ΗΛΙΑΣΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Όρια - Συνέχεια

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr

www.iliaskos.gr

3. Όρια - Συνέχεια

3.1 Η έννοια του ορίου

Ορισμός

Όριο είναι η τιμή l που παίρνει η συνάρτηση f καθώς το x πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο το x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Παρατηρήσεις

- Για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της f κοντά στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται κοντά στο x_0, δηλαδή το x_0 πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f ή άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού της f.
- Υπάρχει το όριο της f στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και το συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, όταν οι τιμές της f βρίσκονται όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει το x_0.

Ορισμός

Θα λέμε πλευρικό όριο της f από αριστερά και θα το συμβολίζουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, όταν το x πλησιάζει το x_0 με μικρότερες τιμές ($x < x_0$).

Ορισμός

Θα λέμε πλευρικό όριο της f από δεξιά και θα το συμβολίζουμε $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, όταν το x πλησιάζει το x_0 με μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$).

Παρατήρηση

Για να υπάρχει το όριο της f στο x_0, θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

3.2 Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες ορίων

Σε όλες τις παρακάτω ιδιότητες υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα όρια στο x_0.

- Όριο και διάταξη
  - Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
  - Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Προσοχή! Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$, τότε δεν ισχύει ότι $f(x) \geqslant 0$ κοντά στο x_0.

Αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$, τότε δεν ισχύει ότι $f(x) \leqslant 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $f(x) \geqslant 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.
- Αν $f(x) \leqslant 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$.

Προσοχή! Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε δεν ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$. Ισχύει όμως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Αντίστοιχα αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε δεν ισχυει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$. Ισχύει όμως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$.

- Αν $f(x) \leqslant g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Προσοχή! Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε δεν ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Ισχύει όμως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ τότε και $f(x) \leqslant g(x)$ κοντά στο x_0.

Προσοχή! Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ τότε δεν ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

- Κριτήριο Παρεμβολής (κριτήριο σάντουιτς)
  - Αν ισχύει $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
- Όρια και πράξεις
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \big(\kappa f(x)\big) = \kappa \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, με $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^{\nu} = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^{\nu}$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right|$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, αν $f(x) \geqslant 0$ κοντά στο x_0.
- Όριο πολυωνυμικής
  - $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.
- Όριο ρητής
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, με $Q(x_0) \neq 0$.

- Τριγωνομετρικά όρια
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$.
  - $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.
  - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.
  - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.
- Όριο σύνθετης συνάρτησης
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$, όπου $u = g(x)$.

Προσοχή! Δεν σπάμε ποτέ το όριο σε επιμέρους όρια, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες, αν δεν γνωρίζουμε ότι όλα τα επιμέρους όρια υπάρχουν.

Προσοχή! Είναι δυνατόν να υπάρχει ένα όριο χωρίς να υπάρχει κάποιο από τα επιμέρους όρια.

Θεώρημα (Μηδενική επί φραγμένη συνάρτηση)

Αν οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ορισμένες σ΄ένα σύνολο Δ, ξ είναι ένα εσωτερικό σημείο ή άκρο του Δ, η f_1 είναι φραγμένη σε μια περιοχή του ξ και $\lim\limits_{x \to \xi} f_2(x) = 0$, τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \xi} (f_1(x) f_2(x)) = 0$. (Δηλαδή το γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη είναι μηδενική).

Μεθοδολογίες

Υπολογισμός ορίων στο x_0:

i. Απλά όρια.
Σε αυτά δεν υπάρχει παρονομαστής είτε αυτός δεν μηδενίζεται. Για να τα υπολογίσουμε θέτουμε απευθείας όπου x το x_0 και εκτελούμε τις πράξεις.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x + 1}$.
Για να υπολογίσουμε το όριο θα αντικαταστίσουμε το x με το 2 και θα κάνουμε πράξεις $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x + 1} = \dfrac{3 \cdot 2 + 2}{2 + 1} = \dfrac{8}{3}$.

ii. Όρια $\dfrac{0}{0}$ με πολυώνυμα.
Σε αυτά θα παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή, με τη βοήθεια του σχήματος Horner (στο x_0) ή άλλης μεθόδου παραγοντοποίησης, μέχρις ότου να απλοποιηθεί ο όρος $x - x_0$ που προκαλεί την απροσδιοριστία. Κατόπιν θέτουμε όπου x το x_0 και κάνουμε πράξεις.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x - 10}$.
Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 2 προκύπτει $\dfrac{0}{0}$

απροσδιοριστία. Κάνουμε σχήμα Horner για να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή για να τον παραγοντοποιήσουμε οπότε παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+5)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1}{x+5}=\frac{2^2-2\cdot 2+1}{2+5}=\frac{1}{7}$$

iii. Όρια $\frac{0}{0}$ με ρίζες.

Θα πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση.

Παράσταση	Συζυγής	Αποτέλεσμα
$\sqrt{x}-\alpha$	$\sqrt{x}+\alpha$	$x-\alpha^2$
$\sqrt[3]{x}-\alpha$	$\sqrt[3]{x^2}+\alpha\sqrt[3]{x}+\alpha^2$	$x-\alpha^3$
$x-\alpha$	$x^{\nu-1}+\alpha x^{\nu-2}+\ldots+\alpha^{\nu-2}x+\alpha^{\nu-1}$	$x^\nu-\alpha^\nu$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 0 προκύπτει $\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζηγή παράσταση του αριθμητή, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+100-100}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{\sqrt{0+100}+10}=\frac{1}{20}$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x-2}-2}$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 6 προκύπτει $\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζηγή παράσταση του αριθμητή και του παρονομαστή, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x-2}-2}=\lim_{x\to 6}\left(\frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x-2}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+3}{\sqrt{x+3}+3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}+2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{x+3-9}{x-2-4}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x+3}+3}\right)=\lim_{x\to 6}\left(\frac{x-6}{x-6}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x+3}+3}\right)=$$

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{\cancel{x-6}}{\cancel{x-6}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x+3}+3}\right)=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x+3}+3}=\frac{\sqrt{6-2}+2}{\sqrt{6+3}+3}=\frac{4+2}{3+3}=1.$$

Αν κάποιος όρος περιέχει περισσότερα από δύο ριζικά, τότε για την εύρεση του ορίου αφαιρούμε από κάθε ριζικό την τιμή του για $x = x_0$. Έπειτα είτε διασπάμε το κλάσμα και πολλαπλασιάζουμε το καθένα με τη συζυγή παράσταση, είτε διαιρούμε όλους τους όρους που δημιουργούνται με $x - x_0$.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}+1}{x-2}$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 2 προκύπτει $\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Οπότε θα πρέπει να διασπάσουμε το κλάσμα σε δύο και να πολλαπλασιάσουμε το καθένα με τη συζυγή παράσταση, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}-\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}-\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(\sqrt{x+2}+2)}-\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(\sqrt{x+7}+3)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

iv. Όρια $\frac{0}{0}$ με απόλυτα.

