ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Φυσική Γ΄Λυκείου

Επιμέλεια: ΘΕΟΛΟΓΟΣ ΤΣΙΑΡΔΑΚΛΗΣ

e-mail: info@iliaskos.gr www.iliaskos.gr

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ,
ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ,
ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ,
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ,
ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΤΣΙΑΡΔΑΚΛΗΣ ΘΕΟΛΟΓΟΣ - Φυσικός

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	
$f=\frac{N}{t}$	Τύπος υπολογισμού της συχνότητας
$f=\frac{1}{T}$	Σχέση συχνότητας και περιόδου
$\omega=\frac{2\pi}{T}$, $\omega=2\pi f$	Σχέση της κυκλικής συχνότητας με την περίοδο και την συχνότητα
$x=A\,ημ(\omega t+\varphi_0)$	Χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης
$υ=υ_{max}\,συν(\omega t+\varphi_0)$, $υ_{max}=\omega A$	Χρονική εξίσωση της ταχύτητας
$α=-α_{max}\,ημ(\omega t+\varphi_0)$, $α_{max}=\omega^2 A$	Χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης
$α=-\omega^2 x$	Σχέση επιτάχυνσης και απομάκρυνσης
$υ=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ (με απόδειξη)	Σχέση ταχύτητας και απομάκρυνσης
$ΣF=-Dx$	Σχέση συνισταμένης δύναμης και απομάκρυνσης
$D=m\omega^2$	Σταθερά επαναφοράς

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	Περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης
$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$	Συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης
$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$	Κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης
$K=\frac{1}{2}mu^2$	Κινητική ενέργεια
$U=\frac{1}{2}Dx^2$	Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης
$K+U=E=\sigma\tau\alpha\theta.$ $E=U_{max}=K_{max}$	Αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	
$q=Q\,συν(ωt)$	Χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή
$i=-I\,ημ(ωt)$, $I=ωQ$	Χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος
$q=Q\,ημ(ωt)$ $i=I\,συν(ωt)$	Χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος όταν τη χρονική στιγμή t=0 είναι i=+I.
$i=\pm\omega\sqrt{Q^2-q^2}$ **(με απόδειξη)**	Σχέση έντασης ρεύματος και φορτίου πυκνωτή
$U_B=\frac{1}{2}Li^2$	Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου
$U_E=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου πυκνωτή
$U_E+U_B=E=σταθ.$ $E=U_{B,max}=U_{E,max}$	Αρχή διατήρησης της ενέργειας
$T=2π\sqrt{LC}$	Περίοδος ηλεκτρικής ταλάντωσης κυκλώματος L-C
$f=\frac{1}{2π\sqrt{LC}}$	Συχνότητα ηλεκτρικής ταλάντωσης κυκλώματος L-C
$ω=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	Κυκλική συχνότητα ηλεκτρικής ταλάντωσης κυκλώματος L-C

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ **(με δύναμη αντίστασης της μορφής F΄=-bυ)**	
$A=A_0 e^{-\Lambda t}$, t=κT	Εκθετική μείωση του πλάτους
$\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}=\cdots=\sigma\tau\alpha\theta.$	Ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερός
$E=E_0 e^{-2\Lambda t}$ (με απόδειξη)	Εκθετική μείωση της ενέργειας

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ	
Αν $x_1=A_1\eta\mu\omega t$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi)$, τότε για τη συνισταμένη ταλάντωση θα ισχύει $x=x_1+x_2$ ή $x=A\eta\mu(\omega t+\theta)$, όπου $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$	Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων οι οποίες έχουν την <u>ίδια συχνότητα,</u> την ίδια διεύθυνση και εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.
Αν $x_1=A\eta\mu\omega_1 t$ και $x_2=A\eta\mu\omega_2 t$, τότε για τη συνισταμένη ταλάντωση θα ισχύει $x=x_1+x_2$ ή $x=2A\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\eta\mu(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$. Αν $\omega_1\approx\omega_2$ τότε η συνισταμένη ταλάντωση έχει κυκλική συχνότητα $\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ και πλάτος που αυξομειώνεται περιοδικά με το χρόνο (διακροτήματα) με συχνότητα $f_\delta=\|f_1-f_2\|$ (συχνότητα των διακροτημάτων)	Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων οι οποίες έχουν <u>ελάχιστα διαφορετικές συχνότητες</u>, μηδενική αρχική φάση, την ίδια διεύθυνση και εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

✓ **Περιοδική κίνηση** ονομάζεται η κίνηση που επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα (π.χ. ομαλή κυκλική κίνηση , ταλάντωση κ.τ.λ.).

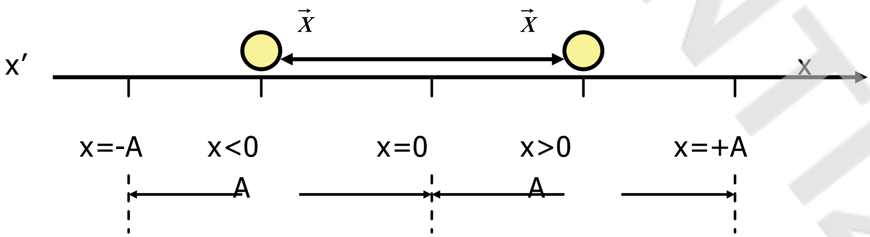
✓ **Ταλάντωση** ονομάζεται η περιοδική κίνηση που γίνεται παλινδρομικά μεταξύ δύο ακραίων θέσεων.

✓ **Γραμμική ταλάντωση** ονομάζεται η ταλάντωση της οποίας η τροχιά είναι ευθύγραμμη.

✓ **Θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Θ.Ι.Τ)** ονομάζεται το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Στην Θ.Ι.Τ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν.

✓ **Πλάτος της ταλάντωσης (Α)** ονομάζεται η απόσταση κάθε ακραίας θέσης από τη θέση ισορροπίας.

✓ **Απομάκρυνση από την Θ.Ι.Τ** είναι ένα διάνυσμα που η αρχή του είναι στην αρχή του άξονα και το τέλος του δείχνει το σημείο στο οποίο βρίσκεται το σώμα. Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος αυτού ταυτίζεται με τη συντεταγμένη του σημείου του άξονα πάνω στο οποίο βρίσκεται το σώμα κάποια στιγμή της ταλάντωσής του, με την προϋπόθεση ότι η αρχή του άξονα είναι στη Θ.Ι.Τ.



✓ **Μια ταλάντωση,** πραγματοποιείται όταν το σώμα περάσει για δεύτερη φορά από την ίδια θέση κινούμενο προς την ίδια κατεύθυνση ή ισοδύναμα όταν ξαναπεράσει από την ίδια θέση αφού προηγουμένως περάσει και από τις δύο ακραίες θέσεις.

✓ **Περίοδος (T) της ταλάντωσης** είναι η χρονική διάρκεια στην οποία πραγματοποιείται μια ταλάντωση.

- Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s.

✓ **Συχνότητα (f) της ταλάντωσης** είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που γίνονται στη μονάδα του χρόνου (1 sec.).

- Η συχνότητα υπολογίζεται από τον τύπο: $f=\frac{N}{t}$

όπου N είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που γίνονται σε χρόνο t.

- Η σχέση της συχνότητας (f) με την περίοδο (T) δίνεται από τον τύπο: $f=\frac{1}{T}$

- Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz.

✓ **Κυκλική συχνότητα (ω)** είναι ένα μέγεθος που συνδέεται με την περίοδο και τη συχνότητα της ταλάντωσης με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad \text{και} \qquad \omega=2\pi f$$

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις $f=\frac{N}{t}$ και $f=\frac{\omega}{2\pi}$ η κυκλική συχνότητα ισούται με τον αριθμό των ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται σε χρόνο 2π s.

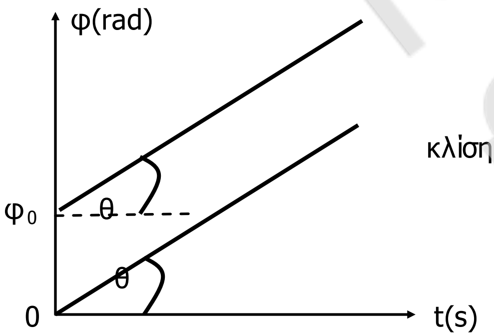
- Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 rad/s.

✓ **Απλή αρμονική ταλάντωση** ονομάζεται η γραμμική ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Έχει δηλαδή τη μορφή: $\mathbf{x=A\,ημ(ωt + φ_0)}$

✓ **Φάση της ταλάντωσης (φ)** ονομάζεται η γωνία $\mathbf{φ=ωt + φ_0}$,το ημίτονο της οποίας μας δίνει την απομάκρυνση x κάθε χρονική στιγμή. Μονάδα μέτρησης της φάσης είναι το 1 rad.

✓ **Αρχική φάση ($\mathbf{φ_0}$)** είναι η τιμή της φάσης τη χρονική στιγμή t=0. Η τιμή της κυμαίνεται από 0 έως 2π rad, ανάλογα με την απομάκρυνση και την ταχύτητα τη στιγμή t=0 (αρχικές συνθήκες).

✓ Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι μια ευθεία γραμμή, η κλίση της οποίας μας δίνει την κυκλική συχνότητα ω.



κλίση = εφθ = $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$ =ω

1.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

1.2.1 Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης

✓ **Η σχέση που δίνει την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:**

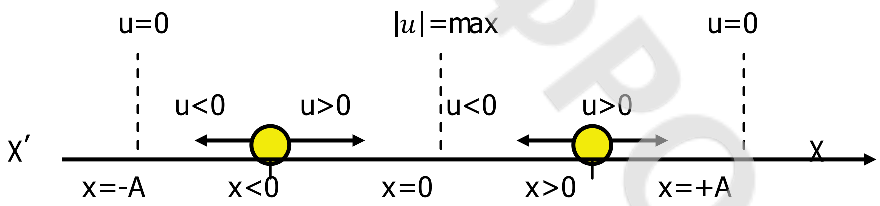
$$x = A\eta\mu\,(\omega t + \varphi_0)$$

1.2.2 Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας

✓ **Η σχέση που δίνει την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:**

$$u = u_{max}\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega t + \varphi_0)$$

όπου $u_{max} = \omega . A$ είναι το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας. Η ταχύτητα μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις και μεγιστοποιείται στη Θ.Ι.Τ.



✓ **Διαφορά φάσης ανάμεσα στην ταχύτητα και στην απομάκρυνση:**

Γράφουμε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της απομάκρυνσης. (Έστω $\varphi_0 = 0$)

$u=u_{max}συν(ωt) = u_{max}\ ημ(ωt + \frac{\pi}{2})$ (1)

$x=Aημ(ωt)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε

$Δφ=φ_u - φ_x = ωt + \frac{\pi}{2} - ωt \Rightarrow Δφ=\frac{\pi}{2}$ rad.

✓ **Σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα και στην απομάκρυνση :**

Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο τύπος:

$$u=\pm ω\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.2.3 Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης

✓ **Η σχέση που δίνει την επιτάχυνση σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:**

$$\mathbf{a=-a_{max}\ ημ(ωt + φ_0)}$$

όπου $\mathbf{a_{max}=ω^2A}$ είναι το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης.
Η επιτάχυνση μηδενίζεται στην Θ.Ι.Τ και μεγιστοποιείται στις ακραίες θέσεις.

