



ΗΛΙΑΣΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής
Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Γ' Λυκείου
Παράγωγοι

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr

www.iliaskos.gr

Παράγωγος

Ορισμός της Παραγώγου

Ορισμός

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, έχουμε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Ο συμβολισμός της παραγώγου κατα Leibnitz είναι $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ που χρησιμοποιούμε, είναι μεταγενέστερος και οφείλετε στον Lagrange.

'Εστω ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f . Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο \mathbb{R} τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα. Τα πλευρικά αυτά όρια ονομάζονται αντίστοιχα αριστερή και δεξιά παράγωγος της f στο σημείο x_0 και σημειώνονται με $f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)$.

Παραγωγισμότητα και Συνέχεια

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο x_0 .

Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Είναι δηλαδή δυνατό, να είναι μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 (εσωτερικό του πεδίου ορισμού της) χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 τότε, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Προσοχή! Για να ελέγξουμε, επομένως, την παραγωγισμότητα μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 πρέπει προηγουμένως να έχουμε εξετάσει αν είναι συνεχής στο x_0 .

Παράγωγος Συνάρτηση

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A , ή απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και ονομάζουμε A_1 το σύνολο των σημείων του A , στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. (Τα σημεία του A_1 είναι εσωτερικά είτε ακραία σημεία του A). Τότε, σε κάθε σημείο x του A_1 αντιστοιχεί ο αριθμός $f'(x)$, ο παράγωγος αριθμός της f στο σημείο x . Ορίζεται έτσι μια νέα συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σε κάθε σημείο x του A_1 τιμή ίση με τον παράγωγο αριθμό της f στο σημείο x . Η νέα αυτή συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f . Συμβολίζεται με $f'(x)$ ή με $\frac{df(x)}{dx}$.

Η παράγωγος της f' αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

Επαγωγικά ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f , με $v \geq 3$ και συμβολίζεται με $f^{(v)}$. Δηλαδή $f^{(v)} = [f^{(v-1)}]$, $v \geq 3$.

Εύρεση τύπου Παράγωγου Συνάρτησης Κανόνες Παραγώγισης

Παράγωγοι μερικών βασικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^v	vx^{v-1}

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}, x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
α^x	$\alpha^x \ln \alpha$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$\ln x , x \neq 0$	$\frac{1}{x}, x \neq 0$
$\eta\mu x$	$\sigma\nu x$
$\sigma\nu x$	$-\eta\mu x$
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\nu^2 x}$
$\sigma\varphi x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Παράγωγοι συνθέσεων

$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$g^2(x)$	$2g(x)g'(x)$
$g^v(x)$	$v g^{v-1}(x)g'(x)$
$\sqrt{g(x)}, g(x) \geq 0$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}, g(x) > 0$
$\frac{1}{g(x)}$	$-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)}g'(x)$
$\alpha^{g(x)}$	$\alpha^{g(x)} \ln \alpha g'(x)$
$\ln(g(x)), g(x) > 0$	$\frac{g'(x)}{g(x)}, g(x) > 0$
$\ln g(x) , g(x) \neq 0$	$\frac{g'(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
$\eta\mu(g(x))$	$\sigma\nu(g(x))g'(x)$
$\sigma\nu(g(x))$	$-\eta\mu(g(x))g'(x)$
$\varepsilon\varphi(g(x))$	$\frac{g'(x)}{\sigma\nu^2(g(x))}$
$\sigma\varphi(g(x))$	$-\frac{g'(x)}{\eta\mu^2(g(x))}$

Κανόνες Παραγώγισης

- Παράγωγος Αθροίσματος - Διαφοράς:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

- Παράγωγος αριθμού επί συνάρτηση:

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$$

- Παράγωγος Γινομένου:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Παράγωγος Πηλίκου:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- Παράγωγος Σύνθεσης:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

- Παράγωγος Εκθετικής:

$$\begin{aligned} f(x)^{g(x)} &= e^{\ln f(x)g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))} \\ (f(x)^{g(x)})' &= (e^{g(x)\ln(f(x))})' = e^{g(x)\ln(f(x))}(g(x)\ln(f(x)))' \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

Προσοχή! Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους και κανόνες μόνο:

- Αν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης
- Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης αλλά μας λέει ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες
- Στις κλαδικές, σε όλα τα σημεία, εκτός από τα σημεία αλλαγής τύπου, όπου χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

Προσοχή! Αν δεν έχουμε κάποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραγώγου.

Μεθοδολογία υπολογισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης f , με τη βοήθεια του ορισμού, σ' ένα διάστημα A

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα τυχαίο σημείο x_0 του A .

- i. Πρώτα ελέγχουμε, αν δεν μας το δίνει η άσκηση, την συνέχεια της συνάρτησης στο A .

- ii. Έπειτα υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Η τιμή του ορίου είναι η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή $f'(x_0)$.
- iii. Αν η άσκηση ζητάει να βρούμε τον τύπο της $f'(x)$ τότε αντικαθιστούμε στη θέση του x_0 το x . Ο τύπος που προέκυψε είναι η παράγωγος της f στο διάστημα A .

Γεωμετρική ερμηνεία της Παραγώγου Εξίσωση Εφαπτομένης

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0 , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f , στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$.

Δηλαδή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Μεθοδολογίες

- i. Όταν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x' , τότε $f'(x) = 0$.
- ii. Όταν η εφαπτομένη είναι παράλληλη σε μια ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, τότε $f'(x_0) = \lambda$.
- iii. Όταν η εφαπτομένη είναι κάθετη σε μια ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, τότε $f'(x_0)\lambda = -1$.
- iv. Όταν η εφαπτομένη διέρχεται από ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$, τότε το σημείο αυτό πρέπει να επαληθεύει την εξίσωσή της. Δηλαδή: $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$.
- v. Όταν δύο συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο θα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$.
- vi. Όταν δύο συναρτήσεις f και g έχουν απλά κοινή εφαπτομένη, δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι σε κοινό σημείο. Πρέπει λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της f σ' ένα σημείο x_1 και την εξίσωση της εφαπτομένης της g σ' ένα σημείο x_2 . Για να ταυτί-

ζονται πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης και οι σταθεροί όροι των δύο εξισώσεων να είναι ίδιοι. Δηλαδή:

$$\varepsilon_f: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$$

$$\varepsilon_g: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Άρα προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}$$

Ρυθμός Μεταβολής

Ορισμός

Η ταχύτητα μεταβολής των τιμών $f(x)$ όταν η τιμή του x μεταβάλλεται, εκπροσωπείται από την παράγωγο $f'(x)$ και λέγεται συνήθως και ρυθμός μεταβολής του μεγέθους $f(x)$ ως προς τη μεταβολή του x (όταν φυσικά η f είναι παραγωγίσιμη στην αντίστοιχη θέση x).

Συνήθως η μεταβλητή θα είναι ο χρόνος t , αν δεν αναφέρεται άλλο μέγεθος. Πρέπει επομένως να προσέχουμε στην παραγώγιση.

π.χ. $(x^2)' = 2x$ Μεταβλητή παραγώγισης το x .

