τύπος της f έχει λογάριθμο μιας παράστασης $\varphi(x)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι οι τιμές του x που κάνουν την υπό λογαρίθμιση ποσότητα μεγαλύτερη του μηδενός ($\varphi(x) > 0$).
- Όταν ο τύπος της f έχει εφαπτομένη μιας παράστασης $\varphi(x)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\varphi(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Όταν ο τύπος της f έχει συνεφαπτομένη μιας παράστασης $\varphi(x)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\varphi(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Προσοχή! Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το βρίσκουμε πάντοτε πριν κάνουμε την οποιαδήποτε πράξη ή απλοποίηση στον τύπο της συνάρτησης.

Εύρεση συνόλου τιμών

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, μόλις βρούμε το πεδίο ορισμού της A, θα θέτουμε $f(x) = y$ και θα λύνουμε ως προς x. Σε αυτή τη διαδικασία εύρεσης του x θα βάζουμε, όπου χρειάζεται, ανάλογους περιορισμούς στο y. Αυτοί οι περιορισμοί θα αποτελέσουν το σύνολο τιμών της f, $f(A)$.

2.2 Συμμετρίες

Άρτια

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι άρτια όταν έχει συμμετρικό πεδίο ορισμού και ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι άρτια, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Περιττή

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι περιττή όταν έχει συμμετρικό πεδίο ορισμού και ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι περιττή, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

Περιοδική

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι περιοδική με περίοδο T, όταν το T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $f(x + nT) = f(x)$, με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ για κάθε $x \in A$.

2.3 Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Αν οι δύο συναρτήσεις f και g έχουν πεδία ορισμού Α και Β διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά ορίζεται η τομή των δύο συνόλων $\Gamma = A \cap B$, τότε εξετάζουμε την ισότητα των δύο συναρτήσεων στο σύνολο Γ.

Πράξεις δύο συναρτήσεων

Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Αν $\Gamma = A \cap B \neq \emptyset$ ορίζονται οι εξής συναρτήσεις:

- Άθροισμα $f + g$.
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ με πεδίο ορισμού το Γ.
- Διαφορά $f - g$.
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ με πεδίο ορισμού το Γ.
- Γινόμενο $f \cdot g$.
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ με πεδίο ορισμού το Γ.
- Πηλίκο $\dfrac{f}{g}$.
  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ με πεδίο ορισμού το Γ εκτός των τιμών του $x \in \Gamma$ που κάνουν την $g(x) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x'x θα λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον y'y, θα βρίσκουμε την τιμή της f για $x = 0$, δηλαδή θα βρίσκουμε το $f(0)$.
- Η γραφικής παράστασης της f βρίσκεται πάνω από τον x'x, όταν $f(x) > 0$.
- Η γραφικής παράστασης της f βρίσκεται κάτω από τον x'x, όταν $f(x) < 0$.
- Για να βρούμε αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω ή κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, θα βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$.
  - Αν η διαφορά είναι θετική, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

- Αν η διαφορά είναι αρνητική, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g.
- Αν η διαφορά είναι ίση με μηδέν, η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της g.

2.4 Σύνθεση Συναρτήσεων

Ορισμός

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της g με την f και την συμβολίζουμε $f \circ g$, τη συνάρτηση με τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Το πεδίο ορισμού της θα είναι το σύνολο $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\}$.

Όμοια ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και την συμβολίζουμε $g \circ f$ τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της θα είναι το σύνολο $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\}$.

Μεθοδολογίες

i. Όταν μας δίνουν μια σύνθεση και μας ζητάνε να βρούμε τις συναρτήσεις από τις οποίες αποτελείται η σύνθεση, θα σκεφτόμαστε τη σειρά την οποία θα ακολουθούσαμε για να κάνουμε τις πράξεις αν μας ζητούσαν να υπολογίσουμε την αριθμητική της τιμή για μια συγκεκριμένη τιμή του x.