✓ **Διαφορά φάσης ανάμεσα στην επιτάχυνση και στην απομάκρυνση**

Γράφουμε τις χρονικές εξισώσεις της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης. (Έστω $φ_0=0$).

$a=-a_{max}\ ημ(ωt) = a_{max}\ ημ(ωt + π)$ (1)

$x=A\ ημ(ωt)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε
$\Delta\varphi = \varphi_\alpha - \varphi_x = \omega t + \pi - \omega t \Rightarrow \Delta\varphi = \pi$ rad.

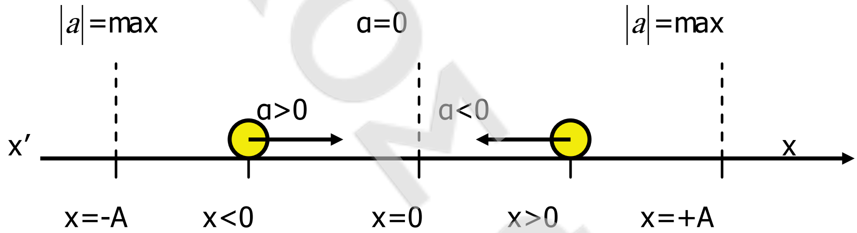
✓ **Σχέση ανάμεσα στην επιτάχυνση και στην απομάκρυνση :**

$\alpha = -\alpha_{max}$ ημ(ωt) $\Rightarrow$ $\alpha = -\omega^2 A$ ημ(ωt) (1)

$x = A$ ημ(ωt) (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε **$\alpha = -\omega^2 x$**

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και ότι έχει φορά πάντα προς την Θ.Ι.Τ



✓ **Σχέση ανάμεσα στην επιτάχυνση και στην ταχύτητα:**

Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο τύπος:

$$\alpha = \pm\omega\sqrt{u_{max}^2 - u^2}$$

1.2.4 Η εξίσωση της συνισταμένης δύναμης

✓ **Σχέση δύναμης – απομάκρυνσης**

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε: **ΣF=mα (1)**

Επίσης ισχύει η σχέση: $a=-\omega^2 x$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\Sigma F=-m\omega^2 x$ (3)

Το σταθερό γινόμενο $m\omega^2$ το ονομάζουμε σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης και το συμβολίζουμε με D. Άρα ο τύπος (3) παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\boldsymbol{\Sigma F=-Dx \quad (4)}$$

Από την σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει φορά πάντοτε προς τη Θ.Ι.Τ. Επειδή λοιπόν τείνει να επαναφέρει το σώμα στην Θ.Ι.Τ ονομάζεται και **δύναμη επαναφοράς**

✓ **Σταθερά επαναφοράς D**

Η σταθερά επαναφοράς D εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που ταλαντώνεται και όχι από τη μάζα m, ούτε από τη γωνιακή συχνότητα ω. Για παράδειγμα στην περίπτωση του συστήματος ελατήριο-σώμα ισούται με την σταθερά του ελατηρίου (D=k). Επίσης η σταθερά επαναφοράς D επηρεάζει και την περίοδο της ταλάντωσης.

✓ **Σχέση που συνδέει την περίοδο της ταλάντωσης με τη σταθερά επαναφοράς**

$$D=m\omega^2 \Leftrightarrow D=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Leftrightarrow D=m\frac{(2\pi)^2}{T^2} \Leftrightarrow T^2=(2\pi)^2\frac{m}{D} \Leftrightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

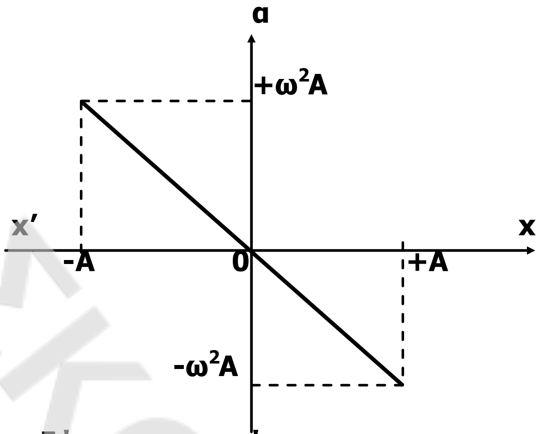
✓ **Χρονική εξίσωση συνισταμένης δύναμης**

Από τη σχέση $\Sigma F=ma$ και τη σχέση $a=-a_{max}\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ προκύπτει:

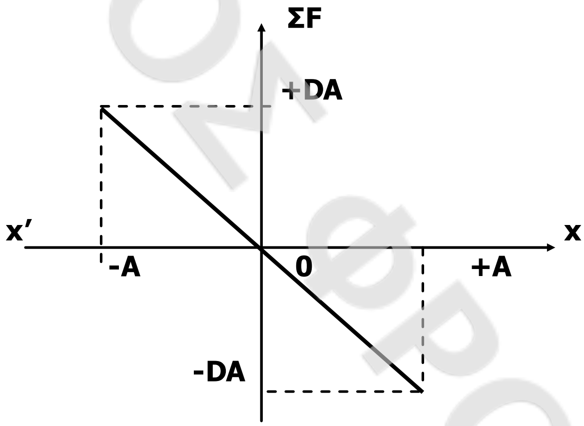
$\Sigma F=-ma_{max}\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\Sigma F=-\Sigma F_{max}\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0)}$

1.2.5 Γραφικές παραστάσεις

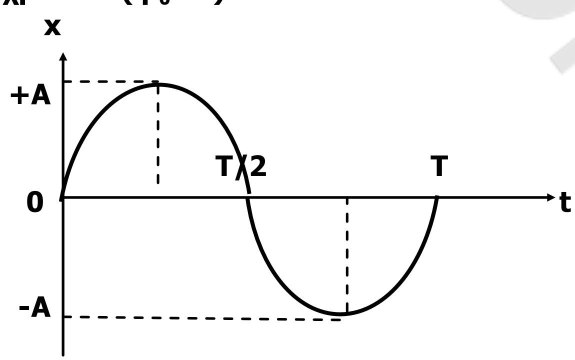
✓ **Επιτάχυνσης- απομάκρυνσης**

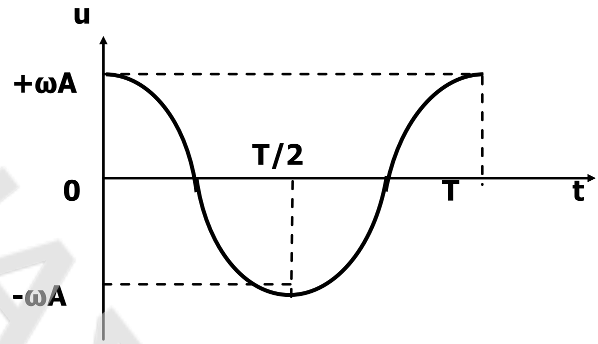


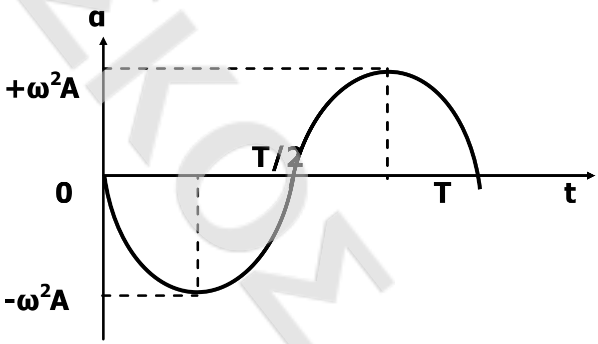
✓ **Συνισταμένης δύναμης-απομάκρυνσης**

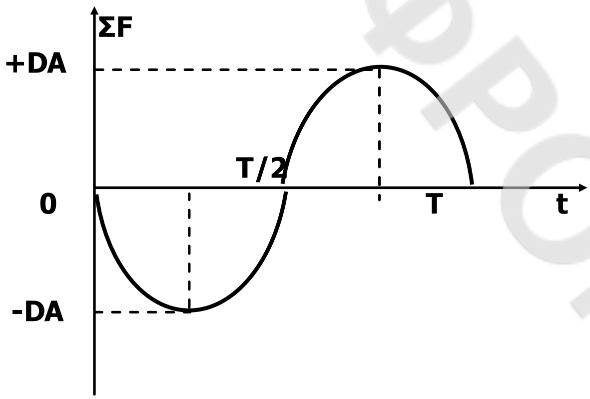


✓ **Απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης, δύναμης επαναφοράς-χρόνου (φ_0=0)**




u
+ωA
T/2
0
T
t
-ωA


α
+ω²A
T/2
0
T
t
-ω²A


ΣF
+DA
T/2
0
T
t
-DA

1.3 ΠΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΝΑ ΣΩΜΑ ΕΚΤΕΛΕΙ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Για να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Σχεδιάζουμε το σώμα στη θέση ισορροπίας του, καθώς και όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Εφαρμόζουμε τη **συνθήκη ισορροπίας ΣF=0** για τις δυνάμεις αυτές και βρίσκουμε μια χρήσιμη σχέση. Αν στη θέση αυτή όλες οι δυνάμεις είναι κάθετες στον άξονα της κίνησης, τότε δεν χρειάζεται αυτή η ενέργεια.

✓ Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας. Στη θέση αυτή σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και αν χρειαστεί τις αναλύουμε σε ορθογώνιες συνιστώσες με τον έναν άξονα να είναι πάνω στην διεύθυνση της κίνησης.

✓ Θεωρώντας θετικές τις δυνάμεις που έχουν τη φορά της κίνησης αποδεικνύουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα της κίνησης είναι της μορφής **ΣF=-Dx** (ικανή και αναγκαία συνθήκη), με την βοήθεια και της σχέσης που βρήκαμε από τη συνθήκη ισορροπίας.

✓ **Αποδεικνύεται ότι αν πρόκειται για το σύστημα ελατήριο-σώμα (είτε το ελατήριο είναι οριζόντιο, είτε είναι κατακόρυφο, είτε είναι πλάγιο) προκύπτει ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D=k, όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου.**

1.4 ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

1.4.1 Κινητική ενέργεια

Η κινητική ενέργεια εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος και δίνεται από τον τύπο:

$$K=\frac{1}{2}mu^2$$

Προφανώς η κινητική ενέργεια κυμαίνεται από K=0 (στις ακραίες θέσεις) έως $K=K_{max}=\frac{1}{2}mu^2{}_{max}$ (στη Θ.Ι.Τ)

Η κινητική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση του χρόνου:

$$K=\frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}m\left(u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0)\right)^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}mu^2{}_{max}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0)\Rightarrow$$
$$K=K_{max}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0)$$

1.4.2 Δυναμική ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από την απομάκρυνση του σώματος και δίνεται από τον τύπο:

$$U=\frac{1}{2}Dx^2$$

Προφανώς η δυναμική ενέργεια κυμαίνεται από U=0 (στη Θ.Ι.Τ) έως $U=U_{max}=\frac{1}{2}DA^2$ (στις ακραίες θέσεις)

Η δυναμική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση του χρόνου:

$$U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}D(A\eta\mu(\omega t+\phi_0))^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t+\phi_0)\Rightarrow$$
$$U=U_{\max}\eta\mu^2(\omega t+\phi_0)$$

Αποδεικνύεται ότι $K_{max}=U_{max}$

Απόδειξη

$$K_{\max}=\frac{1}{2}mu^2{}_{\max}=\frac{1}{2}m(\omega \mathrm{A})^2=\frac{1}{2}m\omega^2\mathrm{A}^2=\frac{1}{2}DA^2=U_{\max}$$

1.4.3 Ολική ενέργεια

Η ολική ενέργεια μιας ταλάντωσης είναι ίση με την ενέργεια (έργο) που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση.