$(x^2(t))' = 2x(t)x'(t)$ Μεταβλητή παραγώγισης το t .

Προσοχή! Για να μην κάνουμε λάθος στην παραγώγιση με τη μεταβλητή παραγώγισης καλό θα ήταν να σημειώνουμε από την αρχή ως συναρτήσεις του χρόνου τα μεγέθη που μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου (π.χ. $x(t)$ και όχι x).

Προσοχή! Καλό θα ήταν, όταν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 να τη σημειώνουμε στα μεγέθη (π.χ. $x(t_0)$) για να καταλαβαίνουμε ότι είναι αριθμός και όχι συνάρτηση.

Τα προβλήματα με τους ρυθμούς μεταβολής, για αποτελεσματικότερη μελέτη, τα χωρίζουμε σε τρεις κατηγορίες:

- Τα γεωμετρικά προβλήματα.
- Τα προβλήματα κίνησης.
- Τα προβλήματα με γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Μεθοδολογία επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων

- i. Φτιάχνουμε, όπου κρίνουμε απαραίτητο, ένα απλό σχήμα.
- ii. Προσδιορίζουμε όλα τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη. Φροντίζουμε όλα τα μεταβλητά μεγέθη να τα εκφράσουμε ως συναρτήσεις του μεγέθους από το οποίο εξαρτώνται (π.χ. το χρόνο $x(t)$).
- iii. Γράφουμε όλους τους ρυθμούς μεταβολής ως παραγώγους προσέχοντας τα πρόσημα (θετικό αν αυξάνεται, αρνητικό αν μειώνεται).
- iv. Γράφουμε όλες τις σχέσεις που συνδέουν τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη ή δημιουργούμε καινούργιες σχέσεις από τα δεδομένα του προβλήματος.
- v. Παραγωγίζουμε τις σχέσεις για να δημιουργήσουμε τους ζητούμενους ρυθμούς μεταβολής.
- vi. Όταν έχουμε ή ζητάμε στοιχεία για συγκεκριμένη χρονική στιγμή ή θέση, θέτουμε στους γενικούς τύπους που δημιουργήσαμε πριν τη συγκεκριμένη στιγμή ή θέση (όπου $t = t_0$ κ.λπ..) και αντικαθιστούμε προσέχοντας τις μονάδες.

Βασικοί τύποι από τη γεωμετρία

- Περίμετρος κύκλου: $L = 2\pi r$
- Εμβαδόν κύκλου: $E = \pi r^2$
- Εμβαδόν τριγώνου: $E = \frac{1}{2} \beta v$
- Εμβαδόν τετραγώνου: $E = \alpha^2$
- Εμβαδόν παραλληλογράμμου: $E = \beta v$
- Εμβαδόν τραπεζίου: $E = \frac{B + \beta}{2} v$
- Εμβαδόν επιφάνειας κύβου: $E = 6\alpha^2$
- Όγκος Κύβου: $V = \alpha^3$
- Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας: $E = 4\pi r^2$
- Όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Εμβαδόν επιφάνειας κώνου: $E = \pi r\lambda + \pi r^2$
- Όγκος κώνου: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

- Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου: $E = 2\pi r^2 + 2\pi r v$
- Όγκος κυλίνδρου: $V = \pi r^2 v$
- Όγκος πυραμίδας: $V = \frac{1}{3} E_{\text{βασης}} v$

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων κίνησης

Δεν ξεχνάμε ότι:

- $x(t)$ εξίσωση απομάκρυνσης
 - $v(t) = x'(t)$ εξίσωση ταχύτητας
 - $\alpha(t) = v'(t) = x''(t)$ εξίσωση επιτάχυνσης
- i. Φτιάχνουμε ένα απλό σχήμα και προσδιορίζουμε τη θετική φορά, συνήθως προς τα δεξιά.
 - ii. Προσδιορίζουμε τις διάφορες χρονικές στιγμές που μας δίνει το πρόβλημα, έχοντας υπόψιν μας ότι:
 - Το σώμα επιταχύνεται όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν το ίδιο πρόσημο.
 - Το σώμα επιβραδύνεται όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετο πρόσημο.
 - Το σώμα σταματάει αν η ταχύτητα γίνει μηδέν. Θα εξακολουθήσει να κινείται, αν έχει επιτάχυνση προς την αντίθετη κατεύθυνση.
 - iii. Το $x(t)$ μας δίνει την θέση του κινητού από ένα σημείο (συνήθως την αρχή των αξόνων, που είναι και η αρχή της κίνησης) και όχι το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό. Αν θέλουμε να βρούμε το συνολικό διάστημα που διήνυσε χρησιμοποιούμε το σχήμα προσθέτοντας όλες τις απόλυτες τιμές των αποστάσεων που διήνυσε το κινητό σε όλες τις χρονικές στιγμές.

Π.Χ. $\frac{O}{t_2} \underline{\hspace{2cm}} t_1$

Η συνολική απόσταση που διήνυσε το κινητό είναι $S = 2|x(t_1)| + |x(t_2)|$

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων με γραφική παράσταση συνάρτησης f

- i. Σχεδιάζουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- ii. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο M το οποίο κινείται στη γραφική παράσταση της f . Το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $M(x(t), y(t)) = M(x(t), f(x(t)))$.
- iii. Αν μας ζητάει το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης ή την ταχύτητα του σημείου στον άξονα x' , θα βρίσκουμε την $x'(t)$.
- iv. Αν μας ζητάει το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης ή την ταχύτητα του σημείου στον άξονα y' , θα βρίσκουμε το $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$.
- v. Αν μας ζητάει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M με τον άξονα x' , θα παραγωγίζουμε τη σχέση $(\varepsilon\varphi\theta(t))' = (f'(x(t)))' \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sigma\nu^2\theta(t)} = f''(x(t))x'(t)$.
Εδώ πιθανόν να χρειαστούμε τον τύπο $\frac{1}{\sigma\nu^2\theta(t)} = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t)$.

Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x .

Προσοχή! Όταν η παράγωγος μιας συνάρτησης f μηδενίζεται σ'ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f δεν σημαίνει ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Προσοχή! Το Θεώρημα Rolle μας βεβαιώνει απλά και μόνο την ύπαρξη σημείου ξ του (α, β) στο οποίο είναι $f'(\xi) = 0$. Δεν βρίσκει, όμως, την τιμή του ξ .

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ . Ονομάζουμε παράγουσα συνάρτηση F , ή αρχική συνάρτηση της f , ή αντιπαράγωγο της f , στο διάστημα Δ , κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σ'ένα διάστημα Δ , τότε υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις της μορφής $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, αρχικές της f .

Μεθοδολογία ασκήσεων Ύπαρξης Ρίζας Εξίσωσης

Όταν σε μια άσκηση μας δίνουν μια εξίσωση, της οποίας απαιτείται η ύπαρξη ρίζας, θα μεταφέρουμε τους όρους στο ένα μέλος και θα θέτουμε συνάρτηση $h(x)$.

