ΗΛΙΑΣΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Ολοκληρώματα

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr

www.iliaskos.gr

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Η έννοια του ολοκληρώματος

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ.
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ΄ένα διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και συμβολίζεται $\int f(x)dx$. Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Βασικοί τύποι ολοκλήρωσης

1.	$\int 0dx = c$	
2.	$\int 1dx = x + c$	
3.	$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$	$\int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$
4.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$	$\int f^\alpha(x)f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
5.	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x \rvert + c, x > 0$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$

6.	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
7.	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$	$\int \alpha^{f(x)} f'(x) dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c$
8.	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int (\eta\mu f(x)) f'(x) dx = -\sigma\upsilon\nu(f(x)) + c$
9.	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	$\int \sigma\upsilon\nu(f(x)) f'(x) dx = \eta\mu(f(x)) + c$
10.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))} dx = -\sigma\varphi(f(x)) + c$
11.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))} dx = \varepsilon\varphi(f(x)) + c$

Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος

- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$

Παρατηρήσεις

i. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν παράγουσα, δηλαδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα τους.

ii. Υπάρχουν συναρτήσεις που ενώ έχουν παράγουσα, δεν είναι ολοκληρώσιμες.

iii. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

iv. Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f σ᾽ένα διάστημα Δ είναι συνάρτηση.

Κανόνες Ολοκλήρωσης

Απευθείας ολοκλήρωση

Στην απευθείας ολοκλήρωση προσπαθούμε, με παρατήρηση, να βρούμε μια συνάρτηση την οποία αν την παραγωγίσουμε θα πάρουμε την συνάρτηση που έχουμε στο ολοκλήρωμα.

Μεθοδολογίες

i. Αν στο ολοκλήρωμα έχουμε συνάρτηση με δύναμη στον παρονομαστή τότε, την ανεβάζουμε στον αριθμητή και χρησιμοποιούμε τον τύπο για το ολοκλήρωμα της δύναμης.

$$\int \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \int x^{-\alpha}dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f^{\alpha}(x)}dx = \int f^{-\alpha}(x)f'(x)dx = \frac{f^{-\alpha+1}(x)}{-\alpha+1} + c$$

Αν $\alpha = 1$ τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους με αποτέλεσμα το ln, δηλαδή

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

ii. Αν στο ολοκλήρωμα έχουμε συνάρτηση με ρίζα, τότε θα γράφουμε την ρίζα ως δύναμη και θα χρησιμοποιούμε τον τύπο για το ολοκλήρωμα δύναμης.

$$\int \sqrt[\mu]{x^{\nu}}\,dx = \int x^{\frac{\nu}{\mu}}dx = \frac{x^{\frac{\nu}{\mu}+1}}{\frac{\nu}{\mu}+1} + c,\ x > 0$$

$$\int \sqrt[\mu]{f^{\nu}(x)}\,f'(x)dx = \int f^{\frac{\nu}{\mu}}(x)f'(x)dx = \frac{f^{\frac{\nu}{\mu}+1}(x)}{\frac{\nu}{\mu}+1} + c,\ f(x) > 0$$

Προσοχή! Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο αν το $x > 0, f(x) > 0$ ή αν το ν είναι άρτιος. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $|x|$ ή $|f(x)|$, οπότε θα δημιουργήσουμε μια κλαδική συνάρτηση και θα ολοκληρώσουμε σε κάθε κλάδο ξεχωριστά.

iii. Αν έχουμε $\eta\mu^2 x$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 x$ συνήθως χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού, $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$.

iv. Σε θεωρητικές ασκήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους που είδαμε στα Θεωρήματα των Παραγώγων για την εύρεση μιας παράγουσας - αρχικής συνάρτησης. Αν μας δίνουν αρχικές συνθήκες (την τιμή, δηλαδή, της συνάρτησης για μια συγκεκριμένη τιμή του x) μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του c που προκύπτει από την ολοκλήρωση.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ. Τότε η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες εκφράζεται από τον τύπο:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Μεθοδολογίες

Τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες την χρησιμοποιούμε κυρίως όταν έχουμε γινόμενο μιας συνάρτησης με εκθετική, τριγωνομετρική ή λογαριθμική συνάρτηση.

i. Όταν έχουμε γινόμενο συνάρτησης με εκθετική ή τριγωνομετρική, πάντα θα γράφουμε με μορφή παραγώγου την εκθετική ή την τριγωνομετρική και θα εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο όσες φορές χρειαστεί μέχρι να προκύψει ένα ολοκλήρωμα που μπορούμε να το υπολογίσουμε.

π.χ.

$$\int (2x-1)e^{4x}dx = \int \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)'(2x-1)dx =$$
$$\frac{e^{4x}}{4}(2x-1) - \int \frac{e^{4x}}{4}(2x-1)'dx =$$
$$\frac{e^{4x}}{4}(2x-1) - \int \frac{e^{4x}}{4}2dx = \frac{e^{4x}}{4}(2x-1) - \frac{e^{4x}}{8} + c$$

ii. Όταν έχουμε γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση, θα θέτουμε I το αρχικό ολοκλήρωμα, θα γράφουμε με μορφή παραγώγου την εκθετική και θα εφαρμόζουμε 2 φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Με αυτό τον τρόπο θα εμφανιστεί το I στο δεύτερο μέλος. Το μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος οπότε υπολογίστηκε το ολοκλήρωμα.

π.χ.

$$I = \int e^x \eta\mu x dx = \int (e^x)'\eta\mu x dx =$$
$$e^x\eta\mu x - \int e^x(\eta\mu x)'dx = e^x\eta\mu x - \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx =$$
$$e^x\eta\mu x - \int (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx =$$
$$e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x + \int e^x(-\eta\mu x)dx = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x - I \Leftrightarrow$$
$$2I = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow I = \frac{e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x}{2} + c$$

iii. Όταν έχουμε γινόμενο συνάρτησης με $\ln x$ πάντα γράφουμε ως παράγωγο την συνάρτηση και όχι το $\ln x$ και μετά εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

π.χ. $\int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx =$
$x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + c$

π.χ. $\int \ln(x+1)dx = \int (x+1)'\ln(x+1)dx =$
$(x+1)\ln(x+1) - \int (x+1)\frac{1}{x+1}dx =$
$(x+1)\ln(x+1) - \int 1dx = (x+1)\ln(x+1) - x + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

Έστω ότι έχουμε δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή τότε πρώτα κάνουμε τη διαίρεση των δύο πολυωνύμων και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int \Pi(x)dx + \int \frac{U(x)}{Q(x)}dx$, όπου $\Pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης και $U(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης (το υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από το $Q(x)$).