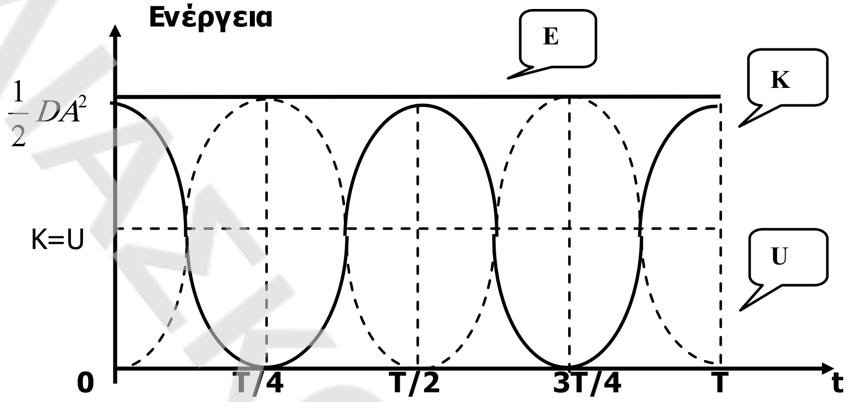
Η ολική ενέργεια ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας και στην ιδανική περίπτωση της Α.Α.Τ που δεν έχουμε απώλειες ενέργειας εξαιτίας δυνάμεων που αντιστέκονται στην κίνηση (π.χ. τριβή) διατηρείται σταθερή.

Ε=Κ+U=σταθερή

Η ολική ενέργεια καθορίζει το πλάτος και τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης διότι δίνεται από τις σχέσεις $E=(1/2)DA^2$ και $E=(1/2)mu^2{}_{max}$. Επομένως στην Α.Α.Τ ισχύει η σχέση $E=K_{\max}=U_{\max}$

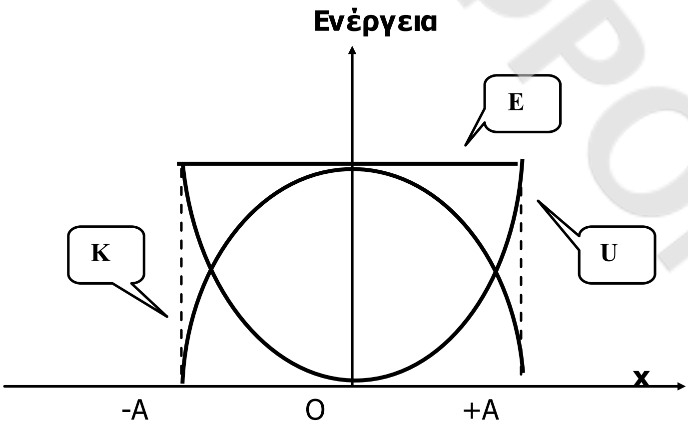
1.4.4 Γραφικές παραστάσεις

✓ **Σε συνάρτηση με τον χρόνο (φ_0=0).**



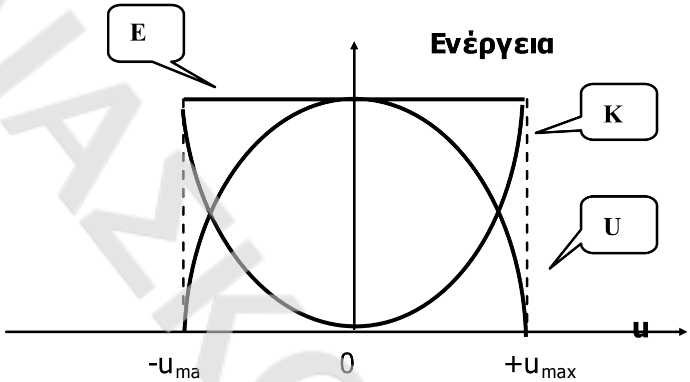
✓ **Σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.**

Ε=σταθερή , U=$\frac{1}{2}Dx^2$, K=E-U$\Rightarrow$K=E-$\frac{1}{2}Dx^2$



✓ **Σε συνάρτηση με την ταχύτητα.**

Ε=σταθερή , Κ= $\frac{1}{2}mu^2$, U=E- $\frac{1}{2}mu^2$



1.5 ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ($\frac{du}{dt}$):

Όπως γνωρίζουμε ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας εκφράζεται από την επιτάχυνση. Επομένως:

$$\frac{du}{dt}=a$$

2. Ρυθμός μεταβολής της ορμής ($\frac{dp}{dt}$):

Με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} = -D.x \\ \\ \dfrac{dp}{dt} = ma \end{array} \right.$$

3. Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ($\frac{dK}{dt}$):

Όταν μας ζητείται ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για μια απειροελάχιστη χρονική διάρκεια dt.

$$dK = dW_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F.dx}{dt} = \Sigma F.\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F.u$$

4. Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ($\frac{dU}{dt}$):

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε για τη χρονική στιγμή που θέλουμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

$$K+U=E \Leftrightarrow d(K+U)=dE=0 \Leftrightarrow dK+dU=0 \Leftrightarrow dK=-dU \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

1.6 ΕΡΓΟ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ

Επειδή η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα, για να υπολογίσουμε το έργο της μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$W_{\Sigma F}=\Delta K \Leftrightarrow W_{\Sigma F}=K_2-K_1 \Leftrightarrow W_{\Sigma F}=\frac{1}{2}mu_2^{\,2}-\frac{1}{2}mu_1^{\,2}$$

ή

$$W_{\Sigma F}=\Delta K \Leftrightarrow W_{\Sigma F}=K_2-K_1 \Leftrightarrow W_{\Sigma F}=U_1-U_2=\frac{1}{2}Dx_1^{\,2}-\frac{1}{2}Dx_2^{\,2}$$

1.7 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ποσοστό μεταβολής φυσικού μεγέθους.

$$\pi\%=\frac{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}-\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}.100\%$$

Εάν έχουμε αύξηση του μεγέθους το ποσοστό προκύπτει θετικό, ενώ αν έχουμε μείωση του μεγέθους το ποσοστό προκύπτει αρνητικό.

2. Τί ποσοστό ενός συνολικού ποσού, αποτελεί κάποιο μέρος του.

$$\pi\%=\frac{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{o}\ \pi o\sigma\acute{o}}{\sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \pi o\sigma\acute{o}}.\ 100\%$$

3. Μεγέθη που έχουν ταυτόχρονα μέγιστη και ελάχιστη απόλυτη τιμή.

Η απομάκρυνση x, η επιτάχυνση α, η δύναμη επαναφοράς ΣF, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής dp/dt και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης U, μηδενίζονται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και μεγιστοποιούνται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

Η ταχύτητα υ, η κινητική ενέργεια K και η ορμή p, μεγιστοποιούνται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και μηδενίζονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης dK/dt και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης dU/dt, μηδενίζονται τόσο στις ακραίες θέσεις όσο και στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

4. Διαφορά μεταξύ δύναμης επαναφοράς και δύναμης ελατηρίου καθώς και μεταξύ δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και δυναμικής ενέργειας ελατηρίου.

Όταν ένα σώμα δεμένο σε ένα ελατήριο ταλαντώνεται η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απομάκρυνσης x ($\Sigma F=-k.x$) του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, ενώ η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της παραμόρφωσης του ελατηρίου Δl ($F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=k.\Delta l$) οποία μετριέται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Είναι λοιπόν προφανές ότι αν το ελατήριο δεν είναι οριζόντιο, η θέση φυσικού μήκους και η θέση ισορροπίας δεν συμπίπτουν οπότε δεν ταυτίζονται και η απομάκρυνση x με την παραμόρφωση Δl ($x\neq\Delta l$), άρα και η δύναμη επαναφοράς με τη δύναμη του ελατηρίου ($\Sigma F\neq F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}$).

Για τον ίδιο λόγο όταν το ελατήριο δεν είναι οριζόντιο, δεν ταυτίζεται η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης $U=\frac{1}{2}kx^2$ με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου $U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=\frac{1}{2}k\Delta l^2$.

5. Αλλαγή θέσης ισορροπίας κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Αν το σώμα το οποίο ταλαντώνεται είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου το οποίο δεν είναι οριζόντιο (π.χ. είναι κατακόρυφο) και σε κάποια στιγμή της ταλάντωσης συγκρουστεί πλαστικά με άλλο σώμα, τότε θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση της οποίας η θέση ισορροπίας θα είναι διαφορετική γιατί το συσσωμάτωμα που προκύπτει είναι πιο βαρύ.

Αν το σώμα το οποίο ταλαντώνεται είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου το οποίο δεν είναι οριζόντιο (π.χ. κατακόρυφο) και σε κάποια στιγμή της ταλάντωσης διασπαστεί σε δύο σώματα, τότε θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση της οποίας η θέση ισορροπίας θα είναι διαφορετική γιατί το σώμα που παραμένει στο ελατήριο είναι πιο ελαφρύ.

6. Σταθερά επαναφοράς συστήματος σωμάτων που ταλαντώνεται με την βοήθεια ελατηρίου.

Έστω ότι ένα σύστημα δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 εκτελεί απλή αρμονική δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k.

Για τη σταθερά επαναφοράς του συσσωματώματος ισχύει $D=k=(m_1+m_2)\omega^2$.

Για τη σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος ξεχωριστά ισχύει $D_1=m_1\omega^2$ και $D_2=m_2\omega^2$. Προφανώς ισχύει ότι $D=D_1+D_2$.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα περιοδικό φαινόμενο επαναλαμβάνεται 16 φορές σε χρόνο ίσο με 4s. Άρα η γωνιακή συχνότητα του φαινομένου είναι ίση με:

α) 8 rad/s
β) 8π rad/s
γ) 2π rad/s
δ) 4π rad/s

2. Το μέτρο της ταχύτητας ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι μέγιστο τη στιγμή που:

α) η απομάκρυνση του υλικού σημείου είναι $\pm A$
β) η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν
γ) το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου είναι μέγιστο
δ) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το υλικό σημείο είναι μέγιστο

3. Ένα υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος:

α) υποδιπλασιάζεται
β) διπλασιάζεται
γ) τετραπλασιάζεται
δ) δεν αλλάζει

4. Η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, γίνεται ίση με μηδέν τη στιγμή κατά την οποία:

α) η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν
β) η απομάκρυνση του υλικού σημείου είναι ίση με $\pm A$

γ) το υλικό σημείο δέχεται μέγιστη συνισταμένη δύναμη
δ) το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι μέγιστο

5. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, έχει κάθε χρονική στιγμή:
α) αντίθετη φορά από την επιτάχυνση
β) φορά προς την θέση ισορροπίας
γ) ίδια φορά με την ταχύτητα
δ) φορά προς τις ακραίες θέσεις

6. Αν μεταβάλλουμε την ολική ενέργεια ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, τότε **δεν** μεταβάλλεται:
α) η μέγιστη ταχύτητα
β) το πλάτος της ταλάντωσης
γ) η περίοδος της ταλάντωσης
δ) η μέγιστη κινητική ενέργεια