Οπότε αν η άσκηση ζητά:

- **Μια τουλάχιστον ρίζα**

Θα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας ρίζας:

- Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano, αν δίνεται διάστημα.
- Βρίσκοντας προφανή ρίζα.
- Αν το Σύνολο Τιμών περιλαμβάνει το 0.
- Εφαρμόζοντας Θεώρημα Rolle σε μια παράγουσα H της $h(x)$. Δηλαδή θα βρίσκουμε μια συνάρτηση $H(x)$, για την οποία ισχύει $H'(x) = h(x)$.

- **Μια το πολύ ρίζα**

Θα δείχνουμε ότι

- Η h είναι γνήσια μονότονη ή 1-1 ή αντιστρέψιμη.
- Θεωρούμε ότι η h έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2$, θα καταλήγουμε σε άτοπο, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$. Συνήθως το άτοπο στηρίζεται στο ότι η h' δεν μπορεί να έχει ρίζα.

- **Μια ακριβώς ρίζα**

Θα εξασφαλίζουμε πρώτα το τουλάχιστον μία και μετά αποδεικνύουμε το πολύ μία.

- **κ τουλάχιστον ρίζες**

Θα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κ ριζών, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano σε κ διαστήματα ή βρίσκοντας κ προφανείς ρίζες.

- **κ το πολύ ρίζες**

Υποθέτουμε ότι έχει $k + 1$ ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα που ορίζονται από τις ρίζες καταλήγουμε σε άτοπο.

- κ ακριβώς ρίζες

Θα εξασφαλίζουμε πρώτα το τουλάχιστον και μετά αποδεικνύουμε το πολύ κ.

Βασικές παράγουσες συναρτήσεις για ασκήσεις

- $f'(x) + cf(x) = 0$

Πολλαπλασιάζουμε με το e^{cx} ,

$$e^{cx}f'(x) + ce^{cx}f(x) = 0 \Rightarrow (e^{cx}f(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = e^{cx}f(x)$.

- $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$

Πολλαπλασιάζουμε με το $e^{g(x)}$,

$$e^{g(x)}f'(x) + g'(x)e^{g(x)}f(x) = 0 \Rightarrow (e^{g(x)}f(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = e^{g(x)}f(x)$.

- $f'(x) + cf(x) = 0, f(x) \neq 0$

Επειδή $f(x) \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε με την $f(x)$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + c = 0 \Rightarrow (\ln|f(x)| + cx)' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = \ln|f(x)| + cx$.

- $f'(x) + g'(x)f(x) = 0, f(x) \neq 0$

Επειδή $f(x) \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε με την $f(x)$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) = 0 \Rightarrow (\ln|f(x)| + g(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = \ln|f(x)| + g(x)$.

- $g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = 0, g(x) \neq 0$

Επειδή $g(x) \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε με το $g^2(x)$,

$$\frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

- $xf'(x) + vf(x) = 0$

Πολλαπλασιάζουμε με το x^{v-1} ,

$$x^v f'(x) + v x^{v-1} f(x) = 0 \Rightarrow (x^v f(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = x^v f(x)$.

- $f''(x) + f(x) = 0$

Πολλαπλασιάζουμε με το $2f'(x)$,

$$2f'(x)f''(x) + 2f'(x)f(x) = 0 \Rightarrow ((f'(x))^2 + f^2(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = (f'(x))^2 + f^2(x)$.

- $f''(x) + (f'(x))^2 = 0$

Πολλαπλασιάζουμε με το $e^{f(x)}$,

$$e^{f(x)}f''(x) + f'(x)e^{f(x)}f'(x) = 0 \Rightarrow (e^{f(x)}f'(x))' = 0.$$

Θέτουμε $h(x) = e^{f(x)}f'(x)$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην χορδή AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Προσοχή! Οι συνθήκες συνέχειας στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγισμότητας στο (α, β) είναι ικανές για την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, όχι όμως και αναγκαίες.

Πόρισμα

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Τότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.

Παρατήρηση

Τα Θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής έχουν πολλά κοινά. Στην πραγματικότητα το Θεώρημα Rolle είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, όταν $f(\alpha) = f(\beta)$. Επομένως στις περισσότερες ασκήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Rolle ή το Θεώρημα Μέσης Τιμής αν επιλέξουμε κατάλληλη συνάρτηση.

Συνήθως χρησιμοποιούμε Θεώρημα Rolle για απόδειξη ισοτήτων και το Θεώρημα Μέσης Τιμής για απόδειξη ανισοτήτων.

Μεθοδολογίες

- 'Όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$ στο (α, β) που να επαληθεύουν μια ισότητα, χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v κατάλληλα υποδιαστήματα, ανάλογα με τα δεδομένα του ζητήματος και διαδοχικά εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Αν η σχέση είναι $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \dots + \kappa_v f'(\xi_v) = \dots$, τότε χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v υποδιαστήματα πλάτους $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$.

Αν η σχέση είναι $\frac{\kappa_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\kappa_2}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{\kappa_v}{f'(\xi_v)} = \dots$, τότε χωρίζουμε το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$ με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών ή του Θεωρήματος Bolzano σε v υποδιαστήματα πλάτους $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$.

- 'Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση στην οποία παρουσιάζεται παράγωγος αριθμός ανώτερης τάξης $f^{(κ)}(\xi)$, χωρίζουμε το αρχικό διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε για τις συναρτήσεις f', f'', f''', \dots διαδοχικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής ή το Θεώρημα Rolle.
- 'Όταν έχουμε κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο συνάρτηση f' , με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής, τις μεταφέρουμε στην παράσταση $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ή στην $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ και λαμβάνουμε συμπεράσματα για κάποιες εικόνες της f ή για την συνάρτηση f γενικότερα.
- 'Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση της μορφής

$m \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq M$, αντικαθιστούμε το $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ με $f'(\xi)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής και στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση $m \leq f'(\xi) \leq M$ χρησιμοποιώντας το δεδομένο $\alpha < \xi < \beta$.

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα Δ . Δηλαδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$.

Πόρισμα

Έστω f και g συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα Δ . Αν για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε υπάρχει σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Προσοχή! Η παρακάτω απόδειξη αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας σε ασκήσεις.

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) &\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = e^{-x}f(x) \\ &\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-x}f(x) = c \\ &\Leftrightarrow f(x) = ce^x \end{aligned}$$

Μελέτη Συνάρτησης

Μονοτονία - Ακρότατα

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ . Τότε ισχύουν:

- Η f είναι αύξουσα στο Δ , αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Η f είναι φθίνουσα στο Δ , αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι:

- $f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Προσοχή! Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν προκύπτει κατ' ανάγκη ότι $f'(x) > 0$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , η παράγωγος της όμως μηδενίζεται για $x = 0$ εφόσον $f'(x) = 3x^2$.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (ή γνησίως φθίνουσα στο Δ) τότε ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ($f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$).

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ . Αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και δεν υπάρχει διάστημα $I \subseteq \Delta$ ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, (δηλαδή η ισότητα $f'(x) = 0$ επαληθεύεται μόνο για μεμονωμένα σημεία του Δ) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Αντίστοιχα αν είναι $f'(x) \leq 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ (ή $f'(x) < 0$), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$).