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{U(x)}{Q(x)}dx$, πρέπει να διασπάσουμε το κλάσμα $\frac{U(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα κλασμάτων ειδικής μορφής, που αντιστοιχούν στους παράγοντες του παρονομαστή $Q(x)$. Οπότε παραγοντοποιούμε το $Q(x)$ βρίσκοντας τις ρίζες του και διακρίνουμε τις εξείς περιπτώσεις:

i. Το $Q(x)$ έχει πραγματικές ρίζες χωρίς πολλαπλότητα, δηλαδή αποτελείται μόνο από παράγοντες της μορφής $(x-\rho_i)$.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-\rho_i)$ αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{A_i}{x-\rho_i}$, όπου A_i σταθερός συντελεστής που προσδιορίζεται με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

π.χ. $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}$

ii. Το $Q(x)$ έχει πραγματικές ρίζες με πολλαπλότητα, δηλαδή περιέχει παράγοντες της μορφής $(x-\rho_i)^\kappa$.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-\rho_i)^\kappa$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων $\frac{A_1}{x-\rho_i}+\frac{A_2}{(x-\rho_i)^2}+\ldots+\frac{A_\kappa}{(x-\rho_i)^\kappa}$, όπου $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ σταθεροί συντελεστές που προσδιορίζονται με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

π.χ. $$\frac{x-3}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-2}$$

iii. Το $Q(x)$ έχει μιγαδικές ρίζες χωρίς πολλαπλότητα, δηλαδή περιέχει παράγοντες της μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$ αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{A_i x+B_i}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, όπου A_i, B_i σταθεροί συντελεστές που προσδιορίζονται με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

π.χ. $$\frac{2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2-x+1}$$

iv. Το $Q(x)$ έχει μιγαδικές ρίζες με πολλαπλότητα, δηλαδή περιέχει παράγοντες τις μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της $\frac{A_1x+B_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{A_2x+B_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}+\ldots+\frac{A_\kappa x+B_\kappa}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}$, όπου $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\kappa, B_\kappa$ σταθεροί συντελεστές που προσδιορίζονται με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

π.χ. $$\frac{2x-5}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+x+1)^2}$$

Με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως χωρίσαμε το κλάσμα $\frac{U(x)}{Q(x)}$ στο άθροισμα των απλών κλασμάτων $\sum\frac{U_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)}$. Θα πρέπει να έχουμε $\frac{U(x)}{Q(x)}=\sum\frac{U_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $Q(x)\neq 0$. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και καταλήγουμε σε ισότητα πολυωνύμων που πρέπει να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $Q(x)\neq 0$. Για να είναι τα πολυώνυμα ίσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $Q(x)\neq 0$ θα πρέπει να έχουν ίσους τους συντελεστές των ομοβαθμίων όρων. Μπορούμε λοιπόν να σχηματίσουμε σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές που πρέπει να προσδιορίσουμε, είτε

- εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβαθμίων όρων, είτε

- εξισώνοντας τις αριθμητικές τιμές των δύο πολυωνύμων, δίνοντας για τιμές του x τις πραγματικές ρίζες του παρονομαστή.

Οπότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \frac{U(x)}{Q(x)}dx$ ανάγεται στο υπολογισμό ολοκληρωμάτων απλών κλασμάτων, στάνταρ μορφής. Διακρίνουμε λοιπόν τέσσερις περιπτώσεις.

i. Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \frac{1}{x-\rho_i}dx$.

Έχουμε $I = \int \frac{1}{x-\rho_i}dx = \ln|x-\rho_i| + c$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}dx$.

Έχουμε $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και προκύπτει

$$x-3 = A_1(x-2) + A_2(x-1)$$

Για $x = 2$ έχουμε $-1 = A_1 0 + A_2(1) \Leftrightarrow A_2 = -1$.

Για $x = 1$ έχουμε $-2 = A_1(-1) + A_2 0 \Leftrightarrow A_1 = 2$.

Θα είναι λοιπόν $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x-2}$.

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$I = \int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x-2}\right)dx \Leftrightarrow$$
$$I = 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + c$$

ii. Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \frac{1}{(x-\rho_i)^\kappa}dx$ με $\kappa \geqslant 2$.

Έχουμε $I = \int \frac{1}{(x-\rho_i)^\kappa}dx = \int (x-\rho_i)^{\kappa}dx = \frac{(x-\rho_i)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} + c$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x-3}{(x-1)^2(x-2)}dx$.

Έχουμε $\frac{x-3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2}$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και προκύπτει

$$x-3 = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + A_3(x-1)^2$$

Για $x = 1$ έχουμε $-2 = A_1 0 + A_2(-1) + A_3 0 \Leftrightarrow A_2 = 2$.

Για $x = 2$ έχουμε $-1 = A_1 0 + A_2 0 + A_3(1)^2 \Leftrightarrow A_3 = -1$.

Έτσι προκύπτει

$$x-3 = A_1(x-1)(x-2) + 2(x-2) - (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x-3=(A_1-1)x^2+(4-3A_1)x+2A_1-5$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^2 παίρνουμε τη σχέση $A_1-1=0 \Leftrightarrow A_1=1$.

Θα είναι λοιπόν $\dfrac{x-3}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{x-2}$.