7. Η δυναμική ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης:
α) είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας
β) είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης στις θέσεις $\pm A$
γ) είναι κάθε στιγμή μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια
δ) είναι αρνητική όταν η απομάκρυνση είναι αρνητική

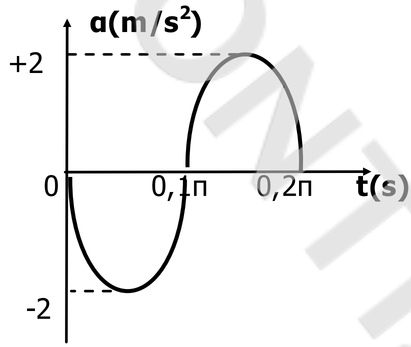
8. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:
α) εξαρτάται από τη φορά κίνησης του σώματος
β) γίνεται μέγιστη μόνο μια φορά στη διάρκεια μιας περιόδου
γ) είναι κάθε στιγμή μικρότερη από την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης
δ) είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση $x=0$

9. Η ολική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:
α) μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο
β) είναι κάθε στιγμή μεγαλύτερη από την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης
γ) καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης και τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος
δ) είναι ανάλογη με το τετράγωνο της απομάκρυνσης

10. Τη στιγμή που η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι μέγιστη:
α) η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη
β) η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν
γ) η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια του σώματος
δ) η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με μηδέν

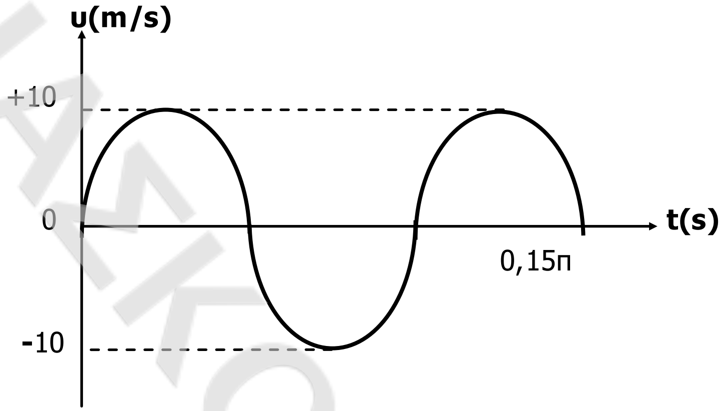
11. Τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $u = \pm \frac{\upsilon_{max}}{2}$ το πηλίκο της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με:
α) 3 **β)** 1/3 **γ)** 1 **δ)** 2

12. Το διπλανό διάγραμμα αποδίδει την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με τον χρόνο. Η μέγιστη ταχύτητα του υλικού σημείου έχει μέτρο:



α) 0,05m/s
β) 0,25m/s
γ) 0,20m/s
δ) 2,50m/s

13. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει την χρονική συνάρτηση της ταχύτητας σε μια απλή αρμονική ταλάντωση.



Τη χρονική στιγμή $t=0{,}05\pi$ s η επιτάχυνση θα είναι:

α) $a=-200m/s^2$ **β)** $a=0$ **γ)** $a=200m/s^2$ **δ)** $a=100m/s^2$

14. Η ολική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι ίση με Ε. Αν το σύστημα απορροφήσει επιπλέον ενέργεια ίση με 3Ε τότε το πλάτος της ταλάντωσης:

α) τριπλασιάζεται
β) υποτριπλασιάζεται
γ) διπλασιάζεται
δ) δεν αλλάζει

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

15. Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί ένα σύστημα ελατηρίου-σώματος είναι ανάλογη με τη μάζα του σώματος.

16. Σε σύστημα ελατηρίου-σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το ελατήριο είναι οριζόντιο.

17. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας παραμένει σταθερός.

18. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μεγίστων της δυναμικής ενέργειας είναι Τ/2.

19. Ένα περιοδικό φαινόμενο έχει περίοδο Τ=0,2 s. Τότε:
α) η συχνότητά του είναι ίση με 5 Hz
β) το φαινόμενο επαναλαμβάνεται 50 φορές σε 10 s
γ) η γωνιακή του συχνότητα είναι ίση με 10π rad/s
δ) σε κάθε δευτερόλεπτο το φαινόμενο επαναλαμβάνεται 10 φορές

20. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τότε:
α) στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη ενώ η επιτάχυνσή του είναι ίση με μηδέν.
β) στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν, ενώ η απομάκρυνση είναι μέγιστη θετική ή μέγιστη αρνητική
γ) κάθε χρονική στιγμή η επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα
δ) όταν η απομάκρυνση του σώματος είναι θετική η επιτάχυνση είναι αρνητική και αντίστροφα.

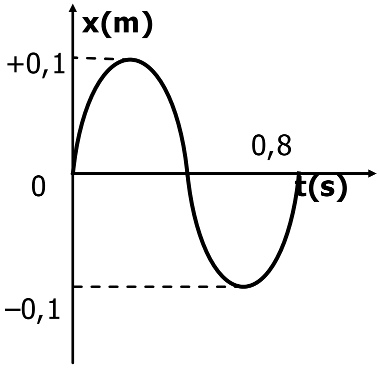
21. Η επιτάχυνση ενός σώματος μάζας m=0,1Kg που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από την εξίσωση $α=-5π^2ημ(5πt)$ (S.I). Τότε:
α) η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος είναι x=0,2ημ(5πt),(S.I).

β) τις χρονικές στιγμές 0,1 s και 0,3 s η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με μηδέν

γ) η εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης είναι υ=10πημ(5πt),(S.I).

δ) η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς είναι ίση με $\Sigma F=0,5\pi^2 N$

22. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Τότε:

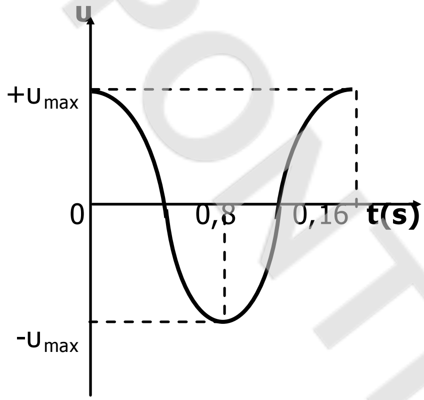
α) η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με 20 cm

β) η χρονική διάρκεια μετάβασης του σώματος από τη μια ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη ισούται με 0,2s

γ) η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το σώμα ισούται με $\alpha_{max}=0,625\pi^2$ m/s^2

δ) η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα ισούται με $\upsilon_{max}=0,5\pi$ m/s.

23. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με το χρόνο. Τότε:



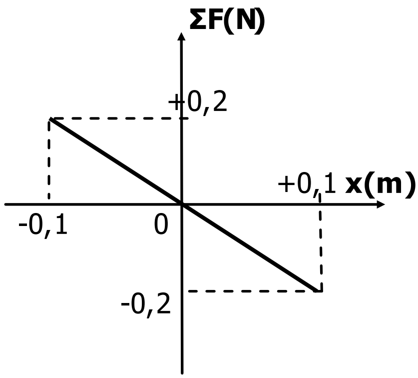
α) τη χρονική στιγμή 0,8s αντιστρέφεται η φορά της κίνησης του σώματος

β) τις χρονικές στιγμές 0,4 s και 0,12s το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο

γ) τη χρονική στιγμή 0,2s το σώμα επιβραδύνεται.

δ) τη χρονική στιγμή 0,12s η απομάκρυνση του σώματος είναι μέγιστη αρνητική

24. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του. Τότε:



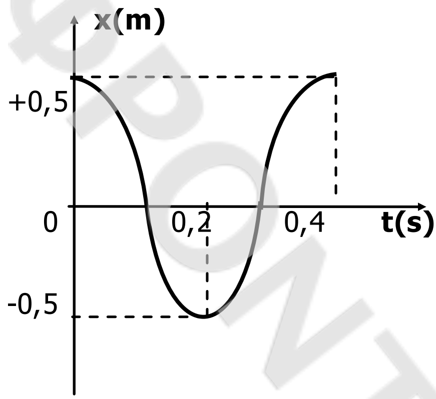
α)το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,2m.

β) η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι ίση με 2 N/m.

γ) η κλίση της ευθείας εκφράζει το πλάτος της ταλάντωσης.

δ) στη θέση x=-0,05 m η δύναμη επαναφοράς είναι ίση με 0,1 N.

25. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με το χρόνο. Τότε:



α) η ταλάντωση του σώματος έχει αρχική φάση π/2 rad

β) η επιτάχυνση και η απομάκρυνση συνδέονται με τον τύπο α=-100x (S.I)

γ) από τη χρονική στιγμή 0,1 s μέχρι τη χρονική στιγμή 0,2 s η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης αυξάνεται

δ) τη χρονική στιγμή 0,2 s η ταχύτητα είναι μηδέν

26. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, τότε:
α) η περίοδος της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται
β) το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος διπλασιάζεται
γ) το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σώματος υποδιπλασιάζεται
δ) η ενέργεια της ταλάντωσης διπλασιάζεται

Ερωτήσεις ανάπτυξης

27. Γιατί η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση λέγεται δύναμη επαναφοράς; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση τη δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.

28. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α με γωνιακή συχνότητα ω.
α) Να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας με την αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης: $υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$.
β) Να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης με την αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης.

29. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Τι ποσοστό της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι η κινητική ενέργεια, όταν η απομάκρυνση είναι $x=\dfrac{A\sqrt{3}}{2}$;

30. Ένα σώμα μάζας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T, χωρίς αρχική φάση. Να βρείτε το λόγο της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, τη στιγμή t=T/12.

31. Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και γωνιακής συχνότητας ω. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την αρνητική φορά.

A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να τη δικαιολογήσετε. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με:

α) μηδέν β) π rad γ) π/2 rad

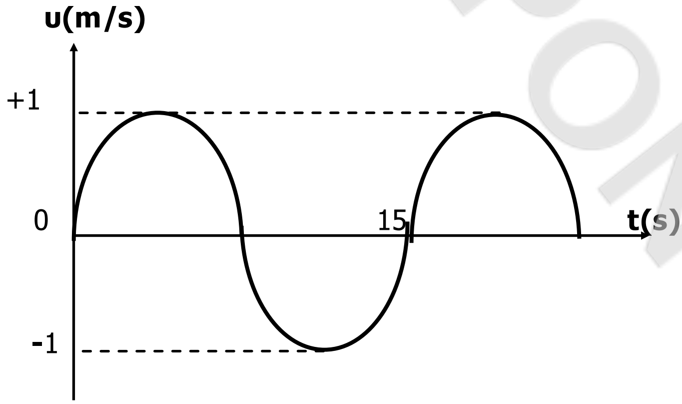
B) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές είναι λανθασμένες; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) η ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση υ=ωΑσυνωt

β) τη χρονική στιγμή t=T/8 η επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή α=+ $\frac{\omega^2 . A}{\sqrt{2}}$.

γ) τη χρονική στιγμή t=3T/8 η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά.

32. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει την χρονική συνάρτηση της ταχύτητας σε μια απλή αρμονική ταλάντωση.