Αν το x_0 δεν μηδενίζει το απόλυτο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της παράστασης μέσα σε αυτό για $x = x_0$ και διώχνουμε το απόλυτο.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-3|-1}{x-2}$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 2 προκύπτει $\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 2}|x-3|=-2<0$. Επομένως ξαναγράφουμε το αρχικό όριο διώχνοντας το απόλυτο και αλλάζοντας τα πρόσημα της παράστασης μέσα στο απόλυτο (επειδή η τιμή του ορίου είναι αρνητική), οπότε προκύπτει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x-3)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}=-1.$$

Αν το x_0 μηδενίζει το απόλυτο, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια. Δεν ξεχνάμε ότι όταν το $x \to x_0^+$ το $x > x_0$ και όταν το $x \to x_0^-$ το $x < x_0$.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x^2 - 3x + 2| - x + 1}{x - 1}$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε όπου x το 1 προκύπτει $\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x \to 1} |x^2 - 3x + 2| = 0$. Επομένως πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια. Υπολογίζουμε τις ρίζες της $x^2 - 3x + 2 = 0$ και κάνουμε πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	1		2		∞
$x^2 - x + 2$	+	|	-	|	+	

Παρατηρούμε ότι $x^2 - 3x + 2 < 0$ όταν το $x \to 1^+$ και $x^2 - 3x + 2 > 0$ όταν το $x \to 1^-$. Υπολογίζουμε τώρα τα πλευρικά όρια, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-(x^2 - 3x + 2) - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x - 1)(x - 2) - (x - 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-\cancel{(x - 1)}(x - 2 + 1)}{\cancel{x - 1}} = -(1 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 3x + 2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2) - (x - 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x - 1)}(x - 2 - 1)}{\cancel{x - 1}} = 1 - 3 = -2$$

Επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x^2 - 3x + 2| - x + 1}{x - 1}$ δεν υπάρχει.

v. Όρια $\dfrac{0}{0}$ με τριγωνομετρικούς όρους.

Θα προσπαθούμε (πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας) να εμφανίζουμε όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu f(x) - 1}{f(x)}$ όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Έτσι θέτοντας $f(x) = u$ θα καταλήγουμε στα βασικά όρια $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ ή $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 0$.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[3 \frac{\eta\mu 3x}{3x}\right]$$

Θέτουμε $u = 3x$.

Όταν $x \to 0$ το $u \to 0$.

Επομένως $\lim\limits_{u \to 0} \left[3 \dfrac{\eta\mu u}{u}\right] = 3 \cdot 1 = 3$.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu(x-\pi)}{x-\pi}$.

Θέτουμε $u = x - \pi$.

Όταν $x \to \pi$ το $u \to 0$.

Επομένως $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$.

vi. Όρια με συναρτήσεις πολλαπλού τύπου στο σημείο αλλαγής τύπου της συνάρτησης.

Θα υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο x_0. Έτσι για να υπάρχει το όριο θα πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα.

π.χ. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει το όριο της $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2\alpha x, & x \geqslant 3 \end{cases}$ στο σημείο $x = 3$;

Για να υπάρχει το όριο στο $x = 3$ θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2 - 1) = 3^2 - 1 = 8$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(2\alpha x) = 2\alpha 3 = 6\alpha$

Πρέπει $6\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4}{3}$.

vii. Αντικατάσταση.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε θέτουμε $g(x) = u$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ και αν $u \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε $A = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$. Επομένως αντί να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, υπολογίζουμε το ευκολότερο όριο $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

π.χ. Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x-2)$.

Θέτουμε $u = x - 2$.

Όταν $x \to 2$ το $u \to 0$.

Επομένως $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = 1$.

3.3 Θεωρητικά Θέματα με όρια

Όταν μας ζητούν το όριο μιας συνάρτησης, της οποίας δεν γνωρίζουμε τον τύπο, θα εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής αν έχουμε διπλή ανισότητα.

Αν έχουμε όμως το όριο μιας παράστασης, η οποία θα περιέχει την f, και μας ζητούν το όριο της f, θα θέτουμε την παράσταση $h(x)$ και θα λύνουμε ως προς $f(x)$. Έπειτα θα υπολογίζουμε το όριο της $f(x)$ αφού όλα τα υπόλοιπα όρια είναι γνωστά.

3.4 Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Ισχύουν οι εξείς ιδιότητες:

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.
- Αν $f(x) \leqslant g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- Αν $f(x) \geqslant g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

Παρατηρήσεις

- Για λόγους συντομίας μπορούμε αντί της έκφρασης "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0", να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό 0^+. Αντίστοιχα μπορούμε αντί της έκφρασης "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0", να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό 0^-.

Μορφές ορίων

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Απροσδιόριστες Μορφές

$(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
0^0, $(\pm\infty)^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Μεθοδολογίες

Τα μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$ θα είναι γενικά όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $f(x_0) = \alpha \neq 0$ και $g(x_0) = 0$. Για να τα υπολογίσουμε θα απομονώνουμε τον παρονομαστή, θα υπολογίζουμε το όριο του και θα εξετάζουμε το πρόσημό του.

i. Αν το πρόσημο είναι σταθερό κοντά στο x_0 τότε, ανάλογα με τον πίνακα στις μορφές ορίων, βρίσκουμε απευθείας το όριο.