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$I=\int\frac{x-3}{(x-1)^2(x-2)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-2}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$I=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x-2|+c$$

iii. Ολοκληρώματα της μορφής $I=\int\dfrac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων αυτής της μορφής γίνεται γενικά με τη βοήθεια της συνάρτησης τοξεφ που είναι έξω από τη σχολική ύλη. Θα υπολογίσουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα I μόνο στην περίπτωση που είναι $Ax+B=\rho(2\alpha x+\beta)=\rho(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'$. Έχουμε τότε: $I=\int\dfrac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=\int\dfrac{\rho(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=$ $\rho\ln|\alpha x^2+\beta x+\gamma|+c$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

Έχουμε $\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2x+B_2}{x^2+1}$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και προκύπτει

$$x^2-2x-1=A_1(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x-1)$$

Για $x=1$ έχουμε $-2=A_1(2)+(2A_2+B_2)0 \Leftrightarrow A_1=-1$.

Έτσι προκύπτει

$$x^2-2x-1=-x^2-1+(A_2x+B_2)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x-1=(A_2-1)x^2+(B_2-A_2)x-1-B_2$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^2 και τους σταθερούς όρους παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases}A_2-1=1\\-1-B_2=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A_2=2\\B_2=0\end{cases}$$

Θα είναι λοιπόν $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}$.

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$I=\int\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$I=-\ln|x-1|-\ln(x^2+1)+c.$$

iv. Ολοκληρώματατηςμορφής $I=\int\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta+\gamma)^\kappa}dx$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ και $\kappa\geqslant 2$.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I μόνο στην περίπτωση που είναι

$$Ax+B=\rho(2\alpha x+\beta)=\rho(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'.$$

Έχουμε τότε:

$$I=\int\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}dx=\int\frac{\rho(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}dx=$$

$$\int\rho(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{-\kappa}dx=$$

$$\rho\frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}+c.$$

Αλλαγή μεταβλητής

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int f(g(t))g'(t)dt$ κάνοντας αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $u=g(t)$, οπότε $du=g'(t)dt$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται $I=\int f(u)du\Leftrightarrow I=F(u)+c\Leftrightarrow I=F(g(t))+c$.

Προσοχή! Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να κάνουμε και απευθείας ολοκλήρωση.

Πολλές φορές πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int f(x)dx$ χωρίς να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να κάνουμε πάλι αλλαγή μεταβλητής, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.

i. Θέτουμε $x=g(t)\Rightarrow dx=g'(t)dt$.

Το ολοκλήρωμα γίνεται $I=\int f(g(t))g'(t)dt$. Το αποτέλεσμα θα είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής t και όχι της μεταβλητής x. Για να μπορέσουμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης συναρτήση της μεταβλητής x, θα πρέπει η συνάρτηση $x=g(t)$ να είναι αντιστρέψιμη. Έτσι η μεταβλητή t μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του t.

ii. Θέτουμε $t = h(x)$. Η συνάρτηση $h(x)$ πρέπει να είναι αντιστρέψιμη.

Έτσι $x = h^{-1}(t) \Rightarrow dx = (h^{-1}(t))'dt$.

Το ολοκλήρωμα γίνεται $I = \int f(h^{-1}(t))(h^{-1}(t))'dt$ που το υπολογίζουμε. Αντικαθιστώντας στο τελευταίο αποτέλεσμα $t = h(x)$ επανερχόμαστε στην αρχική μεταβλητή x.

Μεθοδολογίες στις αλλαγές μεταβλητής

i. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

- Αν έχουμε τριγωνομετρικό αριθμό υψωμένο σε άρτιο εκθέτη, εφαρμόζω τύπους αποτετραγωνισμού:

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}, \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \eta\mu^2 x dx$.

Έχουμε $I = \int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c$

- Αν έχουμε τριγωνομετρικό αριθμό υψωμένο σε περιττό εκθέτη, τον σπάω στον προηγούμενο άρτιο, χρησιμοποιώ τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ και θέτουμε.
    - Αν έχουμε $\eta\mu x$, θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x dx$.
    - Αν έχουμε $\sigma\upsilon\nu x$, θέτουμε $u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x dx$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \eta\mu^3 x dx$.

Έχουμε $I = \int \eta\mu^3 x dx = \int \eta\mu x \eta\mu^2 x dx$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x dx$

$$u = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow u^2 = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow u^2 = 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - u^2$$

Έτσι $I = \int -(1 - u^2)du = -u + \frac{u^3}{3} + c \Leftrightarrow$

$I = -\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} + c$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

Έχουμε $I = \int \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \eta\mu x \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x dx$

$$u = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow u^2 = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow u^2 = 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - u^2$$

Έτσι $I = \int -(1-u^2)u^2du = \int (-u^2+u^4)du = -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c \Leftrightarrow$

$I = -\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3}+\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5}+c.$

ii. Αν έχουμε ρίζα με υπόρριζη ποσότητα πολυώνυμο πρώτου βαθμού ($\sqrt{\alpha x+\beta}$), θέτουμε τη ρίζα, λύνουμε ως προς x και έπειτα παραγωγίζουμε για να βρούμε το dx.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int x\sqrt{x+1}\,dx$.

Θέτουμε $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1 \Leftrightarrow x = u^2-1 \Rightarrow dx = 2udu$.

Έτσι $I = \int (u^2-1)u2udu = \int (2u^4-2u^2)du = 2\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+c \Leftrightarrow$

$I = 2\frac{(\sqrt{x+1})^5}{5}-\frac{(\sqrt{x+1})^3}{3}+c.$

iii. Εκθετικά ολοκληρώματα.

Αν στο ολοκλήρωμα έχουμε συνάρτηση του e^x, θέτουμε $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

Θέτουμε $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$.

Έτσι $I = \int \frac{u-1}{u+1}\frac{1}{u}du$.

Έχουμε $\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και προκύπτει

$$u-1 = A(u+1)+Bu$$

Για $x = 0$ έχουμε $-1 = A+B0 \Leftrightarrow A = -1$.

Για $x = -1$ έχουμε $-2 = A0+B(-1) \Leftrightarrow B = 2$.

Θα είναι λοιπόν $\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{-1}{u}+\frac{2}{u+1}$.

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$I = \int \frac{u-1}{u(u+1)}du = \int \left(\frac{-1}{u}+\frac{2}{u+1}\right)du =$$

$$-\ln|u|+2\ln|u+1|+c \Leftrightarrow I = -\ln|e^x|+2\ln|e^x+1|+c$$

iv. Λογαριθμικά ολοκληρώματα

Αν στο ολοκλήρωμα έχουμε συνάρτηση του $\ln x$, θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$.