α) Τη χρονική στιγμή t=15s πόση είναι η απομάκρυνση;

β) Τη χρονική στιγμή t=8s η επιτάχυνση είναι θετική, αρνητική ή μηδενική;

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

33. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $x=3ημ(2πt+π/3)$ (S.I)
Να γράψετε στο τετράδιό σας κάθε φυσικό μέγεθος της **Στήλης Α** και δίπλα την αντίστοιχη τιμή του από τα δεδομένα της **Στήλης Β.**

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Πλάτος ταλάντωσης	1 Hz
Περίοδος	3 m
Αρχική φάση	1 s
Γωνιακή συχνότητα	2π rad/s
Μέγιστη ταχύτητα	π/3
	6π m/s

Απλή αρμονική ταλάντωση σημειακού αντικειμένου

- ✓ **Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση μόνο στη περίπτωση που τη στιγμή t=0, διέρχεται από τη θέση ισορροπίας (χ=0) κινούμενο προς τη θετική φορά του άξονα (υ=0).**

- ✓ **Η χρονική διάρκεια για μετακίνηση του σώματος από τη θέση ισορροπίας στην ακραία θέση και αντίστροφα ισούται με Δt=T/4.**

- ✓ **Η σχέση $D=m.\omega^2$ δίνει τη λανθασμένη εντύπωση ότι η σταθερά επαναφοράς D εξαρτάται από τη μάζα m και από τη γωνιακή συχνότητα ω. Το σωστό είναι ότι η D εξαρτάται μόνο από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που ταλαντώνεται (μπορεί δηλαδή και από τη μάζα) και καθορίζει την γωνιακή συχνότητα ω, σύμφωνα με τον τύπο:**

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

- ✓ **Σε κάθε περίοδο, το σώμα που ταλαντώνεται διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως αν το σώμα διέρχεται κ φορές από τη θέση ισορροπίας του ανά δευτερόλεπτο, καταλαβαίνουμε ότι εκτελεί Ν=κ/2 ταλαντώσεις ανά δευτερόλεπτο με αποτέλεσμα η συχνότητα της ταλάντωσης να είναι f=κ/2 Hz.**

- ✓ **Μόνο στο οριζόντιο ελατήριο συμπίπτει η θέση ισορροπίας με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επομένως στο οριζόντιο ελατήριο ισχύει:**
  - **i)** $|x| = \Delta l$
  - **ii)** $|\Sigma F| = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}$

iii) $U_{ταλ} = U_{ελατ}$

Στο κατακόρυφο και στο πλάγιο ελατήριο εξαιτίας του βάρους του σώματος το ελατήριο είναι παραμορφωμένο στη θέση ισορροπίας. Επομένως η θέση φυσικού μήκους δεν ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας και οι παραπάνω ισότητες δεν ισχύουν.

✓ **Η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας ΣF=0.**

✓ **Η ταχύτητα στην απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με την απομάκρυνση υπολογίζεται τη διατήρηση της ενέργειας στη ταλάντωση.**

$$K + U = E \Leftrightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - \chi^2}$$

1. Ένα μικρό σώμα μάζας m=0,2Kg, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α=0,1m και συχνότητας f=0,5Hz. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα κινούμενο με ταχύτητα $υ=+\frac{\sqrt{3}}{2}υ_{max}$. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρείστε για τις πράξεις: $π^2=10$.

Απ: $ΣF=-0,2ημ(πt+\frac{11\pi}{6})$

2. Η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $υ_{max}=1m/s$ και $α_{max}=10m/s^2$ αντίστοιχα. Τη στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1=0,05m$ κινούμενο προς την ακραία θέση του θετικού ημιάξονα. Ποιές είναι οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης;

Απ: χ=0,1ημ(10t+π/6) ,υ=1συν(10t+π/6) ,α=-10ημ(10t+π/6)

3. Η εξίσωση της ταχύτητας ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι υ=πσυν(5πt+$\frac{\pi}{2}$) (S.I). Πού βρίσκεται και ποια είναι η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t=1/3 s; Δίνεται ότι π^2=10.
Απ: χ=0,1m , α=-25m/s²

4. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση $x_1=\sqrt{3}$ m και έχει ταχύτητα $υ_1$=4m/s, ενώ κάποια άλλη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση x_2=1m και έχει ταχύτητα $υ_2=-4\sqrt{3}$ m/s. Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.
Απ: υ=8συν(4t+π/3) (S.I) , α=-32ημ(4t+π/3) (S.I)

5. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α=0,2m και συχνότητα f=1Hz. Αν τη χρονική στιγμή t=0 είναι x= $0,1\sqrt{2}$ m και υ>0, να υπολογιστεί ποιες χρονικές στιγμές η απομάκρυνσή του θα είναι x=0,1m για πρώτη και για δεύτερη φορά.
Απ: t_1=7/24 s , t_2=23/24 s

6. Ένα σώμα μάζας m=0,1Kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=0,2m. Το σώμα εκτελεί 4 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονική διάρκεια Δt=0,4s και τη χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα.
α) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε βαθμολογημένους άξονες.
β) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση x_1=-0,05m.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, τη στιγμή που το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής είναι 10 $Kg.m/s^2$

Θεωρήστε για τις πράξεις: $\pi^2=10$.

Απ: α) υ=2πσυν20πt (S.I) , α=-400ημ20πt (S.I)   β) ΣF=+20N

γ) $\alpha=100 m/s^2$, $\upsilon=\sqrt{37,5}$ m/s

7. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=0,2m. Τη στιγμή t=0, το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση $x=+0,1\sqrt{2}$ m κινούμενο προς την ακραία θέση του θετικού ημιάξονα στην οποία φτάνει τη στιγμή t=0,125s.

Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απ: $x=0,2\eta\mu(2\pi t+\frac{\pi}{4})$, $\upsilon=0,4\pi\sigma\upsilon\nu(2\pi t+\frac{\pi}{4})$, $\alpha=-0,8\pi^2\eta\mu(2\pi t+\frac{\pi}{4})$

8. Ένα σώμα μάζας m=0,1kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται ότι η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι d=0,2m και ότι τη στιγμή t=0 είναι x=+0,05m και $\upsilon=-\sqrt{3}$ m/s.

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x.

β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η επιτάχυνση γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά.

γ) Να βρείτε την κινητική ενέργεια του υλικού σημείου τη στιγμή t=T/2.

Απ: α) ΣF=-40x,   β) t=π/30 s,   γ) K=0,15 J

9. Σώμα μάζας m=0,1 Kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=0,2 m και γωνιακής συχνότητας ω=10rad/s. Τη στιγμή t=0 η κινητική ενέργεια του αντικειμένου είναι ίση με το 75% της ολικής ενέργειας ενώ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας και της απομάκρυνσης είναι αντίστοιχα υ>0 και x>0. Να βρεθεί η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας

Απ: $K=0,2\ \sigma\upsilon\nu^2(10t+\pi/6)$

10. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη στιγμή t=0 βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα, κινούμενο προς τη θετική φορά και η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το 1/4 της ολικής του ενέργειας. Να βρείτε την αρχική φάση φ_o.

Απ: $\varphi_o=\pi/3$

11. Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=0,5m και συχνότητα f=2/π Hz, ενώ τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση x=+A.

α) Να γραφούν η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x και να παρασταθούν σε κοινό διάγραμμα.

β) Να γραφούν η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την ταχύτητα υ και να παρασταθούν σε κοινό διάγραμμα.

γ) Να γραφούν οι εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο t και να παρασταθούν σε κοινό διάγραμμα για την πρώτη περίοδο.

Απ: α) $U=8x^2$, $K=2-8x^2$, β) $K=0,5\upsilon^2$, $U=2-0,5\upsilon^2$ γ) $K=2\sigma\upsilon\nu^2(4t+\pi/2)$, $U=2\eta\mu^2(4t+\pi/2)$

12. Σώμα μάζας m=1Kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη δύναμη που ασκείται στο σώμα έχει μέτρο 20N και η ενέργεια της ταλάντωσης είναι 2J. Να βρείτε:

α) την χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης αν τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης

β) την ταχύτητα του σώματος την στιγμή που η δύναμη επαναφοράς είναι 10 N

γ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα του ρυθμού μεταβολής της ορμής σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα από t=0 έως t=0,3π s.

Απ: α) $U=2ημ^2(10t+3π/2)$ β) $υ=\pm\sqrt{3}\ m/$ γ) $^{dp}/_{dt}=-20ημ(10t+3π/2)$

13. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α, περίοδο Τ=12s και τη στιγμή t=0 είναι x=0 και υ>0. Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται για την απευθείας μετάβαση του σώματος από τη θέση x=+A/2 στη θέση $x=-\frac{A\sqrt{3}}{2}$

Απ: Δt=3s

14. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α=0,5m και συχνότητας f=2Hz. Τη στιγμή t=0 είναι x=0 και υ>0.
Να βρεθεί για πόσο χρόνο συνολικά κατά τη διάρκεια μιας πλήρους ταλάντωσης, η απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι μεγαλύτερη από 25cm.

Απ: Δt=1/3 s

15. Η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας m=0,2Kg που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι της μορφής $υ=υ_{max}συν(2πt+π/4)$ (S.I). Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του σώματος ισούται με U_{max}=25J. Να υπολογίσετε:

α) τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος καθώς και τη ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t=T/2, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης του σώματος

β) την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, τις χρονικές στιγμές που η ταχύτητά του ισούται με $υ_1=+2{,}5π\sqrt{3}$ m/s

γ) το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος, τις χρονικές στιγμές που η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με 16J

Θεωρήστε για τις πράξεις: $π^2=10$.

Απ: α) $υ_{max}=5π$ m/s , $υ=-2{,}5π\sqrt{2}$ m/s β) $x_1=\pm 1{,}25$ m γ) $α=\pm 80$ m/s²

16. Σώμα μάζας m=0,1Kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση ΣF=-40x(S.I) ενώ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης είναι $α_{max}=40m/s^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας αν τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση είναι $\chi = A\sqrt{2}/2$ και υ>0.

Απ: x=2συν(20t+π/4)

Απλή αρμονική ταλάντωση σώματος δεμένο σε ελατήριο.

17. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=1000N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διάρκεια της οποίας το σώμα διέρχεται 200 φορές από τη θέση ισορροπίας του σε χρονικό διάστημα Δt=10π s. Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης και επίσης ότι για t=0 είναι x>0 και υ<0. Με δεδομένο ότι αν το πλάτος της ταλάντωσης ήταν διπλάσιο τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος θα ήταν μεγαλύτερη κατά 60J να υπολογίσετε:

α) Την αρχική φάση της ταλάντωσης

β) Την μάζα του σώματος

γ) Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου τη στιγμή t=0

δ) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που περνά από τη θέση στην οποία η επιτάχυνσή του είναι $α=10\ m/s^2$

ε) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t=11π/240 s.

Απ: α) 5π/6 β) 2,5 Kg γ) 100N δ) $2\sqrt{3}$ m/s ε) 400 J/s

Εκτοξεύουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας.

✓ **Στη περίπτωση αυτή η ταχύτητα εκτόξευσης είναι ταυτόχρονα και η μέγιστη τιμή που έχει η ταχύτητα ταλάντωσης, οπότε γράφουμε:**

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_{max} = \omega . A = \sqrt{\frac{D}{m}} . A}$$

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε τη σχέση K+U=E για τη θέση της εκτόξευσης και να καταλήξουμε πάλι στη παραπάνω σχέση.

18. Στη κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\theta=30^0$, στερεώνουμε το πάνω άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k=200N/m, στο κάτω άκρο του οποίου κρεμάμε ένα σώμα μάζας m=4Kg και το σώμα ισορροπεί ακίνητο. Τη στιγμή t=0 εκτοξεύουμε το σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon=\sqrt{2}$ m/s και με φορά προς τα πάνω η οποία θεωρείται ως θετική.

α) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

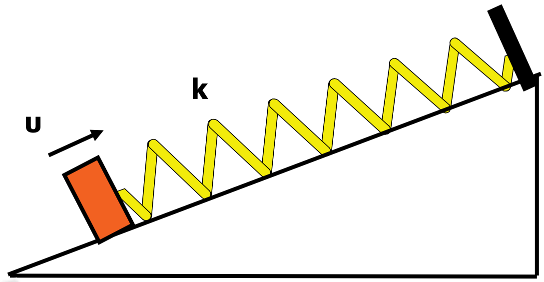
γ) Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή της εκτόξευσης το σώμα θα βρεθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά.

δ) Να υπολογίσετε τη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα τη στιγμή που έχει διανύσει διάστημα S=1m από τη στιγμή της εκτόξευσής του.

Δίνεται: $g=10$ m/s^2.

Απ: β) $a=-10\eta\mu 5\sqrt{2}\,t$ *γ)* $\Delta t=\frac{\pi\sqrt{2}}{60}\,s$ *δ)* $\Sigma F=-40$ *N*

19. Σώμα μάζας m=2Kg ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σταθεράς K=200N/m το οποίο βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^0$. Εκτοξεύουμε το σώμα προς τα πάνω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου υ=2m/s. Να βρεθούν:



α) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα
β) η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του σώματος
γ) η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.
Απ: α) Α=0,2 m β) Κ=4 J γ) $U_{ελ}$=6,25 J

20. Το πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς Κ=100N/m είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Στο κάτω άκρο του συνδέουμε σώμα μάζας m=2kg και αφήνουμε το σύστημα να ισορροπήσει. Από τη θέση ισορροπίας δίνουμε στο σώμα κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου υ= $\sqrt{2}$ m/s. Να βρεθούν:
α) Η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς και της δύναμης του ελατηρίου
β)Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) $ΣF_{max}$=20N, $F_{ελ}$=40N, β) U_{max}=2J, $U_{ελ,\,max}$=8J

Εκτρέπουμε το σώμα και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

✓ **Στη περίπτωση αυτή η θέση από την οποία θα το αφήσουμε θα είναι και ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε η αρχική απομάκρυνση θα είναι και το πλάτος της ταλάντωσης.**

21. Σώμα μάζας m=2Kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k και ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυμένο κατά x_1=0,1m. Με τη βοήθεια κατακόρυφης μεταβλητής δύναμης F μετακινούμε το σώμα προς τα πάνω κατά d=0,2m, το ακινητοποιούμε και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F.

γ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή t_1=T/2, όπου T η περίοδος ταλάντωσης.

Δίνεται: g=10m/s^2. (Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες)

Απ: α) T=0,2π s β) W=+4 J γ) $U_{ελατ}$=9 J , $U_{ταλ}$=4 J

22. Το ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο και στο άλλο άκρο του δένεται σώμα μάζας m=0,1Kg, το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά d προς τη θετική φορά και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο. Η ενέργεια που προσφέραμε στο σύστημα για να το διεγείρουμε είναι 0,2J. Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου τη στιγμή t=0 είναι 2N.

α) Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης

β) Να γράψετε την εξίσωση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο

Απ: α) A=0,2m, β) K=0,2συν²(10t+$\frac{\pi}{2}$) (SI)

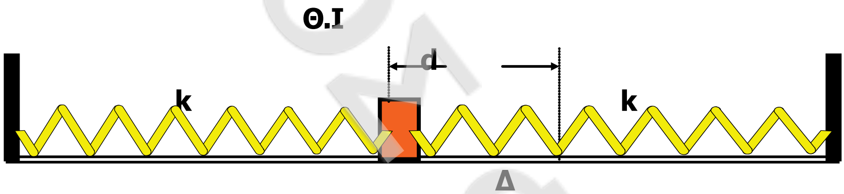
23. Σώμα μάζας m=1Kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το οποίο έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ένας άνθρωπος προκαλεί πρόσθετη συσπείρωση στο ήδη παραμορφωμένο ελατήριο κατά d=0,2m και τη στιγμή t=0 αφήνει το σώμα ελεύθερο.

α) Να υπολογιστεί η χημική ενέργεια που ξόδεψε ο άνθρωπος για τη πρόσθετη συσπείρωση του ελατηρίου

β) Να γραφεί η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο. (θεωρείστε θετική φορά προς τα πάνω).

Απ: α) $E_x=2J$, *β)* $F_{ελ}=10-20ημ(10t+3π/2)$ *(SI)*

24. Στο παρακάτω σχήμα, το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, τα δύο ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά K=50N/m και έχουν το φυσικό τους μήκος. Εκτρέπουμε το σώμα μάζας m=1Kg και το διατηρούμε ακίνητο στη θέση Δ, ασκώντας του οριζόντια δύναμη μέτρου F=20N. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί αφού καταργήσουμε τη δύναμη F.



α) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης καθώς και την ενέργεια που ξοδέψαμε για να εκτρέψουμε το σώμα από την αρχική του θέση μέχρι τη θέση Δ.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που η δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο $10\sqrt{3}$ N.

Απ: β) $A=0,2\ m$, $E=2\ J$ *γ)* $υ=1\ m/s$

Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια το εκτοξεύουμε.

✓ **Στη περίπτωση αυτή η ταχύτητα εκτόξευσης δεν είναι η μέγιστη, επομένως μπορούμε να γράψουμε μόνο τη σχέση K+U=E για τη θέση της εκτόξευσης.**

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

25. Σώμα μάζας m=1Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά $x_1=0{,}1\sqrt{3}$ m πάνω στο θετικό ημιάξονα και τη χρονική στιγμή t=0 το εκτοξεύουμε από τη θέση αυτή με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=1m/s προς τη θετική φορά.

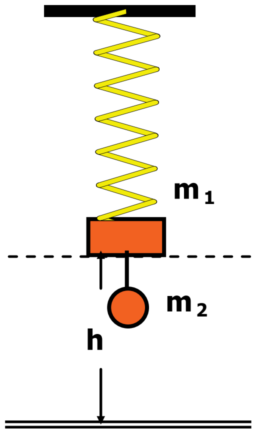
α) Να γράψετε της εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη στιγμή της εκτόξευσης του σώματος μέχρι τη στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση x_2=-A/2, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης.

Απ: α) x=0,2ημ(10t+π/3) (S.I) , υ=2συν(10t+π/3) (S.I), α=-20ημ(10t+π/3) (S.I) β) W=+1 J

Ένα σύστημα δύο σωμάτων ισορροπεί και κάποια στιγμή το ένα από τα δύο σώματα αποχωρίζεται από το σύστημα.

26. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σώμα μάζας m_1=1kg να είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου και ένα δεύτερο σώμα μάζας m_2=4kg να κρέμεται από το πρώτο με τη βοήθεια αβαρούς νήματος και να απέχει από το έδαφος απόσταση h=3,2m. Κόβουμε το νήμα που το συνδέει με το πρώτο σώμα και μέχρι το δεύτερο σώμα να φτάσει στο έδαφος, το πρώτο σώμα εκτελεί τέσσερεις πλήρεις ταλαντώσεις.



Να βρείτε το πλάτος Α της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1. (Δίνεται: π^2=10)

Απ: Α=0,04m

Μια πλαστική κρούση είναι αιτία για να ξεκινήσει μια απλή αρμονική ταλάντωση σώματος δεμένο σε ελατήριο ή να τροποποιηθεί μια ταλάντωση που συνέβαινε ήδη.

✓ **Συνήθως χρειάζεται η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο) για τη διάρκεια της κρούσης:**

$$p_{ολ,αρχ} = p_{ολ,τελ} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2).v_κ$$

✓ **Για τη χρονική στιγμή που μόλις τελείωσε η κρούση και άρχισε η ταλάντωση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στη ταλάντωση (Α.Δ.Ε.Τ).**

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

ή τη σχέση

$$\upsilon = \upsilon_{max} = \omega . A = \sqrt{\frac{D}{m}} . A$$

αν γνωρίζουμε ότι η θέση από την οποία ξεκινά η ταλάντωση είναι θέση ισορροπίας.

✓ **Πρέπει να τονίσουμε ότι αν το ελατήριο δεν είναι οριζόντιο, επειδή το συσσωμάτωμα είναι πιο βαρύ από το αρχικό σώμα, θα συμβεί αλλαγή στη θέση ισορροπίας. Οπότε δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στη κατασκευή του σχήματος, όπου θα πρέπει υποχρεωτικά να φαίνεται η θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ) του ελατηρίου.**

Ένα σώμα ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου και ξεκινά να ταλαντώνεται εξαιτίας μιας πλαστικής κρούσης.

27. Από τη κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους h=1,6m και γωνίας κλίσης $\varphi=30^o$ αφήνεται να ολισθήσει σώμα μάζας $m_1=1Kg$. Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου το σώμα συναντά λείο οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο κινείται μέχρις ότου συγκρουστεί να πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=4Kg$, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Το συσσωμάτωμα κινούμενο συναντά και συσπειρώνει ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=1000N/m που είναι οριζόντιο και έχει μόνιμα στερεωμένο το ένα άκρο του. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του m_1 με το κεκλιμένο επίπεδο είναι $\mu=\sqrt{3}/4$ να υπολογιστούν:

α) Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
β) Το ποσοστό % της ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας του m_1 κατά την ολίσθησή του στο κεκλιμένο επίπεδο.
Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) x=0,04m, β) 75%

28. Σώμα μάζας M=3,95Kg είναι ακίνητο και δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς K, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα βλήμα μάζας m=0,05Kg κινείται οριζόντια και τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα μάζας M. Μετά τη κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με μέγιστη ταχύτητα 4m/s. Το συσσωμάτωμα ξαναπερνά από τη θέση που έγινε η κρούση για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1=0,2π s.

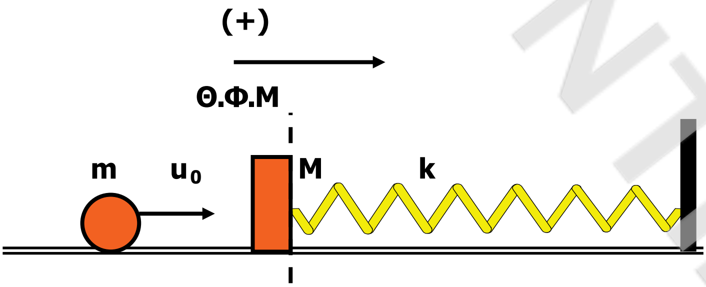
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ελάχιστα πριν τη πλαστική κρούση.

β) Να βρείτε το πηλίκο της απώλειας ενέργειας εξαιτίας της κρούσης προς την ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή που έχει υποστεί η ορμή του βλήματος μεταξύ της χρονικής στιγμής ελάχιστα πριν τη κρούση και της χρονικής στιγμής κατά την οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση $\chi_1=+0,4\sqrt{3}$ m για δεύτερη φορά.

Απ. α) 320 m/s β) 79 γ) –16,1 Kg.m/s

29. Ένα σώμα μάζας M=4Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=500N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Ένα μικρό σώμα με μάζα m=1Kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u_0=20m/s και τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας M.