π.χ. Για τη συνάρτηση $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την αριθμητική της τιμή αν υπολογίσουμε την τιμή της $1 - x^2$ και μετά υπολογίσουμε την τετραγωνική της ρίζα. Επομένως η συνάρτηση $h(x)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $f(x) = 1 - x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$, δηλαδή $h(x) = g(f(x))$.

ii. Όταν θέλουμε να βρούμε την σύνθεση της g με την f, δηλαδή την $f \circ g$, θα βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της και μετά θα θέτουμε στον τύπο της f όπου x το $g(x)$ για να βρούμε τον τύπο της.

iii. Όταν θέλουμε να βρούμε την σύνθεση της f με την g, δηλαδή την $g \circ f$, θα βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της και μετά θα θέτουμε στον τύπο της g όπου x το $f(x)$ για να βρούμε τον τύπο της.

Προσοχή! Είναι λάθος να βρούμε πρώτα τον τύπο της σύνθεσης και μετά το πεδίο ορισμού από τον τύπο της σύνθεσης γιατί μπορεί να χάσουμε κάποιους περιορισμούς.

Συναρτησιακές σχέσεις

i. Όταν σε άσκηση μας δίνουν τη σύνθεση $f(g(x))$, τον τύπο της $g(x)$ και μας ζητάν να βρούμε τον τύπο της $f(x)$ τότε:

α. θέτουμε $y = g(x)$
β. λύνουμε ως προς x
γ. αντικαθιστούμε στη σύνθεση.
Οπότε προκύπτει η συνάρτηση $f(y)$ η οποία μετά από αντικατάσταση του y από το x μας δίνει τον τύπο της $f(x)$.

ii. Όταν σε άσκηση μας δίνουν τη σύνθεση $f(g(x))$, τον τύπο της $f(x)$ και μας ζητάν να βρούμε τον τύπο της $g(x)$ τότε αντικαθιστούμε στον τύπο της $f(x)$ τη $g(x)$. Οπότε προκύπτει ένας δεύτερος τύπος για τη σύνθεση $f(g(x))$. Εξισώνουμε τους δύο τύπους και προκύπτει μια εξίσωση που περιέχει μόνο $g(x)$. Λύνοντας αυτή την εξίσωση ως προς $g(x)$ παίρνουμε τον τύπο της συνάρτησης που ψάχνουμε.

iii. Όταν σε άσκηση μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, της μορφής $\kappa f(x) + \lambda f(g(x)) = \mu$, η οποία ισχύει για κάθε $x \in A$ και μας ζητούν τον τύπο της συνάρτησης f, θα θέτουμε στη σχέση όπου x το $g(x)$. Έτσι θα προκύπτει μια νέα σχέση που θα έχει πάλι ως αγνώστους τα $f(x)$ και $f(g(x))$, οπότε θα λύνουμε το σύστημα για να βρούμε την $f(x)$. Τα κ και λ μπορεί να είναι συναρτήσεις του x.

Προσοχή! Η παραπάνω μεθοδολογία ισχύει όταν η συνάρτηση $g(x)$ είναι κυκλική (δηλαδή η σύνθεση της g με τον εαυτό της να ισούται με x, $g(g(x)) = x$). Συνηθισμένες κυκλικές συναρτήσεις είναι η $g(x) = \alpha - x$, η $g(x) = \frac{\alpha}{x}$ και η $g(x) = \frac{x}{x-1}$.

Προσοχή! Η παραπάνω μεθοδολογία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν $\kappa = \lambda$.

iv. Αν η συναρτησιακή σχέση είναι της μορφής $\kappa f(g(x)) + \lambda f(h(x)) = \mu$ τότε πρώτα θα θέτουμε $y = g(x)$ και μετά θα λύνουμε ως προς x. Έπειτα θα αντικαθιστούμε το x στην συναρτησιακή σχέση. Με αυτόν τον τρόπο θα δημιουργηθεί μια καινούργια συναρτησιακή σχέση της μορφής $\kappa f(y) + \lambda f(\varphi(y)) = \mu$ οπότε χρησιμοποιούμε την προηγούμενη μεθοδολογία για να βρούμε τον τύπο της f.