π.χ. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$.

Το όριο του παρονομαστή, όταν το x τείνει στο 2, είναι μηδέν. Ο παρονομαστής κοντά στο 2 είναι πάντοτε θετικός (επειδή είναι υψωμένος στο τετράγωνο). Επομένως το όριο θα ισούτε με $+\infty$.

Ποιο σύντομα μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

ii. Αν ο παρονομαστής αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε, παίρνοντας πλευρικά όρια, ακολουθούμε την προηγούμενη μεθοδολογία και τελικά βρίσκουμε ότι το όριο δεν υπάρχει επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

π.χ. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$.

Το όριο του παρονομαστή, όταν το x τείνει στο 2, είναι μηδέν. Επειδή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο του παρονομαστή κοντά στο 2, θα πάρουμε πλευρικά όρια.

$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά μεταξύ τους, επομένως το όριο $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει.

3.5 Όρια στο Άπειρο

- Βασικά Όρια
  - $\lim_{x\to+\infty}x^\nu=+\infty$.
  - $\lim_{x\to-\infty}x^\nu=\begin{cases}+\infty, \nu=2\kappa\\ -\infty, \nu=2\kappa+1\end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$.
  - $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^\nu}=0$.
- Όριο πολυωνυμικής
  - $\lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)=\lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$, με $\alpha_\nu\neq 0$.
- Όριο ρητής
  - $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}=\begin{cases}\pm\infty, \nu>\kappa\\ \frac{\alpha_\nu}{\beta_\kappa}, \quad \nu=\kappa,\\ 0, \quad \nu<\kappa\end{cases}$ με $\alpha_\nu\beta_\kappa\neq 0$.
- Όριο άρρητης
  - $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}=$

    $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[\kappa]{x^\nu\left(\alpha_\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{x}+\ldots+\frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}}+\frac{\alpha_0}{x^\nu}\right)}=$

    $\lim_{x\to\pm\infty}\left(|x|^{\frac{\nu}{\kappa}}\cdot\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{x}+\ldots+\frac{\alpha_1}{x^{\nu-1}}+\frac{\alpha_0}{x^\nu}}\right)=$

    $(+\infty)\cdot\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu+0+\ldots+0+0}=+\infty$.

- Όριο εκθετικής
  - Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = 0$.
  - Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty$.
- Όριο λογαριθμικής
  - Αν $\alpha > 1$α τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x = -\infty$.
  - Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x = +\infty$.

Μεθοδολογίες

i. Στα όρια στο άπειρο, όταν έχουμε απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ γενικά βγάζουμε κοινό παράγοντα, προσπαθώντας να δημιουργήσουμε μηδενικά και να μπορέσουμε να διώξουμε την απροσδιοριστία. Αν έχουμε πολυώνυμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τις ιδιότητες.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+5x-2)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2+5x-2) = \lim_{x\to+\infty}(3x^2) = +\infty.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{x-1}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(3x) = -\infty.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{6x^2-x+1}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{6x^2-x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3x^2-5x+2}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3x^2-5x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x} = 0.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-2}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-2} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+5x-2}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+5x-2} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=-(-\infty)\cdot 1=+\infty.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}+x\right)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+1\right)\right]=+\infty\cdot 2=+\infty.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}+x\right)$.

Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το x, όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα, θα προκύψει απροσδιοριστία $0\cdot\infty$. Επομένως πολλαπλασιάζουμε πρώτα με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x-2-x^2}{\sqrt{x^2+5x-2}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{\left(|x|\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(5-\frac{2}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+1\right)}=\frac{5-0}{-(\sqrt{1+0-0}+1)}=-\frac{5}{2}.$$

ii. Στα όρια με εκθετικές, αν έχουμε εκθετικές με την ίδια βάση τότε:

- Αν το $x\to+\infty$ και η βάση είναι μεγαλύτερη του 1 τότε θα βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική.
- Αν το $x\to-\infty$ και η βάση είναι μεγαλύτερη του 1 τότε αντικαθιστούμε απευθείας αφού το όριο της εκθετικής κάνει 0.
- Αν το $x\to+\infty$ και η βάση είναι μικρότερη του 1 τότε αντικαθιστούμε απευθείας αφού το όριο της εκθετικής κάνει 0.
- Αν το $x\to-\infty$ και η βάση είναι μικρότερη του 1 τότε θα βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{2e^x+1}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{2e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{e^x}}{2+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{2}.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+3}{2+2e^x}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+3}{2+2e^x}=\frac{0+3}{2+0}=\frac{3}{2}.$$

iii. Στα όρια με εκθετικές με διαφορετικές βάσεις, αν έχουμε εκθετικές με διαφορετικές βάσεις τότε:

- Αν το $x\to+\infty$
  Θα βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση. Έτσι θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$, αφού $0<\alpha<1$.
- Αν το $x\to-\infty$
  θα βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μικρότερη βάση. Έτσι θα έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$, αφού θα είναι $\alpha>1$.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+5\cdot2^x}{2^x+3e^x}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+5\cdot2^x}{2^x+3e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+5\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^x\left(\left(\frac{2}{e}\right)^x+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\left(\frac{2}{e}\right)^x+3}=\frac{1}{3}.$$

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+4\cdot2^x}{2^{x+1}+3e^x}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+4\cdot2^x}{2^{x+1}+3e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+4\cdot2^x}{2\cdot2^x+3e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(\left(\frac{e}{2}\right)^x+4\right)}{2^x\left(2+3\left(\frac{e}{2}\right)^x\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x+4}{2+3\left(\frac{e}{2}\right)^x}=\frac{4}{2}=2.$$

iv. Στα όρια με λογαριθμκές εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία με τις εκθετικές.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln x+1}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

v. Όταν έχουμε όριο με τριγωνομετρικές θα χρησιμοποιούμε τις βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις $|\eta\mu x|\leqslant1$, $|\sigma\upsilon\nu x|\leqslant1$ και έπειτα θα εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.

Προσοχή! Θα μπορούσαμε, για να υπολογίσουμε τέτοια όρια, να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της μηδενικής επί φραγμένης.