Πόρισμα

'Εστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta)$ όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta)$ (ή $f'(x) < 0$), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$).

Παρατήρηση

Τονίζεται ότι για την χρήση των παραπάνω θεωρημάτων - προτάσεων, απαιτείται το πεδίο ορισμού της συνάρτηση f να είναι διάστημα. Αν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, την μελετούμε ως προς τη μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

Ορισμός

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

Ορισμός

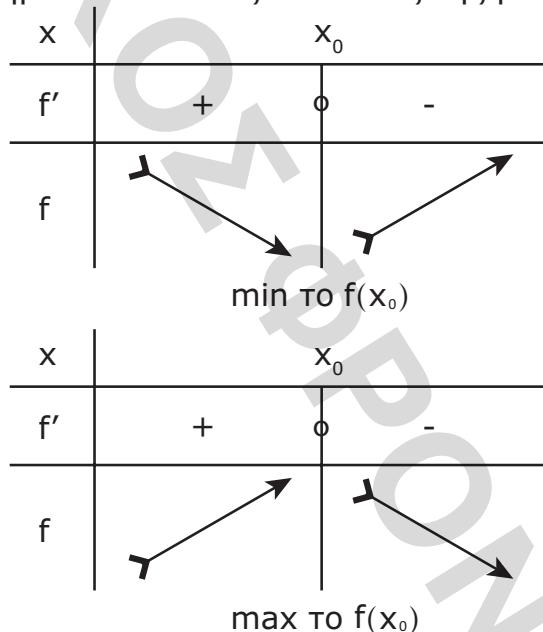
Κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ή δεν ορίζεται η f' .

Παρατηρήσεις

Θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f είναι:

- τα κρίσιμα σημεία της f
- τα άκρα κλειστών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της.

Για να είναι ένα κρίσιμο σημείο τοπικό ακρότατο θα πρέπει εκατέρωθεν του σημείου να αλλάζει το είδος της μονοτονίας. Για παράδειγμα



Για τα παραπάνω x_0 θα βγάζαμε τα ίδια συμπεράσματα για τα ακρότατα αν δεν υπήρχε η $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις

- i. Όλα τα ακρότατα είναι τοπικά.
- ii. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι το ολικό ελάχιστο.
- iii. Είναι δυνατόν ένα τοπικό μέγιστο να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Θεώρημα Fermat

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Αν ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι θέση ακροτάτου και υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0 , τότε η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ παράλληλη προς τον άξονα x' .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ισχύει $f'(x_0) \neq 0$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f .

Μεθοδολογίες

- Για να κάνουμε μελέτη μονοτονίας - ακροτάτων μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της ή σ' ένα διάστημα Δ :
 - Βρίσκουμε την παράγωγο της f .
 - Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
 - Κάνουμε πίνακα μεταβολών.
 - Σημειώνουμε τα ακρότατα ελέγχοντας αν στα κρίσιμα σημεία εκατέρωθεν αλλάζει το είδος της μονοτονίας και αν στο πεδίο ορισμού υπάρχουν διαστήματα με κλειστά άκρα.
- Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης θα κάνουμε:
 - Μελέτη μονοτονίας.

- Θα βρίσκουμε το σύνολο τιμών σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα στα οποία η f είναι ↑ ή ↓ παίρνοντας υπόψιν μας ότι:

$$f: [\alpha, \beta] \Rightarrow f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$$

$$f: [\alpha, \beta] \Rightarrow f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$$

$$f: (\alpha, \beta) \Rightarrow f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta} f(x))$$

$$f: (\alpha, \beta) \Rightarrow f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x \rightarrow \beta} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x))$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα είναι η ένωση των διαστημάτων των συνόλων τιμών που προέκυψαν.

- iii. 'Όταν η άσκηση μας ζητά να λυθεί η εξίσωση, θα:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο ένα μέλος και θέτουμε συνάρτηση $h(x)$.
- Βρίσκουμε προφανείς ρίζες της h για το διάστημα που μας δίνει η άσκηση ή στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της h .
- Κάνουμε μελέτη μονοτονίας.

Οι προφανείς ρίζες είναι μοναδικές, όταν η συνάρτηση είναι γνησιώδης μονότονη ή εμφανίζει ολικό ακρότατο στην ρίζα, στο διάστημα που βρίσκεται η κάθε μια.

- iv. 'Όταν η άσκηση μας ζητά να αποδείξουμε ανίσωση, θα κάνουμε μελέτη μονοτονίας (η ανίσωση θα αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα της μονοτονίας), ή θα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.
- v. 'Όταν έχουμε δεδομένη ανίσωση σε μια άσκηση θα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Fermat. Δηλαδή, θα:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο ένα μέλος και θέτουμε συνάρτηση $h(x)$.
- Βρίσκουμε την ή τις τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται η $h(x)$.

Οπότε προκύπτει μια ανίσωση της μορφής $h(x) \leq h(x_0)$ ή $h(x) \geq h(x_0)$. Επομένως η h εμφανίζει ακρότατο στο x_0 . Άρα σύμφωνα με το

Θεώρημα Fermat $f'(x_0) = 0$.

Κυρτότητα - Σημεία Καμπής

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ ($f \cup \Delta$), αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ($f \cap \Delta$), αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

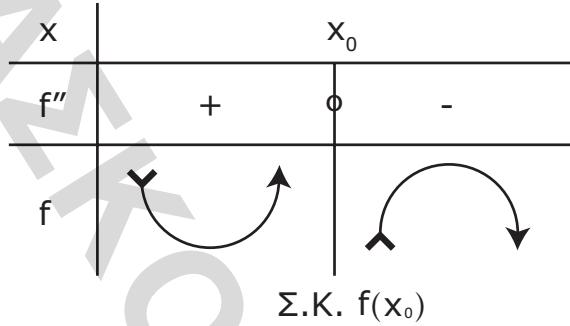
Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις

Θέσεις πιθανών σημείων καμπής είναι τα κρίσιμα σημεία της f' , δηλαδή τα σημεία που μηδενίζεται ή δεν ορίζεται η f'' .

Για να είναι ένα κρίσιμο σημείο, σημείο καμπής θα πρέπει εκατέρωθεν του σημείου να αλλάζει το πρόσημο της f'' . Για παράδειγμα



Προσοχή! Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν προκύπτει κατ' ανάγκη ότι $f''(x) > 0$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο \mathbb{R} , η δεύτερη παράγωγος της ίσως μηδενίζεται για $x = 0$ εφόσον $f''(x) = 12x^2$.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και κυρτή στο Δ (ή κοιλη στο Δ) τότε ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ($f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$).

Προσοχή! Αν μας λέει η άσκηση ότι η συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ (ή κοιλη σ' ένα διάστημα Δ) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $f' \mid \Delta$ (ή $f' \mid \Delta$). Αν επιπλέον μας λέει ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $f''(x) \geq 0$ (ή $f''(x) \leq 0$).

Παρατηρήσεις

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της f σ' ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$ θα είναι πάντα από κάτω από την γραφική παράσταση της f .

Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτο-

μένη της f σ' ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$. Θα είναι πάντα από πάνω από την γραφική παράσταση της f .