π.χ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$I = \int (\ln^2 x + \ln x - 3)dx$

Θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$.

Έτσι $I = \int (u^2 + u - 3)e^u du =$

$$(u^2 + u - 3)e^u - \int (2u + 1)e^u du =$$

$$(u^2 + u - 3)e^u - (2u + 1)e^u + \int 2e^u du =$$

$$(u^2 + u - 3)e^u - (2u + 1)e^u + 2e^u + c \Leftrightarrow$$

$$I = (\ln^2 x + \ln x - 3)e^{\ln x} - (2\ln x + 1)e^{\ln x} + 2e^{\ln x} + c.$$

v. Ειδικές Περιπτώσεις

- Όταν έχουμε μέσα στο ολοκλήρωμα $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, θέτουμε $x = \alpha\eta\mu u \Rightarrow dx = \alpha\sigma\upsilon\nu u$.
- Όταν έχουμε μέσα στο ολοκλήρωμα $\sqrt{x^2 - \alpha^2}$, θέτουμε $x = \frac{\alpha}{\eta\mu u} \Rightarrow dx = -\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu^2 u}$.
- Όταν έχουμε μέσα στο ολοκλήρωμα $\sqrt{\alpha^2 + x^2}$, θέτουμε $x = \alpha\varepsilon\varphi u \Rightarrow dx = \alpha\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du$.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το ολοκλήρωμα γενικεύει κατά κάποιο τρόπο το σύμβολο της άθροισης $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa$ αφού είναι ίσο με το όριο ακολουθίας τέτοιων αθροισμάτων.

Το ολοκλήρωμα συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ορίζεται σαν όριο κατάλληλης ακολουθίας αθροισμάτων. Τα αθροίσματα αυτά ονομάζονται αθροίσματα Riemann της συνάρτηση f. Κάθε τέτοιο άθροισμα προέρχεται από συγκεκριμένη διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και επίσης συγκεκριμένη επιλογή τιμών της συνάρτησης. Τα αθροίσματα αυτά, για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$, είναι της μορφής $R = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ όπου είναι $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$ και $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση.

Ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$ είτε ολοκλήρωμα της f από το α μέχρι το β είναι το $\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ και συμβολίζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Παρατηρήσεις

i. Μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ είναι και ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Υπάρχουν όμως και άλλες συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ χωρίς να είναι απαραίτητα συνεχής σε αυτό. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά και μόνο με ολοκληρώματα συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα ολοκλήρωσης.

ii. Το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ένας αριθμός εντελώς καθορισμένος όταν είναι δεδομένη η ολοκληρωτέα συνάρτηση f (συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης) και το διάστημα ολοκλήρωσης. Η μεταβλητή ολοκλήρωσης x, ούτε στο αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης παρουσιάζεται, ούτε η αλλαγή της ονομασίας της μεταβάλει την τιμή του ολοκληρώματος.

iii. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, θα είναι τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει.

Θεώρημα

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και F μία συνάρτηση, επίσης συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ (Η F είναι μια αρχική συνάρτηση της f). Με τις παραπάνω προϋποθέσεις έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$.

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \kappa g(x))dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \kappa \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

- Ιδιότητα Chasles. Για την ιδιότητα αυτή αρκεί η συνάρτηση f να είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα ολοκλήρωσης οποιαδήποτε και αν είναι η σειρά μεγέθους των ορίων α, β, γ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$$

Ανισοτικά Θεωρήματα

i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, θα είναι τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geqslant 0$.

   Όμοια αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(x) \leqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, θα είναι τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leqslant 0$.

   Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και αυστηρά θετική (ή αρνητική) τότε θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ (ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$).

   Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(x) \geqslant 0$ και δεν είναι παντού μηδέν (δεν είναι δηλαδή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$), θα είναι τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

iii. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, θα ισχύει τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

   Αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται πάρα πολύ εύκολα αν σκεφτούμε ότι

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leqslant 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

   Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Παρατήρηση

Από τα ανισοτικά θεωρήματα συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε με ορισμένο ολοκλήρωμα μια ανισότητα. Αν έχουμε δηλαδή μια ανισοτική σχέση $f(x) \leqslant g(x)$ μεταξύ δύο συνεχών συναρτήσεων, ολοκληρώνεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει με την ίδια φορά, αρκεί η $f(x) \leqslant g(x)$ να ισχύει καθολικά στο διάστημα ολοκλήρωσης και $\alpha < \beta$. Θα είναι λοιπόν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Αν $\alpha > \beta$ τότε απλά αλλάζει η φορά της ανίσωσης, θα είναι λοιπόν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και έχουν παραγώγους συνεχείς στο αντίστοιχο διάστημα ολοκλήρωσης Δ, θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου $[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha)$.

Αλλαγή μεταβλητής

Η μέθοδος της αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, εξυπηρετεί περισσότερους σκοπούς από την αντίστοιχη μέθοδο στο αόριστο. Με την αλλαγή μεταβλητής μεταβάλλεται τώρα και το διάστημα ολοκλήρωσης και όχι μόνο η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο, όχι μόνο για να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα σε άλλο, που μπορούμε να υπολογίσουμε με γνωστή διαδικασία, αλλά και να συγκρίνουμε ολοκληρώματα με διαφορετικά όρια ολοκλήρωσης. Μπορούμε όμως να συγκρίνουμε ακόμα και ολοκληρώματα με τα ίδια όρια, αλλάζοντας με κατάλληλο μετασχηματισμό την ολοκληρωτέα συνάρτηση, είτε μόνο στο ένα, είτε και στα δύο από αυτά.

Αν έχουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, μπορούμε να θέσουμε το x, σαν συνάρτηση της μεταβλητής t, δηλαδή $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$. Πρέπει όμως να αλλάξουμε και τα όρια ολοκλήρωσης. Έτσι το νέο διάστημα ολοκλήρωσης γίνεται $[\alpha_0, \beta_0]$, για το οποίο ισχύει $\alpha = g(\alpha_0), \beta = g(\beta_0)$. Έτσι λοιπόν προκύπτει η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$.