π.χ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Έχουμε $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leqslant \frac{\eta\mu x}{x} \leqslant \frac{1}{|x|}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Θα μπορούσαμε να πούμε, ευκολότερα, ότι το $\eta\mu x$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. Επομένως το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$ ως μηδενική επί φραγμένη.

3.6 Συνέχεια Συνάρτησης

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Συνεχείς, εκεί που ορίζονται, είναι οι παρακάτω συναρτήσεις:

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$.
- Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$.
- Η εκθετική α^x και η λογαριθμική $\log_\alpha x$, με $0 < \alpha \neq 1$.

Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ |f| \text{ και } \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το x_0.

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Μεθοδολογίες

i. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια κλαδική είναι συνεχής, θα ελέγχουμε την συνέχεια με τον ορισμό της συνέχειας στο σημείο αλλαγής τύπου της συνάρτησης.
ii. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της ή σ΄ένα διάστημα Δ, αρκεί να αποδεί-

ξουμε ότι είναι συνεχής σ΄ένα τυχαίο x_0 του πεδίου ορισμού της ή του διαστήματος Δ.

iii. Αν σε μια άσκηση μας ζητάν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση για τη συνάρτηση f και ότι είναι συνεχής σ΄ένα σημείο x_1,
- θα γράφουμε τον ορισμό για την συνέχεια σ΄ένα τυχαίο x_0.
- θα κάνουμε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής στο όριο (ανάλογα με τη συναρτησιακή σχέση) έτσι ώστε να προκύψει το όριο $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ το οποίο μπορούμε να το υπολογίσουμε επειδή γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_1.

3.7 Θεωρήματα Συνέχειας

Θεώρημα

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Θεώρημα

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Θεώρημα Bolzano

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης της εξίσωσης $f(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες.
- Το θεώρημα Bolzano δεν βρίσκει την ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, απλά εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας.
- Όταν δεν ικανοποιούνται και οι δύο προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ΄αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.
- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διά-

στημα που ορίζεται από δύο διαδοχικές ρίζες της. Επομένως για να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης f σ΄ένα διάστημα θα βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης σε έναν αριθμό του διαστήματος αυτού. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα αυτό.

Πρόταση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο (α,β) ώστε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) < 0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Η παραπάνω πρόταση μας δίνει την δυνατότητα να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano σε ανοιχτό διάστημα ή ημίκλειστο διάστημα.

Πρόταση

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \kappa$.

Παρατήρηση

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα. Στη περίπτωση που η f είναι σταθερή το $f(\Delta)$ είναι μονοσύνολο.

Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_ε και x_μ του $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant f(x_\mu)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Δηλαδή η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Παρατηρήσεις

- Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f([\alpha,\beta]) = [m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.
- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f([\alpha,\beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.

- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f([\alpha,\beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$.
- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α,β) τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f((\alpha,\beta)) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$.
- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α,β) τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f((\alpha,\beta)) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.
- Όταν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο. Έστω $f(x_\varepsilon)$ το ελάχιστο και $f(x_\mu)$ το μέγιστο όπου $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha,\beta]$. Αν υποθέσουμε ότι είναι $x_\varepsilon < x_\mu$, τότε η f είναι συνεχής στο $[x_\varepsilon, x_\mu]$. Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για κάθε κ μεταξύ της $f(x_\varepsilon)$ και $f(x_\mu)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta \in (x_\varepsilon, x_\mu) \subseteq (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\theta) = \kappa$.

  Επομένως όταν έχουμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, για κάθε κ που βρίσκεται μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της f και όχι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον θ ώστε $f(\theta) = \kappa$.

Μεθοδολογίες

i. Όταν σε μια άσκηση μας δίνουν μια εξίσωση, της οποίας απαιτείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας, θα μεταφέρουμε τους όρους στο ένα μέλος, θα θέτουμε συνάρτηση $h(x)$ και θα εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano.

ii. Αν δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την προηγούμενη μεθοδολογία, π.χ. γιατί η $h(x)$ δεν ορίζεται για κάποια τιμή του x, τότε θα κάνουμε πρώτα απαλοιφή παρονομαστών ή θα διαιρούμε με κάποιον παράγοντα και μετά θα μεταφέρουμε τους όρους στο ένα μέλος και θα θέτουμε συνάρτηση $h(x)$.

iii. Μερικές φορές μπορεί να χρειαστεί να επιλέξουμε ένα μικρότερο διάστημα Δ_1, υποσύνολο του αρχικού διαστήματος Δ, που μας βολεύει και να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano σε αυτό. Η ρίζα που θα αποδείξουμε ότι υπάρχει θα ανήκει στο Δ_1. Θα ανήκει όμως και στο Δ αφού το $\Delta_1 \subseteq \Delta$.

iv. Αν κατά την εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ προκύψει ότι $f(\alpha)f(\beta) \leqslant 0$ τότε θα πάρουμε δύο περιπτώσεις:
   - αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε υπαρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

- αν $f(\alpha)f(\beta)=0$ τότε $f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$. Δηλαδή τα α,β αποτελούν ρίζες της f (αν κάποιο από τα δύο δεν μπορεί να ισχύει τότε θα απορίψουμε την αντίστοιχη τιμή). Επομένως $\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

v. Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, εκτός από το θεώρημα Bolzano, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξουμε ότι περιέχει το α.

vi. Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, θα κάνουμε μελέτη μονοτονίας. Για κάθε διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη θα βρίσκουμε το σύνολο τιμών της για αυτό το διάστημα. Το σύνολο τιμών της f θα είναι η ένωση όλων των συνόλων τιμών που βρίκαμε προηγουμένως.

3.8 Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
2. Να αποδείξετε ότι για ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού ν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.
3. Να αποδείξετε ότι για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x),Q(x)$, πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.
4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ΄ένα διάστημα;
6. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\kappa$.

3.9 Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Για κάθε συνάρτηση f που ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι $\lim\limits_{x\to 0}=f(0)$.
2. Αν για τις συναρτήσεις f, g και h ισχύουν:
   - $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ κοντά στο x_0,
   - $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_2$ όπου $l_1,l_2\in\mathbb{R}$,

   τότε $l_1\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant l_2$.

3. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, τότε κατ᾽ανάγκη ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) > 0$.
4. Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, τότε δεν ισχύει κατ᾽ ανάγκη ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
5. Αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
6. Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f^2(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
7. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(0) \cdot g(0)$.
8. Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο 0 θα είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) < 0$.
9. Αν $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
10. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
11. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
12. Αν μια συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε σ᾽ αυτό το σημείο δεν θα υπάρχει το όριό της.
13. Κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
14. Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ᾽ ένα διάστημα Δ, τότε ορίζεται και η σύνθεση $f \circ f$ στο Δ και είναι συνεχής σε αυτό.
16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.
17. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοικτού διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα.
18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = 0$.
19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ώστε $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.
20. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $x^3 f(x) \geqslant x - \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $f(0)$ είναι $\frac{1}{6}$.
21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα x_0 στο διάστημα $(0, 1)$ τότε θα ισχύει $f(0)f(1) < 0$.
22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f έχει ένα μοναδικό μέγιστο και ένα μοναδικό ελάχιστο στο $[\alpha, \beta]$.

23. Αν f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x_0)=0$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

24. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της είναι κλειστό διάστημα.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε η f παίρνει τιμές μόνο μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

3.10 Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(\eta\mu(\pi x)-1)^{2004}+e^{x+3}}{\sqrt[5]{2x+5}}$.   β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-6x+8|+e^{x-3}}{|x^2-6x+9|+\sqrt{x+1}}$.

γ. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x+\sqrt{x^2-1})$.   δ. $\lim\limits_{x\to 2}\left[(2x-3)^{25}\sqrt[3]{x^2+1}+|13x-4|\right]$.

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-11}{x^2-5x+6}$.   στ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5+3x-30}{x^2-1}$.

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$.   β. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^3-8}{x^2-2x}$.   δ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+3x-10}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.   στ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2+x+1}$.

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}$.   β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^3+3x^2-6x+2}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.   δ. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$.   στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}$.

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.   β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-3x+3}-1}$.   γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.   ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$.   στ. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{2}}$.   β. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$.   δ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}+1}{x-1}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x^3-3x+2}$. στ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-2x-3|-|x+1|-2}{|-x^2+2x-1|-1}$. β. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-8x+16}-|x-4|}{x-4}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|+x^2-3x+1}{x^2-1}$. δ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|2+3x|+x^2-12}{x^2-3x+2}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|+x-2}{x^2-7x+6}$. στ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-1|+x^2+x-14}{x^2-9}$.

7. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|+x^2+3x}{x^2-1}$. β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+x^2-1}{x-1}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|+|x^2-5x+6|}{x-2}$. δ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+x^2-3x+2}{x^2-1}$. στ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-4}{x^2-5x+6}$.

8. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2|x+2|+|x-4|-7}{x^2+9x+8}$. β. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{|x+6|+4|x+1|+4x+2}{2x^2+7x-4}$.

γ. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|-|x+1|+1}{x^2+2x}$. δ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+|x|-3}{x^2-3x}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+x^3-3x}{x^2+x}$. στ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-10x+9|-|x-1|}{|x-1|}$.

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|-2x}{x}$. β. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|4-x|+2x-8}{x^2-5x+4}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3+|3x-x^2|}{x^2-9}$. δ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-x|}{1+2x-3x^2}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-2x|-|x^2-5x+6|}{|x-2|}$. στ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^3-2x+1|+2x-2}{x^2-7x+6}$.

10. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{2x}$. β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 2x}{\varepsilon\varphi 4x}$. γ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2x-\pi}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$. ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu 3x}-\sqrt{1-\eta\mu 2x}}{x}$.

στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{3-\sqrt{x+9}}$.

11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$. β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\eta\mu x}$. γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\varepsilon\varphi x}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφx - ημ2x}{x^2+4x}$. ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|ημx|}{x}$. στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{|x|}$.

12. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+ημx}}{x}$. β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-συν2x}}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}-ημx}{x^2+x}$. δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-4ημx}{5x+7ημx}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συν2x}{x(\sqrt{3+x}-\sqrt{3})}$. στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συνx}{x^2}$.

13. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια των:

α. $f(x)=\begin{cases} x^2-3x-5, & x>4 \\ συν(πx)-2, & x\leqslant 4 \end{cases}$ στο $x_0=4$.

β. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ημ(x^2-6x+8)}{x^2-3x+2}, & x>2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+2-x}{x-2}, & x<2 \end{cases}$ στο $x_0=2$.

γ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-x+1}{x^2+3}, & |x|<3 \\ \sqrt{x^2-5}, & |x|\geqslant 3 \end{cases}$ στο $x_0=3$ και στο $x_0=-3$.

14. Να βρεθεί το $α\in\mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2α-1, & x\leqslant 0 \\ 2x+α-3, & x>0 \end{cases}$ να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

15. Να βρεθούν τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} αx+β, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ βx+α-1, & x>0 \end{cases}$ να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

16. Να βρεθούν τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} αx^2+x+1, & x\leqslant 2 \\ x^2-βx+13, & x>2 \end{cases}$ να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το $M(-1,3)$.

17. Να βρεθούν τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+α, & x\in[-1,1] \\ 2x^2+αx+β, & x\in(1,4] \\ 3x+2β, & x\in(4,5] \end{cases}$ να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

18. Να βρεθούν οι τιμές των $α,β\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-αx+β}{x^2-4}=2$.

19. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+4x-3\right)=1$. β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)-1}{x-3}=4$.

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}-x+1}=2$. δ. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3f(x)-5}{x-4}=5$.

20. Αν $\eta\mu x\cdot f(x)\geqslant \eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο κ.

21. Να βρεθούν τα όρια της $f(x)$ στο x_0, όταν:

α. $\dfrac{x^2-4}{x-2}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{12x-24}{x^2-x-2}$, $x_0=2$.

β. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1-x}{x^2-4x+3}$, $x_0=1$.

γ. $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{2(9-x^2)}{3x^2+10x+3}$, $x_0=-3$.

δ. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}$, $x_0=0$.