Κανόνας De L'Hospital

Ο κανόνας De L'Hospital είναι μια απλή και εύχρηστη μέθοδος υπολογισμού ορίων, στις περιπτώσεις που παρουσιάζεται απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Θεώρημα

'Εστω ότι για τις συναρτήσεις f και g ικανοποιούνται οι επόμενες προϋποθέσεις:

- Τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ είναι και τα δύο ίσα με 0 ή και τα δύο ίσα με $\pm\infty$.
- Υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \Delta$ του x_0 , τέτοια ώστε σε κάθε σημείο x αυτής με $x \neq x_0$, να είναι οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες, με $g'(x) \neq 0$.
- Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Τότε, θα υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και θα είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Στην περίπτωση που οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται και από τις παραγώγους f' και g' , ο προηγούμενος κανόνας μπορεί να εφαρμοστεί και για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Παρατήρηση

Ο κανόνας του De L'Hospital εξακολουθεί να ισχύει και όταν το x_0 είναι $\pm\infty$, δηλαδή όταν το $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$, αρκεί οι συναρτήσεις f , g να είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο διάστημα της μορφής $(M, +\infty)$ ή της μορφής $(-\infty, M)$ αντίστοιχα, με $g'(x) \neq 0$ στο διάστημα αυτό. Αν πάλι οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο ανοιχτό διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ με $g'(x) \neq 0$ στο διάστημα Δ , ο κανόνας εξακολουθεί να ισχύει για τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ φτάνει φυσικά να ικανοποιούνται και οι υπόλοιπες προϋποθέσεις.

Προσοχή! Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα De L'Hospital πρέπει να γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Προσοχή! Όταν σε θεωρητικές ασκήσεις μας λένε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κανόνα De L'Hospital μία μόνο φορά, εκτός αν γνωρίζουμε ότι η f'' είναι συνεχής.

Προσοχή! Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 , με $g'(x_0) \neq 0$ και $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού κάθε μιας των συναρτήσεων f και g) τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Μεθοδολογίες

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κανόνα De L'Hospital για να υπολογίσουμε όρια στα οποία εμφανίζονται και άλλες μορφές απροσδιοριστίας.

i. $0 \cdot (\pm\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) \stackrel{0 \cdot (\pm\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$$

ii. 0^0 ή $(+\infty)^{\pm\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \stackrel{0^0 \text{ ή } (+\infty)^{\pm\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln(f(x))g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)\ln(f(x))}$$

Υπολογίζουμε πρώτα το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\ln(f(x))$ και μετά το όριο της εκθετικής.

Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

Η ευθεία $x = \alpha$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f , αν και μόνο αν, μία τουλάχιστον από τις οριακές τιμές $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$ απειρίζεται, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \pm\infty$.

Παρατηρήσεις

i. Κατακόρυφες ασύμπτωτες ψάχνουμε στα ανοιχτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f .

- ii. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει πολλές κατακόρυφες ασύμπτωτες (όσα είναι τα ανοιχτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού).

Οριζόντια Ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$), αν και μόνο αν, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ (ή αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$).

Πλάγια Ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$), αν και μόνο αν, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$ (ή αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$).

Πόρισμα

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$), αν και μόνο αν, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \in \mathbb{R}$ (ή αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \in \mathbb{R}$).

Παρατηρήσεις

- Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι ειδική περίπτωση της πλάγιας όταν το $\alpha = 0$.
- Οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες ψάχνουμε, αν το πεδίο ορισμού περιέχει κάποιο άπειρο.
- Μπορούμε να έχουμε το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.
- Δεν μπορούμε να έχουμε οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο ίδιο άπειρο.

Προσοχή! Το Πεδίο Ορισμού της f είναι αυτό που θα μας δώσει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για το τι ασύμπτωτες πρέπει να ψάξουμε και που.

Μελέτη Συνάρτησης

Η μελέτη μιας συνάρτησης f περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
- Ελέγχουμε τις συμμετρίες (αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιπτή) και την περιοδικότητα της συνάρτησης f .

- iv. Βρίσκουμε την παράγωγο f' και κατασκευάζουμε τον πίνακα των προσήμων της. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
- v. Βρίσκουμε την παράγωγο f'' και κατασκευάζουμε τον πίνακα των προσήμων της. Με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.
- vi. Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.).
- vii. Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της f και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f .
- viii. Για καλύτερη σχεδίαση της c_f , βρίσκουμε τα σημεία τομής της f με τους άξονες και κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

Παρατηρήσεις

- i. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι άρτια, τότε η c_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι περιπτή, η c_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.
- ii. Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της c_f σ' ένα διάστημα πλάτους T .

Ασκήσεις για λύση

1. Να βρεθεί η παράγωγος των:

i. $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$

ii. $f(x) = 2x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}$

iii. $f(x) = \ln x \cdot \eta \mu x$

iv. $f(x) = \left(x^2 - \frac{3}{x^5} \right) (\sigma \varphi x - 3x)$

v. $f(x) = (e^x - \sqrt[5]{x^3})(\eta \mu x - x)$

vi. $f(x) = (e^x - \eta \mu x)(\sigma v v x + x)$

vii. $f(x) = \frac{x^2}{\eta \mu x}$

viii. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 6}{2x^2 + 1}$

ix. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{\sigma \varphi x}$

x. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - 5x}{x^2 - 6}$

xi. $f(x) = \sqrt{2x^3 - 2x + 4}$

xii. $f(x) = \eta \mu (2x^4 - 5x^2 + 6)$

xiii. $f(x) = \varepsilon \varphi (\ln x)$

xiv. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

xv. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e^x)}$

xvi. $f(x) = (\sigma v v x)^{\ln x}$

xvii. $f(x) = (x^2 + x)^{\eta \mu x}$

xviii. $f(x) = (\sqrt{x+1})^{e^x}$

xix. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

xx. $f(x) = (\ln x)^{x^2 + 2x}$

xxi. $f(x) = 4e^{\varepsilon \varphi (x^2 - x)}$

2. Έστω η $f(x) = x^4 + x^2 - 3$. Να βρεθούν τα σημεία x_0 στα οποία η εφαπτομένη της f να είναι:
- παράλληλη στον x' .
 - κάθετη στην $\delta: x + 6y - 2 = 0$.
 - να περνά από το σημείο $B(0, -7)$.
3. Έστω $f(x) = 3x^2 + \alpha x + \beta$. Να βρεθούν τα α, β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο της $A(1, 4)$ να είναι:
- παράλληλη στον x' .
 - κάθετη στη $\delta: x + y = 1$.
 - να περνά από το σημείο $B(2, 6)$.
4. Να βρεθεί σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + 7x - 6$, σχηματίζει η εφαπτομένη γωνία 45° με τον άξονα x' και να βρεθεί η εξίσωση αυτής της εφαπτομένης.
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x + 3$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία $6x - 2y + 1 = 0$.
6. Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$ και ε_f εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$, που τέμνει τον x' στο A και τον y' στο B .
- Να δειχθεί ότι το M είναι μέσο της AB .
 - Να δειχθεί ότι το τρίγωνο AOB έχει σταθερό εμβαδό.
7. Να δειχθεί ότι στο κοινό τους σημείο οι $f(x) = 2\sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{4}{x+1}$ έχουν κάθετες εφαπτομένες.
8. Δίνονται $f(x) = \alpha x^2 - x$ και $g(x) = e^{-\alpha x}$. Να βρεθεί ο α , ώστε η εφαπτομένη της g στο x_0 να εφάπτεται και στην f .
9. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x) = (\alpha + 2)x^2 - 5\alpha x + 7x - 30$ στο σημείο $M(1, f(1))$ αυτής, να είναι κάθετη στην ευθεία $2x + y = 6$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$ και το σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι:
- η εφαπτομένη της c_f στο M έχει με τη c_f και άλλο κοινό σημείο το N .
 - η κλίση της c_f στο N είναι τετραπλάσια της κλίσης της c_f στο M .

11. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = \ln x$ που περνά από την αρχή των αξόνων.
12. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι συναρτήσεις και $g(x) = e^x - \beta$, να έχουν στο κοινό τους σημείο $x_0 = 0$ κοινή εφαπτομένη.
13. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+1}$ και $g(x) = \frac{2}{x}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη σε σημείο της ευθείας με εξίσωση $x = 1$.
14. Έστω f παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της $g(x) = \frac{e^{f(x)}}{x}$ στο $x_0 \neq 0$ είναι παράλληλη στον άξονα x' να δειχθεί ότι η f και η $h(x) = \ln|x|$ έχουν στο x_0 παράλληλες εφαπτομένες.
15. Να αποδειχθεί ότι από το σημείο $M(\lambda, -2)$ άγονται κάθετες εφαπτομένες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{8}x^2$.
16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης, που διέρχεται από το σημείο $M(3, 16)$.
17. Άν $f(g(x)) = e^x + x$, όπου f, g παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις με $\varepsilon: y = 2x - 1$ η εφαπτομένη της g στο $x = 0$, να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο $x_0 = -1$.
18. Άν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(x^2 - 1) - xf(x + 1) = 2x$ για κάθε $x \in R$, να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της στο $x_1 = 0$ εφάπτεται στη γραφική της παράσταση και στο $x_2 = 2$.
19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με την ιδιότητα $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in R$.
 - Να αποδειχθεί ότι $f'(3) = 5$.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.
20. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

21. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - x + 5$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.
22. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ να εφάπτεται της $3x - y - 5 = 0$ στο σημείο $M(0, -3)$ και της ευθείας $x - y - 5 = 0$ στο σημείο $N(4, -1)$.
23. Μια βιομηχανία που παράγει x μονάδες ενός προϊόντος έχει έσοδα $E(x) = x^2 + 4x$ χιλ. ευρώ ανά μονάδα προϊόντος. Αν το κόστος είναι $K(x) = 2x^2 - 8x - 60$ χιλ. ευρώ ανά μονάδα προϊόντος, να βρεθεί το διάστημα που ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.
24. Η επιφάνεια ενός κυλίνδρου μειώνεται με ρυθμό $112 \text{ m}^2/\text{s}$, ενώ το ύψος του κυλίνδρου παραμένει σταθερό και ίσο με 10 m . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κυλίνδρου, κατά τη στιγμή που η ακτίνα της βάσης ρ είναι 2 m . Επίσης να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους L της βάσης εκείνη τη χρονική στιγμή. Δίνεται $E_{\kappa\lambda} = 2\pi\rho\nu + 2\pi\rho^2$, $V_{\kappa\lambda} = \pi\rho^2\nu$.
25. Ένας κουβάς με ακτίνα βάσης $\rho = 5 \text{ dm}$, ακτίνα στεφάνης $R = 10 \text{ dm}$ και ύψος $h = 10 \text{ dm}$, αρχίζει να γεμίζει με ρυθμό $10\pi \text{ dm}^3/\text{min}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας x του νερού, τη χρονική στιγμή που ο κουβάς γεμίζει. Δίνεται για τον κώνο $E_{\kappa\omega\nu} = \pi\rho\lambda + \rho^2\pi$, $V_{\kappa\omega\nu} = \frac{1}{3}\pi\rho^2\nu$ και για τον κόλουρο κώνο $V = \frac{\pi}{3}(\rho^2 + \rho x + x^2)\nu$.
26. Οι κάθετες πλευρές OA , OB ορθογωνίου AOB μεταβάλλονται, έτσι ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με $E = 72 \text{ m}^2$. Αν η πλευρά OA αυξάνει με ρυθμό 2 m/s , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς OB κατά τη χρονική στιγμή t που το AOB γίνεται ισοσκελές. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ η πλευρά $OB = 24 \text{ m}$, να βρεθεί η χρονική στιγμή t που το AOB γίνεται ισοσκελές.
27. Η απομάκρυνση από το $O(0,0)$ ενός σώματος που κινείται στον $x'x$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = 12\ln(t+1) - t^2$.
- Να δειχθεί ότι τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ το σώμα βρισκόταν στην αρχή των αξόνων, αλλά όχι σε ηρεμία.

- ii. Προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα;
- iii. Να βρεθεί πότε το σώμα επιβραδύνεται.
- iv. Να βρεθεί το διάστημα S που κάλυψε το σώμα κατά τα 5 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του.
28. Το κάτω áκρο A μιας σκάλας 5 m γλιστράει με ταχύτητα $v_A = 2 \text{ m/s}$. Τη στιγμή που το áνω áκρο απέχει 4 m από το δάπεδο να βρεθούν:
- Η ταχύτητα v_B με την οποία γλιστράει το áνω áκρο B.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της οξείας γωνίας θ που σχηματίζει η οξεία γωνία με το δάπεδο.
 - Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν η σκάλα και ο τοίχος.
29. Ένα μπαλόνι σηκώνεται κατακόρυφα από το έδαφος σε απόσταση 50 m μπροστά από έναν παρατηρητή. Αν η ταχύτητα του μπαλονιού είναι $v = 5 \text{ m/s}$ και το μπαλόνι σκάει όταν φτάσει σε ύψος $h = 50 \text{ m}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ , με την οποία κοιτάει ο άνθρωπος το μπαλόνι τη χρονική στιγμή t που αυτό σκάει. Επίσης να βρεθεί η χρονική αυτή στιγμή.
30. Σε κύκλο ακτίνας $\rho = 1 \text{ m}$ θεωρούμε σταθερό σημείο A και μεταβλητά σημεία B, Γ που απομακρύνονται από το A με ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$ έχοντας αντίθετη φορά. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABΓ, τη χρονική στιγμή που γίνεται ισόπλευρο.
31. Ένα μπαλόνι αφήνεται από ύψος 10 m σε απόσταση 4 m μπροστά από φανοστάτη του ίδιου ύψους 10 m. Αν η ταχύτητα της πτώσης του μπαλονιού M είναι 5 m/min , να βρεθεί η ταχύτητα της σκιάς Σ του μπαλονιού στο έδαφος, όταν το μπαλόνι φτάσει σε ύψος 5 m.
32. Σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 5$. Αν η τετμημένη $\mu > 0$ του M έχει ταχύτητα $v_x = 5 \text{ m/s}$, να βρεθούν:
- Η ταχύτητα v_y της τεταγμένης του σημείου M, κατά τη χρονική στιγμή t_0 που η απόσταση $(OM) = 5 \text{ m}$ και η τετμημένη $\mu > 0$.
 - Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMB τη στιγμή t_0 όπου $A(\mu, 0)$ και $B(0, f(\mu))$.