Μεθοδολογίες

i. Αν έχουμε ολοκλήρωμα με αντίθετα άκρα, τότε σπάμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα στο 0 και στο ένα από τα δύο κάνουμε αλλαγή μεταβλητής για να δημιουργήσουμε τα ίδια άκρα.

π.χ. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$.

$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = -x \Rightarrow du = -dx$.

Για $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$

Έχουμε λοιπόν $I = \int_{\alpha}^{0} -f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx =$
$\int_{0}^{\alpha} f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Επειδή η f είναι άρτια ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως $I = \int_{0}^{\alpha} f(u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.

π.χ. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$.

$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = -x \Rightarrow du = -dx$.

Για $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$

Έχουμε λοιπόν $I = \int_{\alpha}^{0} -f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx =$
$\int_{0}^{\alpha} f(-u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως $I = \int_{0}^{\alpha} -f(u)du + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

ii. Όταν θέλουμε να δείξουμε μια ισότητα μεταξύ δύο ολοκληρωμάτων I_1, I_2, τότε:

- Αν στο I_1 έχουμε $f(\eta\mu x)$ και στο I_2 έχουμε επίσης $f(\eta\mu x)$, τότε θέτουμε $u = \pi - x \Rightarrow du = -dx$.
- Αν στο I_1 έχουμε $f(\sigma\upsilon\nu x)$ και στο I_2 έχουμε επίσης $f(\sigma\upsilon\nu x)$, τότε θέτουμε $u = 2\pi - x \Rightarrow du = -dx$.
- Αν στο I_1 έχουμε $f(\eta\mu x)$ και στο I_2 έχουμε $f(\sigma\upsilon\nu x)$, τότε θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$.
- Αν στο I_1 έχουμε $f(x)$ και στο I_2 έχουμε $f(\kappa - x)$, τότε θέτουμε $u = \kappa - x \Rightarrow du = -dx$.

- Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα μας δίνεται μια συναρτησιακή σχέση με τη βοήθεια της οποίας θα καταλάβουμε την αλλαγή μεταβλητής που πρέπει να κάνουμε.

π.χ. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να δείξετε ότι

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$.

Θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$.

Για $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$.

Για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$.

Έχουμε λοιπόν $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du\right) =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu u)du.$$

iii. Όταν έχουμε μέσα στο ολοκλήρωμα μια αντίστροφη $f^{-1}(x)$ που δεν γνωρίζουμε τον τύπο της, αλλά ούτε μπορούμε να τον βρούμε, γνωρίζουμε όμως τον τύπο της $f(x)$, τότε θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$.

π.χ. Έστω συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και γνωρίζουμε το σύνολο τιμών της βγάζουμε το συμπέρασμα

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha \text{ και } f(\beta) = \alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = \beta$$

Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$.

Για $x = \alpha \Rightarrow u = f^{-1}(\alpha) = \beta$.

Για $x = \beta \Rightarrow u = f^{-1}(\beta) = \alpha$.

Έτσι $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx = \int_\beta^\alpha uf'(u)du = [uf(u)]_\beta^\alpha - \int_\beta^\alpha f(u)du =$

$$\alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) + \int_\alpha^\beta f(u)du = \alpha\beta - \beta\alpha + \int_\alpha^\beta f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u)du$$

Άρα $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Αναγωγικοί τύποι

Πολλές φορές έχουμε μια ακολουθία ολοκληρωμάτων (ορισμένων ή αόριστων) $I_0, I_1, \ldots, I_\nu, \ldots$ των οποίων η δυσκολία υπολογισμού αυξάνει με την τιμή του ν. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τέτοια ολοκληρώματα βρίσκουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ δύο τυχαίων όρων I_ν και $I_{\nu-1}$. Αυτός είναι ο αναγωγικός τύπος. Ο αναγωγικός τύπος μας επιτρέπει συχνά να βρούμε και την τιμή (ή την έκφραση του) του γενικού όρου I_ν συναρτήσει του ν.

Ο καθορισμός του αναγωγικού τύπου βασίζεται κατά κανόνα στην παραγοντική ολοκλήρωση.

π.χ. Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, να βρεθεί ο αναγωγικός τύπος για την ακολουθία I_ν και να βρεθεί το I_4.

$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx = [x^\nu e^x]_0^1 - \int_0^1 \nu x^{\nu-1} e^x dx \Leftrightarrow I_\nu = e - \nu I_{\nu-1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Βρίσκουμε λοιπόν $I_3 = e - 3I_2$.

$$I_2 = e - 2I_1$$

$$I_1 = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1$$

Οπότε $I_3 = e - 3(e - 2I_1) = -2e + 6I_1 = 6 - 2e$.

Η συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$

Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα Δ και α σημείο του Δ. Τότε η συνάρτηση $F:\Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, για κάθε $x \in \Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και έχει παράγωγο $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις

i. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ, έχει παράγουσες (αρχικές συναρτήσεις) στο Δ. Μια αρχική της f στο Δ είναι η $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$.

ii. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο Δ, τότε $\left(\int_x^\alpha f(x)dx\right)' = -f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

iii. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κ φορές παραγωγίσιμη στο Δ με παράγωγο $f^{(\kappa)}$ συνεχή στο διάστημα αυτό. Τότε καθε αντίστοιχη παράγουσα F της f, είναι ακριβώς $\kappa + 1$ φορές παραγωγίσιμη, με παράγωγο $F^{(\kappa+1)}$ συνεχή στο Δ.

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Το πεδίο ορισμού της $F(x)$ θα είναι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ με την προυπόθεση ότι τα όρια ολοκλήρωσης πρέπει να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f(x)$.

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\int_{\alpha}^{x}\sqrt{t^2-9}\,dt$

Το πεδίο ορισμού της $h(t)=\sqrt{t^2-9}$ είναι το σύνολο $A_h=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

- Αν $\alpha \geqslant 3$ τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f=[3,+\infty)$.
- Αν $-3<\alpha<3$ τότε δεν ορίζεται η f.
- Αν $\alpha \leqslant -3$ τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f=(-\infty,-3]$.