Προσοχή! Η συνάρτηση $\varphi(y)$ που θα προκύψει πρέπει να είναι κυκλική.

2.5 Μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ πάνω σε σύστημα αξόνων

Κατακόρυφη μετατόπιση

Για να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ κατακόρυφα προς τα πάνω πρέπει να προσθέσουμε ένα σταθερό θετικό αριθμό στο δεξί μέλος της εξίσωσης $y = f(x)$.

$y = f(x) + \kappa$, $\kappa > 0$ μετατοπίζεται η γραφική παράσταση της f κατακόρυφα προς τα πάνω κ μονάδες.

Για να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ κατακόρυφα προς τα κάτω πρέπει να προσθέσουμε ένα σταθερό αρνητικό αριθμό στο δεξί μέλος της εξίσωσης $y = f(x)$.

$y = f(x) + \kappa$, $\kappa < 0$ μετατοπίζεται η γραφική παράσταση της f κατακόρυφα προς τα κάτω $|\kappa|$ μονάδες.

Οριζόντια μετατόπιση

Για να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ οριζόντια προς τα δεξιά πρέπει να προσθέσουμε ένα σταθερό αρνητικό αριθμό στο x.

$y = f(x + h)$, $h < 0$ μετατοπίζεται η γραφική παράσταση της f οριζόντια προς τα δεξιά $|h|$ μονάδες.

Για να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ οριζόντια προς τα αριστερά πρέπει να προσθέσουμε ένα σταθερό θετικό αριθμό στο x.

$y = f(x + h)$, $h > 0$ μετατοπίζεται η γραφική παράσταση της f οριζόντια προς τα αριστερά h μονάδες.

2.6 Μονοτονία - Ακρότατα

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το Α και ένα διάστημα Δ υποσύνολο του Α. Θα λέμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ($f \uparrow \Delta$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ ($f \downarrow \Delta$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$.
- Η f είναι αύξουσα στο Δ ($f \uparrow \Delta$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- Η f είναι φθίνουσα στο Δ ($f \downarrow \Delta$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ, θα λέμε ότι είναι γνησίως μονότονη ενώ αν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ, θα λέμε ότι είναι μονότονη.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα της f.

Παρατηρήσεις

- Ο έλεγχος της μονοτονίας μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια του λόγου μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Συγκεκριμένα η συνάρτηση f στο διάστημα Δ είναι
  - γνησίως αύξουσα, αν $\lambda > 0$
  - γνησίως φθίνουσα, αν $\lambda < 0$
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι (γνησίως) μονότονες της ίδιας μονοτονίας, τότε και η $f + g$ είναι (γνησίως) μονότονη με την ίδια μονοτονία.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και (γνησίως) αύξουσες, τότε και η $f \cdot g$ είναι θετική (γνησίως) αύξουσα.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και (γνησίως) φθίνουσες, τότε και η $f \cdot g$ είναι θετική (γνησίως) φθίνουσα.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι αρνητικές και (γνησίως) αύξουσες, τότε και η $f \cdot g$ είναι θετική (γνησίως) φθίνουσα.
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι αρνητικές και (γνησίως) φθίνουσες, τότε και η $f \cdot g$ είναι θετική (γνησίως) αύξουσα.
- Αν η f είναι θετική (γνησίως) αύξουσα και η g αρνητική (γνησίως) φθίνουσα, τότε και η $f \cdot g$ είναι αρνητική (γνησίως) φθίνουσα.
- Αν η f είναι θετική (γνησίως) φθίνουσα και η g αρνητική (γνησίως) αύξουσα, τότε και η $f \cdot g$ είναι αρνητική (γνησίως) αύξουσα.
- Αν f, g είναι (γνησίως) μονότονες με την ίδια μονοτονία, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι (γνησίως) αύξουσα.
- Αν f, g είναι (γνησίως) μονότονες με διαφορετική μονοτονία, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι (γνησίως) φθίνουσα.