33. Κινητό βρίσκεται την χρονική στιγμή $t=0$ s στην αρχή των αξόνων και αρχίζει να κινείται πάνω στο x'x με ταχύτητα $v=-2$ m/s. Σε κάθε χρονική στιγμή φέρνουμε εφαπτομένη από το K στην $f(x)=\sqrt{x}$ και έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ το σημείο επαφής. Να βρεθούν:
- Η συνάρτηση θέσης του κινητού.
 - Η ταχύτητα της τετμημένης α του σημείου A.
 - Η στιγμή που η εφαπτομένη σχηματίζει $\theta=45^\circ$ γωνία με τον x'x.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ κατά την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 .
34. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x)=x^3+2x-1$
 - $f(x)=x^3+3x^2-9x$
 - $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2$
35. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$
 - $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$
 - $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x\eta\mu x-\sigma\nu\nu x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
36. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x)=x \ln^2 x$
 - $f(x)=x^{\sqrt{x}}$
37. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1-\eta\mu x, & x \in [-\pi, 0] \\ e^x - x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

38. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ στο \mathbb{R} , ισχύουν $f(x) > 0, f''(x)f(x) > (f'(x))^2$ και $f(0) = 1$, να δειχθεί ότι είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$.
39. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = -4\alpha x^3 + 3\alpha^3 x^2 + 6\alpha^2 x + 1$ να έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$, καθώς και το είδος του ακρότατου.
40. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} - 7x^2 + (3\alpha + 14)x$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
41. Να βρεθεί ο $\alpha > 0$ ώστε η ελάχιστη τιμή της $f(x) = \frac{1}{\alpha}x + \alpha - \ln(\alpha x)$ να γίνεται ελάχιστη.
42. Να λυθεί η εξίσωση $x - 1 = e^{x-2}$.
43. Να λυθεί η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 = 6\sin x - 6$.
44. Να λυθεί η εξίσωση $6^x = 3^x + 4^x + 5^x$.
45. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ έχουν ένα και μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.
46. Έστω f, g παραγωγίσιμες με $f(e) = g(e)$ και $f'(x) + x = g'(x) + e \ln x$ για κάθε $x > 0$. Να δειχθεί ότι οι f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.
47. Να αποδειχθεί ότι:
- $x \ln x \geq x - 1$ για κάθε $x > 0$.
 - $\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} > 1$ για κάθε $x < 0$.
 - $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x > 0$.
48. Να αποδειχθεί ότι $\eta \mu x - 1 \geq \ln(\eta \mu x)$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.
49. Να αποδειχθεί ότι $6x^2 \ln x + 6x \leq 2x^3 + 3x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.
50. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$.
51. Άν $2 < \alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\beta^{\alpha+1} < \alpha^{\beta}$.

52.

- i. Να βρεθεί η σχετική θέση των $g(x) = \ln x^e$ και $h(x) = -\frac{1}{x}$.
ii. Κατόπιν να βρεθούν οι πιθανοί τύποι της συνεχούς f στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = ex \ln x - 2f(x)$ για κάθε $x > 0$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$.

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f .
ii. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
iii. Αν $0 < \alpha < \beta < 1$ ή $1 < \alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\beta} - \frac{\ln \beta}{\alpha}$.

54. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 2^{-x} - x - \ln x$.Κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $2^{-x^3} - 2^{-x^2} + x^2 - x^3 = \ln x$.

55.

- i. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x \ln x}{x}$.
ii. Να λυθεί η ανίσωση $e^{x-e+1} \ln x < x$.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $e^x \ln x + xe^{\frac{e+1}{e}} = 0$.

56.

- i. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
ii. Να λυθεί στο $(0, 1)$ η εξίσωση $e^{\eta \mu x} = 2\sqrt{e} \eta \mu x$.
iii. Να συγκρίνεται τους αριθμούς e^e και $\frac{e^3}{2}$.

57.

- i. Να εξεταστεί η $f(x) = \alpha x - x \ln x$ με $\alpha \in R$, ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του ακρότατου της $f(x)$.
iii. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του α , για την οποία, για κάθε $x > 0$, ισχύει $\alpha x - e \leq x \ln x$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$.

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f , η $f'(x)$, η $f''(x)$.
ii. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f .

- iii. Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$.
- iv. Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.
59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x^\alpha$ με $x > 0$.
- Να βρεθεί η παράγωγος της f .
 - Αν $\alpha^x \geq x^\alpha$ για κάθε $x > 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = e$.
60. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: R \rightarrow R$.
- Να λυθεί η ανίσωση $g(x^2 - 2x) > g(x - 2)$.
 - Να λυθεί η ανίσωση $\alpha^{x^2-2x} - \alpha^{x-2} \leq -x^2 + 3x - 2$, $\alpha > 1$.
61. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^{2\alpha} \leq \alpha^{x^2}$, όπου $\alpha > 0$, να δειχθεί ότι $\alpha = e$.
62. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) \geq 0$ και $g(x)$ παραγωγίσιμες στο R , που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $\ln(f(x) + 1) + e^{-g(x)} + \eta \mu x \leq e^x$, να αποδειχθεί ότι οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.
63. Έστω $f(x)$ παραγωγίσιμη στο R με $e^{f(x)} \geq \alpha x f(x) + e^{f(0)}$ για κάθε $x \in R$. Αν η εφαπτομένη της f στο $x = 0$ περνά από το σημείο $A(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, να δειχθεί ότι η f εφάπτεται στον άξονα x' στο $x = 0$.
64. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R , για την παράγωγο της οποίας ισχύει $xe^x f'(x) = e^x (f'(x)\eta \mu x + e^x - 2) + 1$ για κάθε $x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f' στο R .
65. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης f , για την οποία ισχύει $2f(x) + \sigma v(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in R$.
66. Αν $xf'(x) > \sigma vx - f(x)$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, να αποδειχθεί ότι η παραγωγίσιμη $f(x)$ παίρνει θετικές τιμές στο $(-\pi, \pi)$.
67. Αν για την άρτια και παραγωγίσιμη $f(x)$ στο R , για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $e^{f(x)} = e^x + \frac{1}{2}x^2 - (\alpha + 1)x$, να βρεθεί ο $\alpha \in R$ και να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
68. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η παραγωγίσιμη $f(x) > 0$ στο R , αν ισχύει $e^{f(x)} + \ln(f(x)) = \ln(e^x + 1) - e^x + 3$ στο R .

69. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 2e^{x-\alpha} + 2(\alpha+1)x - x^2$, να δειχθεί ότι η παραγωγήσιμη $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.
70. Έστω $f(x)$, παραγωγήσιμη στο R , με $e^{f(x)} + \ln(f(x)) = e^{x+1} + \eta\mu^2x + x$ για κάθε $x \in R$, όπου $f(x) > 0$ στο R .
- Να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.
 - Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $\alpha^{f(x)} - \alpha\sigma\nu x \geq ex$, να βρεθεί η τιμή του $\alpha > 1$.
71. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 7x - 2$
 - $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2$
72. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$
 - $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\nu x}$ στο $(0, 2\pi)$
73. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$
 - $f(x) = x(\ln^2 x - 2)$
74. Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής η συνάρτηση
- $$f(x) = \begin{cases} x\sigma\nu x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 - \eta\mu x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$
75. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 2$ να έχει το $A(1, 3)$ σημείο καμπής.
76. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R^*$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha \ln^2 x - 5}{x}$ να μην εμφανίζει σημείο καμπής.

77. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{e^{\alpha x}}$ να στρέφει τα κοίλα άνω στο R.
78. Να δειχθεί ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = xe^{-x^2}$ είναι συνευθειακά.
79. Αν η παραγωγίσιμη f εμφανίζει στο x_0 σημείο καμπής, τότε δεν μπορεί να έχει στο x_0 και ακρότατο.
80. Αν η παραγωγίσιμη f είναι κυρτή και εμφανίζει στο x_0 ακρότατο τότε αυτό είναι ελάχιστο.
81. Αν για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι $f''(x) > 0$ στο R, να εξεταστεί η $g(x) = e^{f(x)}$ ως προς τα κοίλα.
82. Αν για την παραγωγίσιμη f είναι $f(x)f'(x) = \alpha > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.
83. Έστω ότι η παραγωγίσιμη f στρέφει τα κοίλα κάτω. Αν η $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στην f στο x_0 , να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \lambda x + \beta$.
84. Έστω ότι η παραγωγίσιμη f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) - f(\alpha) < f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
85. Έστω $f(x)$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $\eta\mu(f'(x)) - 2f'(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για κάθε $x \in R$. Να δειχθεί ότι η f' εφάπτεται στον $x^* x$ στο $x_0 = 0$. Να βρεθούν επίσης τα σημεία καμπής της f.
86. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $\eta\mu(f(x)) = \ln x - x^2$ για κάθε $x > 0$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει στην γραφική παράσταση της f σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Έχει η γραφική παράσταση της f σημείο καμπής;
87. Να υπολογιστούν τα όρια:
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \eta\mu x - 1}{\ln(x+1)}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}$
88. Να υπολογιστούν τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sigma\nu\nu x - \eta\mu x}{x^3}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 - x^2 + 1)}{1 - \sigma\nu\nu x}$
89. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\nu\nu^2 x}{x} - \frac{e^x}{\eta\mu x} \right)$.
90. Να υπολογιστούν τα όρια:
- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{e^x + x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\varepsilon\varphi \frac{\pi x}{4}}$
91. Να υπολογιστούν τα όρια:
- i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 \ln x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-1) \varepsilon\varphi \frac{\pi x}{2} \right]$
92. Να υπολογιστούν τα όρια:
- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x^2}}}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{x^2}} \eta\mu^2 x \right)$
93. Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια και να βρεθεί, όπου υπάρχει, η παράγωγος της $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x - x^\nu}{\ln x}, & 0 < x < 1, \text{ όπου } \nu \in N \text{ με } \nu > 1. \\ 1 - \nu, & x = 1 \end{cases}$
94. Να βρεθούν τα α, β , ώστε να είναι να είναι παραγωγίσιμη στο R η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \ln^2 x}{x-1}, & x > 1 \\ \beta x^2 + x, & x \leq 1 \end{cases}$.
95. Έστω f, g , δύο φορές παραγωγίσιμες με $g(x) \neq 0$ και $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}, B = \frac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Av ισχύει ότι

$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{\varphi(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \neq \alpha$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$.

96. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο R , αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sigma v n x (\sigma v n x + f(x)) + x = e^x - \eta \mu^2 x + f(x) + x^2 (f(x) + 1)$.

97. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη, να βρεθεί το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \eta \mu h) - f(x + h)}{h^3}.$$

98. Αν $f(x) = \ln x + e^x$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow e} \frac{(f^{-1}(x))^2 - 1}{\ln x - 1}$.

99. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = f'(1) = 0$ και $f''(1) = 2$, να

$$\text{εξεταστεί αν έχει συνεχή παράγωγο η } g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x f(x)}{(x-1)^2}, & x > 1 \\ x^2 - x, & x \leq 1 \end{cases}.$$

100. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, στο $x_0 = 1$

$$\text{εμφανίζει ακρότατο και το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x + f(x)}{(x^2 - x) f'(x)} = 2, \text{ να υπολογιστεί η } f''(1).$$

101. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) > 0$ ισχύει

$$2\sqrt{f(x)} + \ln(f(x)) + x - 2 = \eta \mu x + \frac{x^3}{6} \text{ για κάθε } x \in R, \text{ να μελετηθεί η } f \text{ ως}$$

προς τη μονοτονία και να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^5}$.

102. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

ii. $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

103. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{2^x - 1}{x^2}$

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - \ln x}}$

104. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-e^x}{x\eta\mu x}}, & -2 \leq x < 0 \\ \frac{x}{x-2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

105. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+3}{x-1}$

ii. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 3x}$

106. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x + 1}$

ii. $f(x) = x \sqrt{\frac{4x-8}{x-1}}$

107. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x\eta\mu \frac{1}{x}$

ii. $f(x) = \frac{3^x - 2^x}{x}$

108. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{\ln x - x + 1}$.

109. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε η ευθεία $\varepsilon : x = 1$ να είναι ασύμπτωτη

$$\text{της } f(x) = \frac{\eta\mu(\pi x) + x - \alpha}{x - \alpha^2}.$$

110. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ ώστε η $\varepsilon : y = 2x + \beta$ να είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\text{της } f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + 4x + 2\beta}. \text{ Κατόπιν να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 4x^2}{x}.$$

111. Αν f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{e^{-x}}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$, να

βρεθεί η κατακόρυφη και η πλάγια ασύμπτωτη της f .

112. Αν η $\varepsilon : y = 2x - \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, να βρεθεί ο $\beta \in R$ αν

$$\text{είναι γνωστό ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2+2x)f(x) - 4x^2}{f(x)(x+2) - 2x^2 + \eta\mu x} = 3.$$

113. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 3x}{e^x + 1} = 2$, να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

114. Αν $g(x) = 2f(x) - x + \ln \frac{x-1}{x}$ και η $\varepsilon : y = x + 3$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της $g(x)$ στο $+\infty$.
115. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x + 1) = 3$ και ισχύει ότι $f(x) + 6x = 2g(x)$, να βρεθεί η ασύμπτωτη στο $-\infty$ της $g(x)$. Να δειχθεί ότι $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ στο $-\infty$ και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{xg(x)} - \sqrt{1 - xf(x)})$.
116. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + 11$.
117. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
118. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.
119. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{|\ln x|}{x}$.
120. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$.
121. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά στο $[0, 2\pi]$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{\sin x - 2}$.
122. Να γίνει μελέτη και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$.

Κατόπιν να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, ανάλογα με τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.