Παραγώγιση της συνάρτησης $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Όταν θέλουμε να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t ενώ η μεταβλητή παραγώγισης είναι το x. Αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει το x, αυτό θεωρείται σταθερό ως προς τη μεταβλητή t. Επομένως για να μπορέσουμε να παραγωγίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα δεν πρέπει να υπάρχει x.

i. Αν έχουμε $f(x)=\int_{\alpha}^{h(x)} g(t)dt$ τότε $f'(x)=g(h(x))h'(x)$.

ii. Αν έχουμε $f(x)=\int_{h(x)}^{\varphi(x)} g(t)dt$ τότε για να μπορέσουμε να παραγωγίσουμε πρέπει πρώτα να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δύο με ένα άκρο του καθενός σταθερό σημείο του πεδίου ορισμού της f. Έτσι

$$f(x)=\int_{h(x)}^{\alpha} g(t)dt+\int_{\alpha}^{\varphi(x)} g(t)dt \Rightarrow$$
$$f'(x)=-g(h(x))h'(x)+g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

iii. Αν έχουμε $f(x)=\int_{\alpha}^{x} h(x)g(t)dt$ τότε για να παραγωγίσουμε πρέπει να βγάλουμε το $h(x)$ έξω από το ολοκλήρωμα. Δηλαδή

$$f(x)=h(x)\int_{\alpha}^{x} g(t)dt \Rightarrow f'(x)=h'(x)\int_{\alpha}^{x} g(t)dt+h(x)g(x)$$

iv. Αν το x βρίσκεται μέσα συνάρτηση $(g(f(x,t)))$ και δεν μπορούμε να το βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα εύκολα, τότε θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής ώστε να καταλήξουμε σε μια από τις προηγούμενες μορφές.

π.χ. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \int_0^x g(xt)dt$$

Θέτουμε $u = tx \Leftrightarrow t = \frac{u}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x}du$.

Για $t = 0 \Rightarrow u = 0$.

Για $t = x \Rightarrow u = x^2$.

Έχουμε λοιπόν $f(x) = \int_0^{x^2} -\frac{g(u)}{x}du = -\frac{1}{x}\int_0^{x^2} g(u)du \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} g(u)du - \frac{1}{x}g(x^2)2x$$

Εμβαδά

Εμβαδόν μιας συνάρτησης f και τον άξονα x'x

Το εμβαδό της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι το ολοκλήρωμα $E = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

Μεθοδολογία

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$

i. Θα βρίσκουμε τις ρίζες της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δηλαδή θα λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Θα βρίσκουμε τα πρόσημα της f στα διαστήματα των ριζών.

iii. Θα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στα διαστήματα των ριζών παίρνοντας θετικό πρόσημο όπου η f είναι θετική και αρνητικό πρόσημο όπου η f είναι αρνητική.

Προσοχή! Αν δεν έχουμε κάποια κάθετη ευθεία, τότε θεωρούμε ως όρια τις ρίζες της f.

π.χ. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής του επιπέδου που ορίζεται από την καπύλη με εξίσωση $y = x^2 - 5x + 6$ και τον άξονα x'x και της ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 5x + 6$ οι ρίζες είναι το 2 και το 3. Κάνουμε πίνακα προσήμων:

x	1		2		3		4
f	|	+	|	-	|	+	|

Θα είναι λοιπόν

$$E = \int_1^2 (x^2 - 5x + 6)dx - \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx + \int_3^4 (x^2 - 5x + 6)dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

Εμβαδόν δύο συναρτήσεων f και g

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συνεχών συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι το ολοκλήρωμα $E = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$.

Μεθοδολογία

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$

i. Θα βρίσκουμε τις ρίζες της $h(x) = f(x) - g(x)$, δηλαδή θα λύνουμε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$.

ii. Θα βρίσκουμε το πρόσημο της h στα διαστήματα των ριζών.

iii. Θα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στα διαστήματα των ριζών παίρνωντας θετικό πρόσημο όπου η h είναι θετική και αρνητικό πρόσημο όπου η h είναι αρνητική.

Προσοχή! Αν δεν έχουμε κάποια κάθετη ευθεία, τότε θεωρούμε ως όρια τις ρίζες της h.

π.χ. Να βρεθεί το εμβδόν του χωρίου που περιέχεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, την εφαπτομένη της στο σημείο $M(2, -5)$ και τον άξονα y'y.

Η εφαπτομένη ε της $f(x)$ στο $M(2, 5)$ έχει εξίσωση $y - (-5) = f'(2)(x - 2)$, δηλαδή $y = -6x + 7$.

Επομένως

$$h(x) = f(x) - y = -x^2 - 2x + 3 - (-6x + 7) = -x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = -(x-2)^2 \leqslant 0 \text{ για } 0 \leqslant x \leqslant 2$$

Το ζητούμενο εμβαδόν λοιπόν είναι

$$E = -\int_0^2 h(x)dx = -\left[-(x-2)^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Εμβαδόν παραπάνω από δύο συναρτήσεων

Όταν έχουμε παραπάνω από δύο συναρτήσεις για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν θα πρέπει οπωσδήποτε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Έπειτα προσδιορίζουμε το χωρίο πάνω στο σχήμα και προσπαθούμε να χωρίσουμε το χωρίο σε επιμέρους κομμάτια τα οποία μπορούμε να τα υπολογίσουμε με βάση τις προηγούμενες μεθοδολογίες. Τέλος προσθέτουμε όλα τα επιμέρους εμβαδά και βρίσκουμε το ολικό εμβαδόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{3x^2-5x-6}{x+1}dx$ β) $\int \frac{7x+1}{3x^2-7x+2}dx$

γ) $\int \frac{x^3+x}{x^3-x}dx$ δ) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

ε) $\int \frac{3x-2}{x^2-3x+2}dx$ ζ) $\int \frac{8x^4+2x^3-6x^2+2x+4}{2x^3}dx$

η) $\int \frac{x^3-x^2-2x+8}{x^3+2x^2}dx$ θ) $\int 4\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$