ε. $\eta\mu x\leqslant xf(x)\leqslant \varepsilon\varphi x$, $x_0=0$.

22. Αν ισχύει $4x\leqslant f(x)\leqslant x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθούν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-8}{x-2}$. β. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x^2}{x-2}$.

23. Αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $4x-5\leqslant f^2(x)-2f(x)\leqslant 2x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

24. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha\in\mathbb{R}$ και $f^3(x)+3g^2(x)f(x)=4g^3(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε το α.

25. Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(f(x))}{\sqrt{f(x)+1}-1}$. β. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f^2(x)-2f(x)+1}-1}{|2-f(x)|-2}$.

26. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)+2x^2-4x-2\right)=5$, να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

27. Αν ισχύει $x+f(x)=f(\alpha-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+2x-\alpha\right)=1$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

28. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1-x)}{1-\sqrt{x}}$.

29. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x-1)+x^2-\ln x+3\right)=3$ να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\pi f(x))}{f^2(x)-1}$.

30. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x-1}{x}=2$, να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt{f(x)}-\sigma\upsilon\nu x}$.

31. Αν $f(x)(f(x)-x+1)=2x^2-4x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\kappa$, τότε να βρεθεί ο $\kappa>0$.

32. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=\dfrac{1}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)(x^3-8)\right)=-\dfrac{2}{3}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}h(x)$, όπου $h(x)=f(x)g(x)$.

33. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left((\sqrt{x+1}-1)f(x)\right)=4$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)\right)=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

34. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\left(3f(x)+g(x)\right)=19$ και $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-2g(x)\right)=-3$ να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

35. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{(x-4)^4}$.

β. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-8x+16}}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}$.

δ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}}$.

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt[4]{x^5}}$.

στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu|x|}{\sqrt[3]{x^4}}$.

36. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-6}{x^3-3x^2+3x-1}$.

β. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-2x}\right)$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+x-2}\right)$.

δ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{|x-1|}-\dfrac{x}{x-1}\right)$.

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{x}\right)$.

στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x-5}{x|x|}$.

37. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x^2}-\sqrt{x}+1}$.

β. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-3}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}-2}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{|x-2|}\right)$.

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-5}{\sqrt{x-1}}$.

στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$.

38. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x-2}{\eta\mu x-1}$.

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\eta\mu x}$.

γ. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x-3}{\sigma\upsilon\nu x+1}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$.

ε. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{x-1}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$. στ. $\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{6}} \dfrac{x-3}{2\eta\mu x+1}$.

39. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2\alpha^2 x+\alpha}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$. β. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-\alpha x+2\alpha}{|x-2|}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+\alpha x-5}{x^3-3x^2+3x-1}$.

40. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+\alpha x+\beta}{x\eta\mu x}$. β. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+\beta x+4\alpha}{x^2-4x+4}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha x+\beta-\sqrt{x+1}}{x^2}$.

41. Να βρεθεί:

α. το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)f(x)}{x^3-1}=+\infty$.

β. το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ όταν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 2x}{f(x)\varepsilon\varphi 3x}=+\infty$.

γ. το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ αν για κάθε $x \neq 4$ ισχύει $f(x) \geqslant \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-12x^2+48x-64}$.

δ. το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f(x) \leqslant \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$.

ε. το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ αν για κάθε $x \neq 3$ ισχύει $f(x) \geqslant \dfrac{|x+1|-2}{|x-3|}$.

42. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-3x^2+2x-5)$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^3-5x^4+2x-5)$.

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4-3x^3+2x-7)$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3-4x^2+5)$.

ε. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x^3+2x^2-5x-6|$. στ. $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^5+3x^2+7x)$

43. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-5x^2+2}{2x^3+x-1}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3-4x^2+6}{x^2-1}$.

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^6+5x^2-6}{6x^6+3x-11}$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^5-x^3+x-\sqrt{2}}{2x^5-x^3+1}$.

ε. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^3+16x-7}{x^5-3x^2-1}$. στ. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^{99}+5x+2}{2x^{100}+7}$.

44. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^3+2x^2-5x+1|+x^3-7x}{|4x^2-5x+8|}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{|x^2-1|}{x}-\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}\right)$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x^2+x-1}$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{7x^2+5x-3}$.

ε. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt[5]{-x^5+2x^2+1}\right)$.

στ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$.

45. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)$. β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+4}}{2x-5}$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x-1}-x\right)$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5x-3}+x\right)$.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-2x\right)$. στ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

46. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$. β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+2}+3x\right)$.

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}+x^2\right)$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}-3x\right)$.

στ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3+1}-2x\right)$.

47. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x+1}-\sqrt{x^4+1}}{x^2+1-\sqrt{x^2+x+1}}$. β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}\right)$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$. δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

στ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4x^2+x+1}-3x\right)$.

48. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+2}+e^x-1}{3e^x+2}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6^{x+1}-3\cdot 6^x+3}{1-2\cdot 6^{x+2}}$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}-1}{2^x+5}$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x-1}+2^{x+2}-3}{2^x+2^{x+3}-1}$.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{x+2}-2}{e^{x-1}+e^{x+1}-1}$. στ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{3+e^{\frac{1}{x}}}$.

49. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}-3^x}{e^x+3^{x+1}}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+2^{x+2}}{e^{x+2}+2^x}$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln x+1}$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x}{\ln x+1}$.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^{x+2}+e^{x-1}}{3^{x+1}+2^{x-1}-e^{x-2}}$. στ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-3^{x+2}+e^{x-1}}{3^{x+1}+2^{x-1}-e^{x-2}}$.

50. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6+x-5^x)$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{-x}-3^x-x^6)$.

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{1+x+x^2}$. δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

ε. $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^2+x}\right)$. στ. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

51. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$. β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{1}{x}$. δ. $\lim\limits_{x\to0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

ε. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x\eta\mu3x}{3x+\sigma\upsilon\nu2x}$. στ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\eta\mu x}\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

52. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha\in\mathbb{R}$ να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^3-2x+3}{(\alpha-2)x^2+3x-7}$. β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha x^4-5x^2+x-2}{(\alpha-4)x^3+x^2-x+8}$.