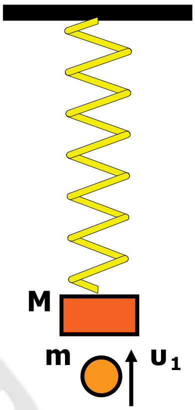
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε ενέργεια της ταλάντωσης.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τη στιγμή που η συσπείρωση του ελατηρίου είναι μέγιστη.

Απ. α) 4 m/s β) 20% γ) -200 N

30. Το σώμα μάζας Μ είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Ένα μικρό σώμα μάζας m=2Kg κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_1$ και τη στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα Μ. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει αμέσως μετά τη κρούση ορμή $P_{ολ}$=4Kg·m/s και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο Τ=0,4πs. Να υπολογίσετε:



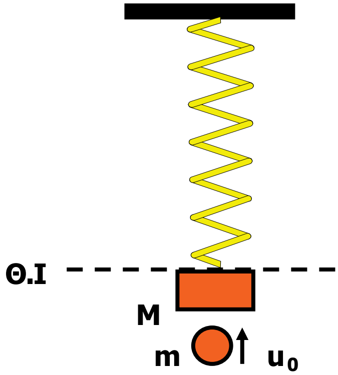
α) τη μάζα Μ και τη ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση

β) το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος

γ) τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας, θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω. Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) M=2kg, $υ_κ$=1m/s, β) A=0,2 $\sqrt{2}$ m, γ) υ=$\sqrt{2}$ συν(5t+π/4)

31. Ένα σώμα μάζας M=3Kg κρέμεται από το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Αρχικά το σώμα μάζας M ισορροπεί ακίνητο. Μια μικρή σφαίρα μάζας m=1Kg κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και τη στιγμή t=0 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα μάζας M. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ολική ενέργεια E=2J.



α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας της μικρής σφαίρας ελάχιστα πριν την κρούση.

β) Να γράψετε τις χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Θεωρήστε θετική φορά για την ταλάντωση προς τα πάνω.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ. α) $2\sqrt{3}$ m/s β) α=-5ημ(5t+π/6) γ) 18 J

32. Σώμα μάζας M=2Kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=2N/cm. Ένα βλήμα μάζας m=1Kg εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα u_0 από σημείο που βρίσκεται κατά h=0,8m πιο κάτω από το σώμα μάζας M. Το βλήμα σφηνώνεται στο σώμα και το συσσωμάτωμα που προκύπτει ανεβαίνει κατά 0,2m πάνω από τη αρχική θέση ισορροπίας του σώματος μάζας M.

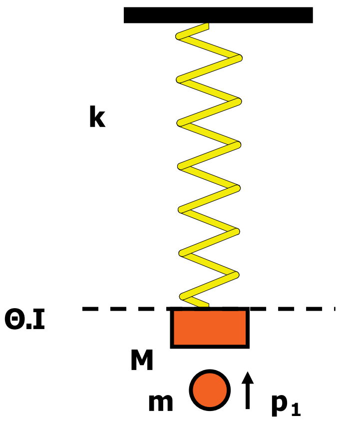
α) Να υπολογιστεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που είχε το βλήμα τη στιγμή της σύγκρουσης, το οποίο μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη κρούση.

β) Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας u_0.

Δίνεται $g=10 m/s^2$.

Απ: α) (200/3) % *β) $υ_0=2\sqrt{13}$ m/s*

33. Το σώμα μάζας M του σχήματος είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=800N/m και είναι ακίνητο. Το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά Δx=0,1m σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Ένα σώμα μάζας m=4Kg κινείται κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας M. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Να υπολογίσετε:



α) το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος

β) το μέτρο της ορμής του σώματος μάζας m ελάχιστα πριν την κρούση

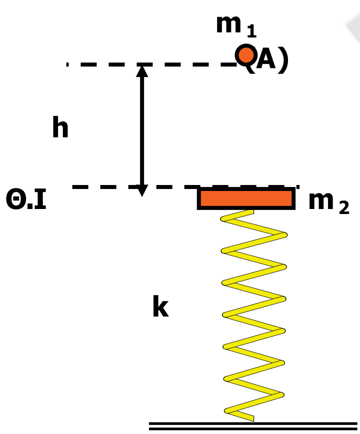
γ) το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς που δέχεται το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του. ($g=10$ m/s^2)

Απ. α) 0,15 m *β) $8\sqrt{3}$ Kg.m/s* *γ) 120 N*

34. Σώμα μάζας $m_1=3Kg$ κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=100N/m και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο στερεωμένο στην οροφή. Από σημείο A που βρίσκεται κατά h=1,2m κάτω από το m_1 βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω σώμα μάζας $m_2=1Kg$ με αρχική ταχύτητα $υ_0=6m/s$ και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το m_1. Αν θεωρήσουμε ως αρχή των χρόνων t=0 τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα πάνω, να βρείτε:

α) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος m_2 που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά τη κρούση.
β) Μετά από πόσο χρόνο το σύστημα θα περάσει για πρώτη φορά από το σημείο που έγινε η κρούση κινούμενο προς τα κάτω.
γ) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος όταν ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι μηδέν.
δ) Το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη χρονική στιγμή t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή που το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συσπείρωση για πρώτη φορά.
Δίνεται $g=10\ m/s^2$.
Απ: α) -25%   β) 2π/15 s   γ) 0 ή ± 20 Kg.m/s^2 δ) +2,5J

35. Το σώμα μάζας $m_2=2Kg$ του παρακάτω σχήματος είναι δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο, και ισορροπεί ακίνητο. Ένα σώμα μάζας $m_1=1Kg$ αφήνεται ελεύθερο από σημείο Α που απέχει από το σώμα μάζας m_2 απόσταση h. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά και το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά την κρούση διανύει διάστημα S=0,2m μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά. Αν η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι E=12J, να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

β) την απόσταση h

γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας της κρούσης

δ) τη σταθερά του ελατηρίου. ($g=10\ m/s^2$)

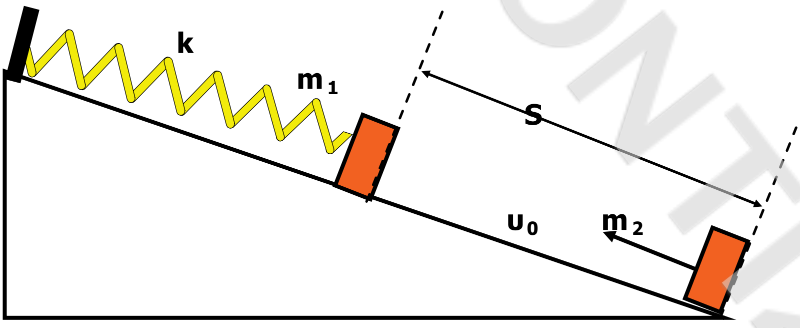
Απ. α) 2 m/s β) 1,8 m γ) 4 Kg.m/s δ) 400 N/m

36. Από κατακόρυφο ελατήριο κρέμεται σώμα μάζας M=0,8Kg και το σύστημα ισορροπεί. Από απόσταση h=2,55m κάτω από το σώμα μάζας M βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω βλήμα μάζας m=0,2Kg με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0$=10m/s. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά και το συσσωμάτωμα που προκύπτει ανεβαίνει κατά 0,1m πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος. Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απ: k=156 N/m

37. Σώμα (1) μάζας m_1=2Kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k=100N/m που βρίσκεται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $φ=30^o$. Από απόσταση S=1,3m από το σώμα (1), πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, ρίχνουμε προς τα πάνω σώμα (2) μάζας m_2=2Kg με ταχύτητα $υ_o$=4m/s.



Αν η κρούση των σωμάτων είναι πλαστική, να βρείτε την απόσταση που θα διατρέξει το συσσωμάτωμα μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητά του.
Δίνεται: $g=10m/s^2$
Απ: $d=0,1m$

38. Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400N/m$ ισορροπεί σώμα μάζας $m_1=10$ Kg και σε άγνωστο ύψος h πάνω από το σώμα αυτό βρίσκεται δεύτερο σώμα ίσης μάζας. Αφήνουμε ελεύθερο το δεύτερο σώμα και αυτό συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το πρώτο. Να βρείτε το ύψος h στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το δεύτερο σώμα , ώστε η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά τη κρούση να ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Δίνεται: $g=10\ m/s^2$
Απ: h=0,75m

Ένα σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου ταλαντώνεται και όταν περνά από τη θέση ισορροπίας, συγκρούεται πλαστικά με ένα άλλο σώμα.

39. Ένα σώμα μάζας M=8Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=800N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί ακίνητο. Ασκούμε κατακόρυφη δύναμη στο σώμα μάζας Μ συμπιέζοντας το ελατήριο, ώστε να συσπειρωθεί επιπλέον κατά $\Delta x=0,5m$. Αφήνουμε το σώμα μάζας Μ να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από τη θέση που το εκτρέψαμε και όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα πάνω, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ένα άλλο σώμα μάζας m=8Kg , το οποίο κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $u_1=1m/s$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ως t=0 την στιγμή που το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.
γ) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη χρονική στιγμή που τελείωσε η κρούση μέχρι τη στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά. ($g=10\ m/s^2$)

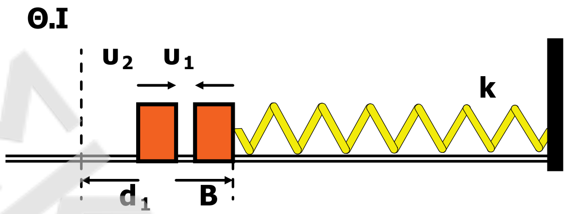
Απ. α) 2m/s β) $x=0,3\,ημ(5\sqrt{2}\,t+π/2)$ γ) +4 J

40. Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1=1Kg$ είναι δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και ισορροπεί. Το κάτω άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου κατά d=0,2m προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα $Σ_1$ καθώς ανέρχεται και περνά από τη θέση ισορροπίας, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2=3Kg$ το οποίο κατέρχεται με ταχύτητα μέτρου $8/3 m/s$. Μετά τη κρούση το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
α) Να βρείτε τη κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση.
β) Να βρείτε το ποσό της θερμότητας που παράγεται κατά τη κρούση.
γ) Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης.
δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής αμέσως μετά τη κρούση καθώς και στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης.
ε) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας αμέσως μετά τη κρούση.
Θεωρήστε την προς τα πάνω φορά ως θετική και ότι $g=10\ m/s^2$.

Απ: α) -3/2 m/s β) 49/6 J γ) $0,3\sqrt{2}$ m δ) -30N , $+30\sqrt{2}$ N ε) -45 J/s

Ένα σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου ταλαντώνεται και όταν περνά από μια τυχαία θέση, συγκρούεται πλαστικά με ένα άλλο σώμα.

41. Ένα σώμα μάζας m_1=4Kg είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο και δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=1600N/m το οποίο βρίσκεται στη κατάσταση φυσικού μήκους.



Εκτρέπουμε το σώμα μάζας m_1 από τη θέση ισορροπίας του καταναλώνοντας ενέργεια E=288J και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση όπου το εκτρέψαμε. Τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 διέρχεται από τη θέση Β η οποία απέχει απόσταση $d_1=0,3\sqrt{3}$m από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με μικρό σώμα μάζας m_2=12Kg, που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο έχοντας αντίθετη ταχύτητα από αυτή του σώματος μάζας m_1.