ι) $\int \frac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}dx$

2. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(3x-1)}dx$ β) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}dx$

γ) $\int \left(2xe^x \ln x + x^2e^x \ln x + xe^x\right)dx$ δ) $\int \left(x^2+2x-5\right)\sqrt[4]{x^3}\,dx$

ε) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ ζ) $\int \frac{x^3\sigma\upsilon\nu x - 3x^2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x^6+2x^3+1}dx$

η) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}}$ θ) $\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}dx$

ι) $\int \frac{e^x(x+1)}{\sqrt{xe^x}}dx$

3. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \varepsilon\varphi x\,dx$ β) $\int \left(\frac{3}{2x-3}-\frac{3}{x^2+1}\right)dx$ γ) $\int x^2\cdot 2^{1+x^3}\,dx$

δ) $\int \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)dx$ ε) $\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx$ ζ) $\int \sqrt{\frac{5+2\sqrt{x}}{x}}\,dx$

η) $\int \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ θ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}dx$ ι) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}dx$

4. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int (2x-1)e^{4x}\,dx$ β) $\int \frac{x^2-5x+6}{(x-2)e^x}\,dx$ γ) $\int (x-3)\eta\mu 2x\,dx$

δ) $\int (x^2-1)\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$ ε) $\int e^x \eta\mu x\,dx$ ζ) $\int e^{-2x}\sigma\upsilon\nu(2x+1)\,dx$

η) $\int \ln^2 x\,dx$ θ) $\int \frac{\ln^2 x}{x^3}\,dx$ ι) $\int x^{\alpha}\ln x\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}$

5. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{6x-5}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ β) $\int \frac{3x}{\eta\mu^2 x}\,dx$ γ) $\int x^2\sigma\upsilon\nu(3x-1)\,dx$

δ) $\int (x+1)\ln(x^2+x)\,dx$ ε) $\int \frac{x}{\eta\mu^2 x}\,dx$ ζ) $\int \frac{3x-5}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

η) $\int e^{3x}\eta\mu(2x+1)\,dx$ θ) $\int x\ln x\,dx$ ι) $\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$

6. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ β) $\int (x^2-1)e^{2x}\,dx$ γ) $\int (3x^2-4x)\ln(x^2-5x+6)\,dx$

δ) $\int x\sigma\upsilon\nu x\,dx$ ε) $\int e^x\sigma\upsilon\nu(3x-4)\,dx$

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ β) $\int x\varepsilon\varphi x^2\,dx$ γ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x-6\eta\mu x+8}\,dx$

δ) $\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x+6}\,dx$ ε) $\int 2x^3(x+1)^4\,dx$ ζ) $\int x^2(x+\alpha)^{\nu}\,dx$

η) $\int e^{4x}\cdot\sigma\upsilon\nu e^{2x}\,dx$ θ) $\int 2x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x^2\,dx$ ι) $\int \eta\mu 2x\cdot e^{\eta\mu x}\,dx$

8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ β) $\int \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$ γ) $\int \eta\mu^3 x\,dx$

δ) $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x\,dx$ ε) $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ ζ) $\int \frac{1}{\eta\mu x}\,dx$

η) $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$ θ) $\int x^5\sqrt{5-2x}\,dx$ ι) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

9. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{3x\,dx}{1+\sqrt{x-2}}$ β) $\int\left(x+\sqrt[\nu]{x+1}\right)dx$ γ) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

δ) $\int συν\sqrt{x+2}\,dx$ ε) $\int e^{\sqrt{x-1}}\,dx$ ζ) $\int \frac{dx}{e^x\left(1+e^x\right)}$

η) $\int \frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x+2}dx$ θ) $\int\left(\ln^2 x+\ln x-3\right)dx$ ι) $\int(\ln x-1)(\ln x-3)dx$

κ) $\int συν(2\ln x+1)dx$ λ) $\int ημ(\ln x)dx$

10. Αν οι συναρτήσεις $f,g\neq 0$ έχουν συνεχή 2η παράγωγο, να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx=\left[\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g^2(x)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta g''(x)f(x)dx.$$

11. Έστω $f(x)$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με f'' συνεχή στο $[1,e]$ και $f(1)=f(e)$. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e x f''(x)=ef'(e)-f'(1)$.

12. Αν η f, με συνεχή 2η παράγωγο, εφάπτεται στον $x'x$ στο $x=1$ και $f'(0)=1$, να βρεθεί σημείο που η f τέμνει τον $y'y$, αν ισχύει ότι $\int \left(f''(x)-f(x)\right)e^x\,dx=2$. Έπειτα να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της f είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x-3y+1=0$.

13. Αν η συνάρτηση $f(x)<0$ έχει συνεχή παράγωγο με $2f(x)=f'(x)$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int f(x)\ln\left(f^2(x)\right)dx$.

14. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2} f(ημx)dx=\int_0^{\pi/2} f(συνx)dx$.

15. Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi/2} x f(ημx)f(συνx)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} f(ημx)f(συνx)dx.$$

16. Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι $\int_0^{2\pi} x f(συνx)dx=\pi\int_0^{2\pi} f(συνx)dx$.

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\pi} xσυν^2x\,dx$.

17. α) Αν η f είναι άρτια και συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, να δείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx.$$

β) Έστω $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ με $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$.

Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.

18. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_{0}^{\pi} x f(\eta\mu x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)dx$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{0}^{\pi} \dfrac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$.

19. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_{0}^{2\pi} x f(\eta\mu^2 x)dx = \pi\int_{0}^{2\pi} f(\eta\mu^2 x)dx$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{0}^{2\pi} x(\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1)dx$.

20. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha - x) = x f'(x)$, να δείξετε ότι $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

21. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)\int_{-1}^{\alpha} f((\alpha-\beta)x+\alpha)dx$.

22. Έστω f γνησίως φθίνουσα, με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$.

α) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

β) Αν $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1-ex) & , \ x \leq 0 \\ x^3 - x^2 - x & , \ x > 0 \end{cases}$, να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f^{-1}(y)dy$.

23. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ γνησίως αύξουσα και με συνεχή παράγωγο.

α) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (2x - f(x))dx$.