2.7 Συνάρτηση "1-1"

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το Α θα λέγεται ένα προς ένα ("1-1") αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Πόρισμα

Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το Α θα λέγεται ένα προς ένα ("1-1") αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $x_1 = x_2$.

Παρατηρήσεις

- Για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μια μόνο λύση $x_0 \in A$.
- Μια τυχαία οριζόντια ευθεία, $y = y_0$, τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα το πολύ σημείο.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και "1-1". Δεν ισχύει όμως πάντα το αντίστροφο. Αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" και συνεχής τότε είναι γνησίως μονότονη.
- Αν f, g είναι συναρτήσεις "1-1", τότε και η $g \circ f$ είναι "1-1".
- Αν η $g \circ f$ είναι συνάρτηση "1-1", τότε και η f είναι "1-1".

Μεθοδολογίες

i. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι "1-1", θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

ii. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι "1-1" προσπαθούμε να εντοπίσουμε, συνήθως με παρατήρηση, ή βρίσκοντας τις ρίζες της συνάρτησης, ή αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

2.8 Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α είναι συνάρτηση "1-1" τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η οποία απεικονίζει το $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Παρατηρήσεις

- $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
- $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in A$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, την ευθεία $y = x$. Επομένως αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνο-

νται και η f είναι γνησίως αύξουσα, θα τέμνονται πάνω στην ευθεία y = x.

- Αν το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $N(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}, δηλαδή $f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha$.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Μεθοδολογίες

i. Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f, αφού βρούμε το πεδίο ορισμού της f, θα δείχνουμε ότι είναι "1-1". Κατόπιν θα θέτουμε $f(x)=y$ και θα λύνουμε ως προς x, όπως ακριβώς κάνουμε στην εύρεση του συνόλου τιμών, εξασφαλίζοντας ότι υπάρχει μία μόνο λύση για το x. Στον τύπο που θα δίνει το x, η μοναδική λύση που βρήκαμε, θα θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το x. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ θα είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$.

ii. Όταν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής, ή τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x$ ή την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$.

iii. Σε συναρτησιακές σχέσεις, αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, συνήθως θέτουμε στη θέση του x το $f^{-1}(x)$, με $x \in f(A)$ και έτσι προκύπτουν σχέσεις που περιέχουν την $f^{-1}(x)$.

2.9 Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Πότε μια συνάρτηση f είναι άρτια και πότε περιττή;
2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;
3. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ΄ένα διάστημα Δ;
4. Πότε μια συνάρτηση f είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα σ΄ένα διάστημα Δ;
5. Πότε η συνάρτηση f έχει στο σημείο $x_0 \in A$, ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;
6. Πότε η ορισμένη στο Α συνάρτηση f λέγεται "1 - 1";
7. Τι ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f;
8. Έστω η συνάρτηση f που έχει αντίστροφη την f^{-1}. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου.

2.10 Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Η διαδικασία f, με την οποία κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο ενός συνόλου Α, είναι συνάρτηση από το Α στο $\mathbb{R}$ και συμβολίζεται $f: A \to \mathbb{R}$.
2. Αν το 2 είναι ρίζα της f, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x στο $A(2,0)$.
3. Το σημείο $A(2,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f όταν $f(2) = 1$.
4. Η ευθεία $y = 2$ δεν μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία.
5. Η ευθεία $x = 3$ μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία.
6. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x'x.
7. Αν ορίζεται το άθροισμα $f + g$ δύο συναρτήσεων f και g, τότε οι f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
8. Αν $f(x) < f(0)$ για κάθε $x < 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x < 0$.
9. Αν η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 1$, τότε και $f(2009) = 2009$.
10. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η ευθεία $\varepsilon: y = 2009$ αποκλείεται να τέμνει την γραφική παράσταση της f σε περισσότερα από ένα σημεία.
11. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $(-1,1)$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.
12. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, τότε και η συνάρτηση g, με $g(x) = f^2(x), x \in A$ παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο.
13. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και η σύνθεση $f \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
14. Το σύνολο τιμών της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι το $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.
15. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$, δεν θα έχει ακρότατα.
16. Αν μια μη σταθερή συνάρτηση έχει ακρότατα τότε το μέγιστό της είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστό της.
17. Αν μια συνάρτηση f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες τότε δεν είναι "1 - 1".
18. Αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη την f^{-1}, τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

19. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η σύνθεση $f \circ g$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, τότε και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
20. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη την f^{-1}, τότε η f^{-1} έχει αντίστροφη την f.
21. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
22. Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.
23. Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}^{+}$, τότε η f δεν είναι ρητή, δηλαδή πηλίκο πολυωνυμικών συναρτήσεων.

2.11 Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.
   α. $f(x) = x^2 + 2x - 5$.
   β. $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$.
   γ. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$.
   δ. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2\sigma\upsilon\nu x - 1}$.
   ε. $f(x) = \dfrac{x + 3}{2 - \dfrac{1}{x}}$.
   στ. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{1}{x - 4}$.
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.
   α. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.
   β. $f(x) = \dfrac{3x}{2\eta\mu x - \sqrt{2}}$.
   γ. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2} + \dfrac{3}{x - 1}$.
   δ. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} + \dfrac{x^2 - 3}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$.
   ε. $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$.
   στ. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{|x + 1| + 3}$.
3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.
   α. $f(x) = \sqrt{3 - x}$.
   β. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$.

γ. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

δ. $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$.

ε. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$.

στ. $f(x)=\sqrt{2x^2-1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$.

β. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x-2}}$.

γ. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{1-x}}$.

δ. $f(x)=\sqrt[3]{-x^3+4x}$.

ε. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$.

στ. $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+6x-8}$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x)=\ln(4-x)$.

β. $f(x)=\ln(x^2-1)$.

γ. $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$.

δ. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{3-x}}$.

ε. $f(x)=\sqrt{2\ln^2 x+\ln x}$.

στ. $f(x)=\varepsilon\varphi(x-\pi)$.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

β. $f(x)=\sqrt{\ln\sqrt{\ln x}}$.

γ. $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x+5}}{(\ln x-2)(\ln x-1)}$.

δ. $f(x)=\sigma\varphi\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

ε. $f(x)=\dfrac{2}{\varepsilon\varphi^2 x-3}$.

στ. $f(x)=\begin{cases} x^3+2, & x\in[-1,5) \\ 3x+7, & x\in[5,6) \\ \sqrt{x^2+1}, & x\in(10,20) \end{cases}$.

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \ln(4x - x^2)$.

β. $f(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 4x}$.

γ. $f(x) = \dfrac{2}{x(x^2 - 9)}$.

δ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}}{x-3}$.

ε. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-2} - 3}$.

στ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2} + \sqrt{20-x}}{\sqrt{x-1} - 2}$.

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{5x - x^2}}{x-1}$.

β. $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x-1}}{2-x}$.

γ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{6x - x^2}}{x^2 - 5x + 4}$.

δ. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6|x| + 5}$.

ε. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{(|x| - 3)\sqrt{|x| - 2}}$.

στ. $f(x) = \sqrt{\ln\dfrac{1-2x}{x+3}}$.

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \ln(\lambda x^2 + \lambda x + \lambda - 1)$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

β. $f(x) = 1 + 4x - x^2$.

γ. $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$.

δ. $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x-1}$.

ε. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

στ. $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$.

11. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$.

β. $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$.

γ. $f(x) = 2 + \sqrt{e^{x+1} - e^2}$.

δ. $f(x) = \sqrt{2 + \sigma\upsilon\nu x}$.

ε. $f(x) = 6\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu 2x + 1$.

στ. $f(x) = \dfrac{2 + e^x}{1 - e^x}$.

12. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = |x + 1| + |x - 5| - 2x + 12$.

β. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{|x + 2| + 1}$.

γ. $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)$.

δ. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leqslant 2 \\ \ln(x - 1), & x > 2 \end{cases}$.

ε. $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x < 1 \\ \ln|x - 2|, & x \geqslant 3 \end{cases}$.

στ. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leqslant 2 \\ e^{x-2}, & x > 2 \end{cases}$.

13. Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $M(\kappa, \kappa - 6)$ να είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x$.

14. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = \ln x - 1$ και $h(x) = |x + 1| - 1$. Να βρεθούν:

α. Τα σημεία στα οποία η γραφική τους παράσταση τέμνει τους άξονες.

β. Τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική τους παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

γ. Τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική τους παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

15. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

16. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{2x}$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 5e^x - 6$.

17. Αν ισχύει $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy.

18. Αν για τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x - 1)$ για κάθε $x \in A$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)$ δεν τέμνει τον άξονα x'x.

19. Αν ισχύει $f(x) = g(x) + \ln x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ποια είναι η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$.

20. Αν ισχύει $2f^2(x) + g^2(x) \leqslant 2(f \cdot g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$.

21. Αν ισχύει $f^3(x) - f^2(x) + 2f(x) = x^2 - x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)$ είναι πάνω από τον $x'x$.

22. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις.

α. $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

β. $f(x) = \eta\mu(x^3 - 5\eta\mu x + x)$.

γ. $f(x) = |x - 3| + |x + 3| + 3$.

δ. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

ε. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

23. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιττές, να εξεταστούν η $(f + g)(x)$ και η $(f \cdot g)(x)$ ως προς τη συμμετρία τους.

24. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $(g \circ f)(x)$ είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και περιττές, να δειχθεί ότι και η $g(x)$ είναι περιττή.

25. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g είναι περιττή, να δειχθεί ότι οι συνθέσεις $f \circ g$, $g \circ f$ είναι άρτιες.

26. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιττές, να δειχθεί ότι οι συνθέσεις $f \circ g$, $g \circ f$ είναι περιττές.

27. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $f(0) = 0$.

β. η f είναι περιττή συνάρτηση.

28. Έστω η μη μηδενική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $f(0) = 1$.

β. η f είναι άρτια συνάρτηση.

29. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 3 + |2x - 4|$.

β. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \geqslant 0 \\ 3x + 1, & x < 0 \end{cases}$.

γ. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & x < -1 \\ 2x + 3, & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x^2, & x > 2 \end{cases}$.

30. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:
α. $f(x)=\ln(e^2x)$.
β. $f(x)=\dfrac{1-2x}{x}$.
γ. $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$.
δ. $f(x)=2+\sqrt{x-3}$.
ε. $f(x)=|\ln(x+1)|-1$.
στ. $f(x)=-e^{x+2}-1$.
ζ. $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$.

31. Να εξεταστεί η ισότητα των παρακάτω συναρτήσεων. Αν οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.
α. $f(x)=x-1$ και $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$.
β. $f(x)=2x-3$ και $g(x)=(\sqrt{2x-3})^2$.
γ. $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ και $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$.
δ. $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ και $g(x)=\sqrt{x}+2$.
ε. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-1$ και $g(x)=\dfrac{x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}$.
στ. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.
ζ. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$.

32. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2\lambda^2x+\lambda}{x+1-\lambda}$ και $g(x)=\dfrac{(3\lambda-1)x+\lambda}{x+\lambda}$ είναι ίσες.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f^2+g^2)(x)\leqslant 2(f+g)(x)-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$.

34. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f+g)^2(x)-(f-g)^2(x)-4x^2\geqslant 2(f+g)(x)[(f+g)(x)-2x]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ και $g(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\geqslant 2\\ 2x-1, & x<2\end{cases}$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

37. Να εκφραστεί η $f(x)$ σαν σύνθεση άλλων συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}$.