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\alpha x+1)$. δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+3}+\alpha x)$.

53. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha>0$ να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}+\alpha^x+1}{3^x+\alpha^{x-1}-1}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-4\alpha^{x+1}}{2^{x-1}+\alpha^x}$.

54. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2-\alpha x+\beta}{\alpha x^3-\beta x+1}$. β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2+2x-1}{\beta x^2+x-3}$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\frac{\sqrt{9x^2-3x+1}}{x+2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3x+4}{x} \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty).$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

56. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\frac{x^2+1}{x^2+1}<f(x)<\frac{x+3}{x+1} \text{ για κάθε } x>0.$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

57. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{x+2}=2$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)}{\eta\mu2x}=\kappa$, να βρεθεί ο τύπος του πολυωνύμου καθώς και ο $\kappa\in\mathbb{R}$.

58. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)+x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=3$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

59. Αν ισχύει $x(f^2(x)+g^2(x))\geqslant2(f(x)-g(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

60. Αν ισχύει $\left|\frac{f(x)}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

61. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|(1+x^3)f(x)-x^2|\leqslant x$ για κάθε $x>0$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

62. Αν ισχύει $(2^x+1)f(x)\geqslant e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Κατόπιν να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)-2f^2(x)+1}{2f^3(x)+3f(x)-5}$.

63. Αν ισχύει $f(x)x^4\leqslant\sigma\upsilon\nu x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)\right)$.

64. Αν ισχύει $f(x)x\eta\mu x\geqslant e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+1}-f(x)\right)$.

65. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-\alpha}{f(x)-\beta}=+\infty$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

66. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}=-\infty$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

67. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)(x-1)}{\eta\mu(\pi x)}=-\infty$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

68. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}f(x)+e^{x-2}}{\eta\mu x}=5$ να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

69. Αν ισχύει $f(x)=f(2-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}\right)=2$, να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

70. Αν ισχύει $2f(x)-xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

71. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to x_0}[\ln(2^{f(x)}+x^2+3)-f(x)]$.

72. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\eta\mu(\pi x)f(x)}=0$ με $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to0}\frac{3f^2(x+2)+7f(x+2)-1}{6f^2(x+2)-5f(x+2)+4}$.

73. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to2}\frac{|\eta\mu x+x|}{x^2\left(\eta\mu\frac{1}{x}+1\right)f(x)}=0$, με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^2(x)+3f(x)-2}{2f(x)-1}$.

74. Να εξετασθούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{x^2+\eta\mu x}{x}, & x<0\end{cases}$.   β. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant -1\\ 3-x, & -1<x<2\\ \dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\end{cases}$.

γ. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & |x|>1\end{cases}$.   δ. $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

ε. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$.   στ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}, & 1\neq x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

75. Να εξετασθούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

β. $f(x)=\begin{cases}(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$.

γ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-5x+6|-2}{x^3-1}, & x>1\\ \sigma\upsilon\nu(\pi x), & x\leqslant 1\end{cases}$.

δ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x>1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x<1\end{cases}$.

76. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-\alpha x+1, & x<3\\ (4+\beta)x+2\alpha, & 3\leqslant x\leqslant 4\\ -x^2+(\alpha+\beta)x-3, & x>4\end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

77. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(x\eta\mu^2(\alpha x))}{x^3}, & x\neq 0\\ 2\alpha-1, & x=0\end{cases}$.

78. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|+|x-2|}{x^2+x-\alpha}, & x>2\\ e^{\beta x-\alpha}, & x\leqslant 2\end{cases}$.

79. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu(\alpha\eta\mu(\beta x))}{2x}, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0.\\ \frac{\sqrt{x+\beta}-\alpha}{x}, & x<0\end{cases}$

80. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha|x|+\beta(\sqrt{x}+1), & x\in[0,1)\\ \alpha\sqrt{x}+\beta x+1, & x\in[1,3]\end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και $4\lim\limits_{x\to\frac{9}{4}} f(x) = 12\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f(x)+1$.

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{|x-2|}, & x\neq 2\\ \gamma, & x=2\end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+3\beta, & x\leqslant -1\\ 1+x^2, & -1<x<1\\ \beta x^2+3\alpha x-5, & x\geqslant 1\end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι:
α. συνεχής.
β. συνεχής στο $x_0=1$ και ασυνεχής στος $x_0=-1$

83. Αν $(x^3-x)f(x)=(\sigma\upsilon\nu 2x-1)(\sqrt{x}-1)$ για κάθε $x\geqslant 0$, να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f στο $[0,+\infty)$.

84. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει $xf(x)=\eta\mu 3x+x^2-x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

85. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει $xf(x)=\eta\mu 5x+2x^2-x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

86. Αν $x\eta\mu\frac{1}{x}\leqslant xf\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant 1$ για κάθε $x\neq 0$, να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια στο $x_0=0$ η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=1\end{cases}$.

87. Αν $f^2(x)\leqslant 2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:
α. η f είναι συνεχής στο 0.
β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

88. Αν για τη συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x\in[0,\delta]$ ισχύει $\frac{\eta\mu x+x+8}{4}\leqslant f(x)+\alpha\leqslant\sqrt{x+1}+1$, να βρεθεί η

τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}, & x > 0 \\ x^2 + 4f(0) - \alpha, & x \leqslant 0 \end{cases}$.

89. Αν $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

90. Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)f(x) - \eta\mu(\pi x)}{x - 1} = 2$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, να βρεθεί το $f(1)$.

91. Αν $\sigma\upsilon\nu f(x) \geqslant 2x - \pi$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, όπου f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρεθεί το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

92. Αν $f(0) = 4$ και $f(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2\eta\mu^2 x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 0.

93. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $3f(x) = 2x + \eta\mu f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
    α. $|f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
    β. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

94. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|xf(x) - \eta\mu(x - 1) - f(x)| + 2x \leqslant x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής, να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $A(1, 1)$.

95. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει $xf(x) + 1 < \sigma\upsilon\nu 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να βρεθεί το $f(0)$.

96. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(2 - x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο 3, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο -1.

97. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $f(x) + f(x + 1) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

98. Έστω ότι $f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

99. Έστω ότι $f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x) + xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

100. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:
    α. $2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$ στο $(0, \pi)$.
    β. $x^3 = x + 1$ στο $(1, \sqrt{2})$.
    γ. $x + \sigma\upsilon\nu x = 4$ στο $(\pi, 2\pi)$.
    δ. $\dfrac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \dfrac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$ στο (α, β).

ε. $\dfrac{x^{10}+1}{x-1}+\dfrac{x^{8}+3}{x-2}=0$ στο $(1,2)$.

στ. $\dfrac{\varepsilon\varphi x}{4x-\pi}+\dfrac{\sigma\varphi x}{3x-\pi}=0$ στο $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

101. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\beta)=g(\alpha)$, $f(\alpha)=g(\beta)\neq g(\alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(\alpha,\beta)$: $f(\rho)=g(\rho)$.

102. Έστω f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\leqslant 0\leqslant g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι $\gamma\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

103. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=\alpha$ και $f(1)=\beta$ με $\alpha,\beta\in(0,1)$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

104. Αν η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, να δείξετε ότι η C_f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την $y=-x$.

105. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha)=\beta^2$ και $f(\beta)=\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\theta)=\theta^2$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

106. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[1,e]$ ώστε $f(\ln\theta)=\ln\theta$.

107. Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\kappa\cdot f(\theta)+\lambda\cdot g(\theta)=(\kappa+\lambda)\cdot\theta$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ομόσημοι και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

108. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $-1<f(x)<0$ να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x)+f(x)=-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

109. Αν $f:[0,2\alpha]\to\mathbb{R}$ συνεχής μς $f(0)=f(2\alpha)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ ώστε $f(\xi)=f(\xi+\alpha)$.

110. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $\alpha<\mu<\nu<\beta$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f(\mu)+f(\nu)}{2}=f(x_0)$.

β. Αν $\alpha<\mu<\nu<\beta$ και θ_1,θ_2 θετικοί αριθμοί ακέραιοι, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{\theta_1 f(\mu)+\theta_2 f(\nu)}{\theta_1+\theta_2}$.

111. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δίνεται ότι $f(\alpha)=f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[\alpha,\beta)$ ώστε $f(\theta)=f\left(\theta+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

112. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και συνάρτηση g γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f([\alpha,\beta])\cap g([\alpha,\beta])\neq\emptyset$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\theta)=g(\theta)$.

113. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2-\alpha\beta x+\alpha\beta,$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[0,1]$ ώστε $f(\theta)=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2}$.

114. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6-16x=11$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

115. Αν $\alpha,\beta>0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x+2\beta=2x$ έχει μια τουλάχιστον θετική πραγματική λύση που δεν είναι μεγαλύτερη του $\alpha+\beta$.

116. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$, όπου $\beta>0$ και $\alpha+\beta<-1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες πραγματικές.

117. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις, ώστε $f(x)-g(x)=\kappa x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία με ετερόσημες τετμημένες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

118. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$. Αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\alpha)f^2(x)+\kappa f(x)+f(\beta)=0$, όπου κ πραγματικός αριθμός, έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

119. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Έστω επίσης ότι $f(\alpha)=\beta, f(\beta)=\alpha, g(\beta)=\beta$ και $g(\alpha)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in(\alpha,\beta)$ ώστε $(f\circ g)(\theta)+(g\circ f)(\theta)=2\theta$.

120. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ώστε η f να είναι περιττή, η g φθίνουσα και να ισχύει $g(\alpha) = -\alpha$ και $g(-\alpha) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha,\alpha)$ ώστε να ισχύει $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.

121. Έστω συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $f([\alpha,\beta]) = g([\alpha,\beta]) = [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in [\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει $f(g(\theta)) + g(f(\theta)) = 2\theta$.

122. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g,h:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με α < β, ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα ενώ η g γνησίως φθίνουσα και $f([\alpha,\beta]) = g([\alpha,\beta]) = [\alpha,\beta]$. Έστω επίσης ότι $h(\alpha) = \beta$ και $h(\beta) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f(g(h(\theta))) = g(f(\theta))$.

123. Έστω συνάρτηση f συνεχής, ώστε

$$\sqrt[3]{2x+8} - \sqrt{x^2+4} \leqslant xf(x) \leqslant \eta\mu\frac{x}{6} + x^6 \quad (1),$$

για κάθε $x \in [-4, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(0) = \frac{1}{6}$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (0,1]$ ώστε $f(\kappa) = \eta\mu\frac{\kappa}{6} + \kappa^6$.

124. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 4$ και $4\eta\mu(x-2) \leqslant (x-2)f(x) \leqslant x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση c_f της συνάρτησης f τέμνει την γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 - x + 1$ σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1,2)$.

125. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

126. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, και $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in (\alpha,\beta)$ ώστε $15f(\kappa) = f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + 4f(x_4) + 5f(x_5)$.

127. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με α < β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\theta)=\frac{1}{9}\left[2f(\alpha)+3f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+4f(\beta)\right]$.

128. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}$.

129. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\rho_1,\rho_2\in(\alpha,\beta)$ δύο διαδοχικές λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

130. Αν για κάθε $x\in[-1,0]$ ισχύει ότι $x^3+2xf^2(x)=8$ και η f συνεχής να δειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

131. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ και η f συνεχής να δειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

132. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\alpha>0$. Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z=x+if(x)$, όπου $x\in\mathbb{R}$. Αν είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=-\frac{\alpha}{2}$ και για κάποιο $x_0\in(0,2\alpha)$ ισχύει $|z-\alpha|<\alpha, |2z-\alpha|\geqslant\alpha$ και $|2z-3\alpha|\geqslant\alpha$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=0$.

133. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
α. $f(x)=x-\sigma\upsilon\nu x-4,\ x\in(\pi,2\pi)$.
β. $f(x)=e^x-1,\ x\in[0,+\infty)$.
γ. $f(x)=e^x-1+\ln(x+1),\ x\in[0,+\infty)$.
δ. $f(x)=x\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

134. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0<0$ ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0\,\eta\mu\frac{1}{x_0}$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-x+1$.
α. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
β. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.
γ. Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$.