β) Αν $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2}$, να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f^{-1}(y)dy$.

24. Αν $e^{f(x)} + f(x) = x+1$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Να βρεθούν οι ρίζες ρ_1, ρ_2 των $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = e$, καθώς και το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{e} f(x)dx$.

25. Έστω f παραγωγίσιμη, 1-1 και θετική στο $[\alpha,\beta]$. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \frac{f^{-1}(x)}{x}dx + \int_{\alpha}^{\beta} \ln(f(x))dx.$$

26. Έστω f παραγωγίσιμη, 1-1, που τέμνει τον $x'x$ στο $x=1$ και τον $y'y$ στο $y=-1$. Να υπολογιστεί η παράσταση $\int_{-1}^{0} 2x f^{-1}(x)dx + \int_{0}^{1} f^{2}(x)dx$.

27. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$I_1 = \int_{-1}^{1} x^2 f'(x)dx$, $I_2 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)f'(x)dx$, $I = \int_{-1}^{1} x f(x)dx$.

α) Αν $I_1 = I_2 = \kappa$, να βρεθεί το I.

β) Αν επιπλέον $f(1)-f(-1)=4$, να υπολογιστούν τα I_1, I_2, I.

28. Αν f συνεχής για $x>0$, να δείξετε ότι

$$\int_{1}^{\alpha} \frac{f(x)+2x}{x^2+1}dx + \int_{1}^{1/\alpha} \frac{f(1/x)-2x}{x^2+1}dx = 2\ln\alpha,\ \alpha>0.$$

29. Έστω η συνεχής στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f, για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει $x f(x) = \ln x - \int_{1}^{e} f(x)dx$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

30. Έστω συνάρτηση f με συνεχή 2^{η} παράγωγο και $f(0)=3$, $f'(0)=1$. Αν ισχύει $(2+\eta\mu x)f''(x) = (1-f(x))\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^4-5x^2+4$ και τον άξονα $x'x$.

2. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$, του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=2$.

3. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\sigma\varphi^2 x-\dfrac{1}{3}$, $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{3\pi}{4}$.

4. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=x\sqrt{|x^2-1|}$, $x'x$ και τις ευθείες $x=-2, x=2$.

5. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

$$f(x)=\begin{cases}-x-4 & , \; x\le -1\\ \dfrac{2x-1}{x+2} & , \; -1<x<1\\ 4/3-x & , \; x\ge 1\end{cases}$$

, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-2, x=2$.

6. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και τις ευθείες $x=0, x=5$.

7. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=x^4-10x^2+7$ και της ευθείας $y=-2$.

8. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ και $g(x)=3-x^2$.

9. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x-1)^2}$, την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x=3, x=\kappa$ με $\kappa>3$. Έπειτα να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\kappa\to+\infty}E(\kappa)$.

10. Έστω $f(x)=e^x$ και $g(x)=2x-x^2$. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x), g(x)$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία περνά από την αρχή των αξόνων και διαιρεί το χωρίο που περικλείεται από την $f(x)=-x^2+4x$ και τον άξονα $x'x$, σε δύο μέρη ισεμβαδικά.

12. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$. Μια παραβολή έχει κορυφή το μέσο μιας πλευράς του ορθογωνίου και διέρχεται από τα άκρα της απέναντι πλευράς. Να δειχθεί ότι η παραβολή χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο τμήματα που έχουν λόγο εμβαδών $2:1$.

13. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=e^{|x|}$ και της $g(x)=|ex|$.

14. Να δειχθεί ότι συναρτήσεις $f(x)=x^2-x$ και $g(x)=\ln x$, έχουν κοινή εφαπτομένη και έπειτα να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x), g(x)$ και την $y=2$.

15. Δίνεται η παραβολή $c:\ x^2=2py$, $p>0$. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την c, τον $x'x$ και από μια εφαπτομένη της c σε σημείο $P(x_0,y_0)$ με $x_0>0$, είναι ίσο με $E=\frac{1}{12}x_0y_0$.

16. i) Έστω $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε οι εφαπτομένες της f στα $x=0$ και $x=\alpha$, να είναι οι $y=2x$ και $y=-x+1$.

ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f και την εφαπτομένη της στο $x=0$.

iii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f και τις δύο παραπάνω εφαπτομένες.

17. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=-x^2$ και των παράλληλων ευθειών που παριστά η εξίσωση:

$$x^2+y^2-2xy-2x+2y=0.$$

18. i) Να δειχθεί ότι υπάρχουν συναρτήσεις, f άρτια και g περιττή, ώστε να ισχύει

$$f(x)+g(x)=e^x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x), g(x)$ και τις ευθείες $x=0, x=\lambda$ με $\lambda>0$.

iii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

19. Να δειχθεί ότι η $f(x)=\ln(x+1)+x$ αντιστρέφεται και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1}, τον $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

20. Έστω $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x-x^2$. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις f,g, τον $y'y$ και την ευθεία $x=1$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\alpha\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ ώστε η ευθεία $x=\alpha$ να χωρίζει το εμβαδόν σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

21. Έστω συνάρτηση $f(x)=3x^2-4x+3$ και σημείο της $A(x_0,f(x_0))$.

i) Αν το $x_0\in[1,3]$, να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(x_0)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο A και τις ευθείες $x=1, x=3$.

ii) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $E(x_0)$, καθώς και η θέση του A.

22. Αν ισχύει $2f(x-1)-\lambda f(1-x)=3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|\lambda|<2$, να βρεθεί ο τύπος της f. Στη συνέχεια να βρεθεί το $\lambda\in(0,2)$, αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, είναι $E=8$ τ.μ.

23. Έστω $f(x)=x^2-\lambda x$ και $g(x)=(4-\lambda)x$. Αν E_1 είναι το εμβαδόν που περικλείει η f και ο $x'x$, E_2 το εμβαδόν που περικλείει η f, η g και ο $x'x$ και ισχύει $E_1=\frac{1}{7}E_2$, να βρεθεί ο αριθμός $\lambda>0$.

24. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=x^2$, $g(x)=4x^2$ και της ευθείας $y=4$.

25. Να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)=x^2-5x+7$, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\alpha+3$.