β. $f(x)=3(x^3+3x-1)^4$.

γ. $f(x)=\eta\mu^4(x+5)$.

δ. $f(x)=\dfrac{3}{\ln(\sigma\upsilon\nu(x^3+1)+2)}$.

ε. $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\ln(1+x^2))$.

38. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ και $g\circ g$.

39. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+2}$ και $g(x)=\dfrac{2x-1}{2-3x}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ και $g\circ g$.

40. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-4}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ και $g\circ g$.

41. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\ln x$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ και $g\circ g$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-3$ και η συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει $f(e^{g(x)})=2x^3+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $g(x)$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και η συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει $f(g(x))=|\sigma\upsilon\nu x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $g(x)$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x+2$ και η συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει $f(g(x))=2x-\eta\mu x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $g(x)$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+2$ και η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(\ln(g(x)))=x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=3x+2$ και η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(g(x))=2x-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=-x^2+1$ και η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(g(x))=\sqrt{5+2x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(0)$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=x^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x^5)=f^5(x)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(1-x)-3f(x)=x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $3f(-x)+2f(x)=5\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $2f(-x)-4f(x)=e^{-x}-e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(x)+f(2-x)=3x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $3f(x)-x^2f(2-x)=3-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(x)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(1-x)+(1-x)f(x)+x-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

57. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+f(1-x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=3x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
   α. $f(3x-2)=3f(x)-2$.
   β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει την ευθεία $y=1$.

59. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)-f(y)\leqslant x-y$. Να αποδείξετε ότι:
   α. $f(x)\leqslant x+f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   β. $f(x)=x+f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

60. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:
   α. $f(x)=3\sqrt{x-2}+6$.
   β. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x$.
   γ. $f(x)=\frac{1}{x^3}+3$.
   δ. $f(x)=|4x-5|+12$.
   ε. $f(x)=\begin{cases}5x+12, & x\leqslant 2\\ -3x+7, & x>2\end{cases}$.

61. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο σύνολο A και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f-g$.

62. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

63. α. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

β. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε να δειχθεί ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta > \alpha^2 - \beta^2$$

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x^5 + 1$.

α. Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λυθεί η ανίσωση $(3x - 4)^7 + (3x - 4)^5 > 2$.

65. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

β. Να αποδείξετε ότι η $f \uparrow (0, +\infty)$.

γ. Να μελετήσετε τη σχετική θέση της C_f ως προς τον άξονα x'x.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x - \frac{1}{x^2} > \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

66. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(4, 3)$ και $B(5, 1)$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(3 + f(x^2)) < 1$.

67. Αν η γραφική παράσταση της $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα σημείο να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = 4 + (f(x) - x)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

68. Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

69. Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άρτια.

70. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) > 1$ και $f^3(x) - 3f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξεταστεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία. Κατόπιν να λυθεί η ανίσωση $f(f(x)) > 2$.

71. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x) = f(3x - 2) - f(1 - 2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

73. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = |x|$.

α. Να εξετάσετε αν ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει ολικό ελάχιστο και να την παραστήσετε γραφικά.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ ως προς τη μονοτονία.

δ. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(g \circ f)(x) = \alpha$.

ε. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι "1-1"

74. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι αντίστροφες των συναρτήσεων.

α. $f(x) = 5x + 7$.

β. $f(x) = x^2 - 2x$.

γ. $f(x) = x^2 - 2x$ με $x > 1$.

δ. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$.

ε. $f(x) = x^3 + 5$.

στ. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

75. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι αντίστροφες των συναρτήσεων.

α. $f(x) = \sqrt[6]{x} - 4$.

β. $f(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$.

γ. $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x - 2}}$.

δ. $f(x) = \sqrt[3]{x + 2} - 1$.

ε. $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 5}$.

στ. $f(x) = 2\ln x - \dfrac{7}{2}$.

76. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι αντίστροφες των συναρτήσεων.

α. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

β. $f(x) = e^{2x-1}$.

γ. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x < 2 \\ 3x^2 - 5, & x \geqslant 2 \end{cases}$.

77. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x - 1}$ και $g(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $(f \circ g)^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.

78. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x + 1} - 1$ και $g(x) = x + 2$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $(f^{-1} \circ g)^{-1}$ και $g^{-1} \circ f$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + x$.

α. Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είναι "1 - 1".

β. Να λυθεί η εξίσωση $e^{2x^3} + x^9 = e^{2x} + x$.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 1$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.
β. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

81. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x) - x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αντιστρέφεται. Κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) + x = 0$.

82. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ αντιστρέφεται. Κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

83. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αντιστρέφεται. Κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) - x = 0$.

84. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι "1 - 1", να δείξετε ότι και οι συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $(g \circ f)(x)$ είναι "1 - 1".

85. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι "1 - 1" και περιττή. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι περιττή.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leqslant f(x)f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν αντιστρέφεται.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x^2) + f(x) = x^2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν αντιστρέφεται.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f(x) = 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 2$.
α. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι "1 - 1".
β. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ για την οποία ισχύει $\ln(xf(x)) = f(x)$ για κάθε $x < 0$.
α. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)$.
β. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{e}\, f^{-1}(x) = -2$.
γ. Να λυθεί η ανίσωση $2f(x) + 1 < 0$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι "1 - 1".
β. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x),\ x \in \mathbb{R}$.

91. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(f(x)) = f(x) + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β. Αν $f(2) = 4$, να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f^{-1}(8)$.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται.
β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$.
γ. Να δειχθεί ότι $f^3(-1) + f^3(1) = f(0)$.
δ. Αν $f(8) = 64$, να υπολογιστεί το $f(2)$.

93. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ η οποία περνάει από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,0)$. Να λυθούν:
α. η εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2x) + 2) = 1$.
β. η ανίσωση $f(f^{-1}(x^3 + x) - 2) > 2$.

94. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ η οποία περνάει από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(3,0)$. Να λυθούν:
α. η εξίσωση $f(f(e^x - 2) - 2) = 2$.
β. η ανίσωση $f^{-1}(f^{-1}(\ln x + 1) + 2) > -1$.

95. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ η οποία περνάει από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$. Να λυθούν:
α. η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$.
β. η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$.

96. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ η οποία περνάει από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(6,1)$. Να λυθούν:
α. η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 - x)) = 9$.
β. η ανίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x^2) - 2) < 2$.

97. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $(f \circ f + g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:
α. η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη.
β. $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$.

98. Αν για την συνάρτηση f ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
α. η f είναι "1 - 1".
β. $f(0) = 0$.
γ. $f(x) = x + f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.

99. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$.

100. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(A) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + f^2(x) + x + 3 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α. Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.
β. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x - 2) = f(2 - x)$.

101. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι:

α. $f(1)=0$.

β. $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

γ. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση, να δείξετε ότι:

i. η f είναι "1 - 1".

ii. $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

102. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0)=1$.

β. $f(x)f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι "1-1".

103. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση $f(f(x))=9x+8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση f είναι "1-1".

β. $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

γ. $f^{-1}(x)=\frac{1}{9}[f(x)-8]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. $f(9x+8)=9f(x)+8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. $f(-1)=-1$.

104. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(f(x))^3+x^3=8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ. Να βρείτε την f^{-1}.

105. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(f(x))+f(x)=-\frac{1}{4}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση f είναι "1-1".

β. αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.

106. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ και ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

β. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται.

γ. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$$

107. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(0) \neq 0$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σ' ένα μόνο σημείο, να αποδείξετε ότι:

α. η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x'x.

β. η f αντιστρέφεται.

γ. για κάθε $x, y \in f(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

108. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

α. $f(1) = 1$.

β. η f αντιστρέφεται.

γ. $f(x) + f^{-1}(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.