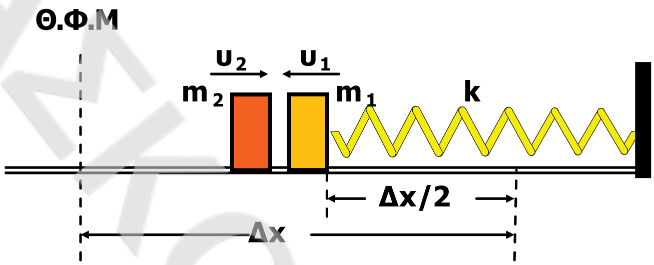
α) Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του συσσωματώματος ελάχιστα μετά τη κρούση

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 πριν τη κρούση.

γ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα θα διέλθει από τη θέση Β για πρώτη φορά μετά τη κρούση.

Απ. α) 3 m/s β) χ=0,6ημ(10t+π/3) (S.I) γ) π/30 s

42. Ένα σώμα μάζας m_1=4Kg είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί ακίνητο στο λείο οριζόντιο δάπεδο με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Εκτρέπουμε οριζόντια το σώμα m_1 από τη θέση ισορροπίας του, συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά $\Delta x=0{,}4\sqrt{3}\,m$ και κατόπι το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Τη στιγμή που φτάνει για πρώτη φορά στο μισό της μέγιστης εκτροπής του συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=12Kg$, το οποίο κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_2=2m/s$ και έχει αντίθετη φορά από αυτή του σώματος με μάζα m_1.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής του σώματος με μάζα m_1 ελάχιστα πριν τη κρούση.

β) Να βρείτε την απώλεια μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης.

γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος που προκύπτει, θεωρώντας ως στιγμή t=0, τη στιγμή της σύγκρουσης και ως θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά.

δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Απ: α) $p_1=24kg\cdot m/s$, β) $E_{απωλ}=96J$, γ) $a=-5\sqrt{3}\,ημ(5t+π/2)$,
δ) $K=24συν^2(5t+π/2)$

43. Σώμα μάζας M=1 Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m και ισορροπεί. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά Δχ=0,2m και το αφήνουμε ελεύθερο. Καθώς το σώμα περνά από τη θέση $x=+0{,}1\sqrt{2}m$, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας m που κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $υ_2=2m/s$.

α) Ποια πρέπει να είναι η μάζα m, ώστε το συσσωμάτωμα να ακινητοποιηθεί στιγμιαία αμέσως μετά τη κρούση;

β) Να γραφεί η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης αν t=0 θεωρηθεί η στιγμή της κρούσης.

γ) Ποια στιγμή το συσσωμάτωμα θα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά μετά την κρούση;

Απ: α) m=1 Kg   β) $x=0,1\sqrt{2}$ ημ(10t + π/2) (S.I)   γ) t=π/10 s

44. Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=1Kg που είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=0,2m κατά μήκος λείου οριζόντιου επιπέδου. Όταν το σώμα αυτό βρίσκεται στη θέση όπου η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και κινείται κατά τη θετική φορά, βλήμα μάζας m_2=0,01Kg κινούμενο στην ίδια διεύθυνση με αντίθετη φορά και ταχύτητα μέτρου $υ_2=200\sqrt{3}$ m/s διέρχεται ακαριαία μέσω του σώματος με αποτέλεσμα η ταχύτητα του βλήματος να υποδιπλασιαστεί.

α) Να βρείτε το πλάτος της νέας ταλάντωσης.

β) Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής ενέργειας της ταλάντωσης που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της ανελαστικής κρούσης.

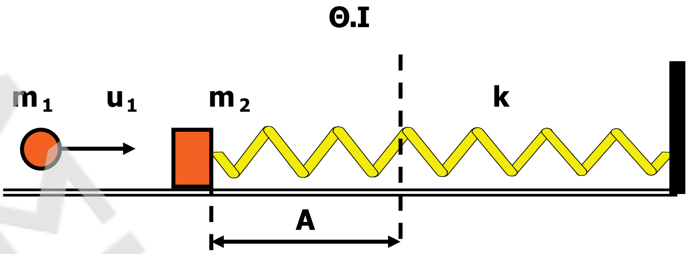
γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ στις θέσεις όπου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι μηδέν κατά τη διάρκεια της νέας ταλάντωσης.

Απ: α) A΄=0,1m   β) 75%   γ) 0 ή $\pm 10N$

Ένα σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου ταλαντώνεται και όταν βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης, συγκρούεται πλαστικά με ένα άλλο σώμα.

45. Το σώμα μάζας m_2=2,98Kg του παρακάτω σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=1200N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ενέργεια ταλάντωσης E=18J.

Όταν το σώμα μάζας m_2 φτάνει στην ακραία θετική του θέση, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με βλήμα μάζας m_1=20g το οποίο κινείται με ταχύτητα μέτρου u_1=300m/s, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά τη κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



α) Να υπολογίσετε την περίοδο και την ολική ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
β) Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης.
γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος θεωρώντας ως στιγμή t=0 τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα αριστερά.
Απ. α) 0,1π s , 24J β) 894J γ) x=0,2ημ(20t+2π/3)

Πλάγια πλαστική κρούση και απλή αρμονική ταλάντωση

✓ **Αν η πλαστική κρούση είναι πλάγια αλλά η κοινή ταχύτητα που θα προκύψει είναι υποχρεωτικά πάνω σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση (π.χ. άξονας χ΄χ), τότε αναλύουμε την ταχύτητα του βλήματος σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες πάνω στους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο μόνο στον άξονα χ΄χ.**

46. Σώμα μάζας M είναι στερεωμένο στη μια άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο. Εκτρέπουμε το σώμα κατά x_1 από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο. Τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ένα δεύτερο σώμα μάζας m το οποίο πέφτει κατακόρυφα σφηνώνεται σε αυτό. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Απ: $A' = x_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}$

Διάσπαση και απλή αρμονική ταλάντωση

47. Σώμα μάζας M=2Kg ισορροπεί ακίνητο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το κάτω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα διασπάται ακαριαία σε δύο κομμάτια ίσης μάζας, εξαιτίας κάποιας έκρηξης. Αμέσως μετά το ένα κομμάτι (A) εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω φτάνοντας σε ένα μέγιστο ύψος h=0,15m πάνω από το σημείο της έκρηξης, ενώ το άλλο κομμάτι (B) που παραμένει στο ελατήριο αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας θετική φορά θεωρείται προς τα κάτω. Μόλις το κομμάτι (A) φτάσει στο μέγιστο ύψος απομακρύνεται και έτσι δεν συγκρούεται με το σώμα (B). Να υπολογίσετε:

α) Τη δύναμη του ελατηρίου και τη δύναμη επαναφοράς, τη χρονική στιγμή που το κομμάτι (B) που ταλαντώνεται βρεθεί στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης.

β) Το λόγο της κινητικής ενέργειας του κομματιού (A) αμέσως μετά την έκρηξη προς την ενέργεια της ταλάντωσης του κομματιού (B).

γ) Την απόσταση του κομματιού (B) από το σημείο της έκρηξης τη χρονική στιγμή t=T/6, όπου T είναι η περίοδος της ταλάντωσης

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απ: α) $F_{επαν}=20N$, $F_{ελατ}=10N$ *β) 3/4* *γ) d=0,1m*

Χάσιμο επαφής στην απλή αρμονική ταλάντωση

48. Το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο και στο πάνω άκρο του είναι δεμένο ένα σώμα Α μάζας M=3Kg. Πάνω στο σώμα Α είναι τοποθετημένο ένα άλλο σώμα Β μάζας m=1Kg και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά 0,4m. Στη συνέχεια εκτρέπουμε το σύστημα προς τα κάτω κατά 0,8m από τη θέση ισορροπίας του και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος και τη σταθερά επαναφοράς κάθε μάζας ξεχωριστά.

β) Να δείξετε ότι το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α και να βρείτε τη θέση και τη ταχύτητα που θα έχει εκείνη τη στιγμή. Θεωρείστε θετική φορά προς τα πάνω.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή που χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απ: α) ω=5rad/s, $D_1=75N/m$, $D_2=25N/m$ β) y=0,4m, $υ=2\sqrt{3}\,m/s$ γ) dp/dt=-40N

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ο πυκνωτής

Χωρητικότητα πυκνωτή

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή είναι το σταθερό πηλίκο του φορτίου του q προς την τάση των οπλισμών του V_C.

$$C = \frac{q}{V_C} \quad \text{(1 Farad)}$$

Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο ενός φορτισμένου πυκνωτή υπολογίζεται από τους τύπους:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad U_E = \frac{1}{2}CV^2 \qquad U_E = \frac{1}{2}qV$$

Φόρτιση από πηγή συνεχούς τάσης

Όταν ένας πυκνωτής φορτιστεί από πηγή συνεχούς τάσης V, όταν θα έχει ολοκληρωθεί η φόρτισή του, η τάση του θα γίνει ίση με την τάση της πηγής που τον φόρτισε. Άρα το φορτίο που θα αποκτήσει θα είναι ίσο με:

Q=C.V

Αν μας δίνεται η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής E, μπορούμε να γράψουμε Q=C.E

Το ιδανικό πηνίο

Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) από αυτεπαγωγή πάνω στο πηνίο ($E_{αυτ}$)

Όταν ένα πηνίο διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα, δημιουργείται πάνω του ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή ($E_{αυτ}$) , η οποία δίνεται από τη σχέση:

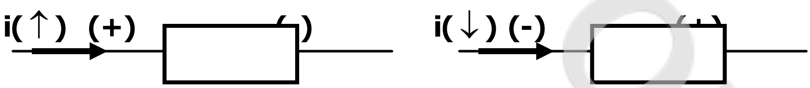
$$E_{αυτ} = -L\frac{di}{dt}$$

L: συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου (1 Henry)

$\frac{di}{dt}$: ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος (1 A/s)

Πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή

Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz **η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι τέτοια ώθστε να αντιδρά στην μεταβολή του ρεύματος που την προκάλεσε.** Δηλαδή όταν το ρεύμα αυξάνεται η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι αντίθετη της φοράς του προσπαθώντας να εμποδίσει την αύξησή του, ενώ όταν το ρεύμα ελαττώνεται η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι σύμφωνη της φοράς του προσπαθώντας να εμποδίσει την ελάττωσή του.



Τάση στα άκρα ιδανικού πηνίου

Επειδή ένα ιδανικό πηνίο θεωρούμε ότι δεν παρουσιάζει ωμική αντίσταση, η τάση στα άκρα του V_L θα οφείλεται αποκλειστικά στην ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται πάνω του.

$$V_L = E_{αυτ}$$

Ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου δίνεται από την σχέση:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Περίοδος ηλεκτρικής ταλάντωσης

Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης που συμβαίνει σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC (κύκλωμα Thomson) δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Επίσης ισχύουν οι τύποι $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ και $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή

✓ **Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή (q=+Q και i=0).** Τότε το φορτίο του πυκνωτή την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Στη σχέση αυτή θετικό θεωρείται το φορτίο του πυκνωτή, όταν η πολικότητά του είναι ίδια με αυτή που υπήρχε τη χρονική στιγμή t=0.

✓ **Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει η φόρτιση του πυκνωτή (q=0 και i=+I).** Τότε <u>αποδεικνύεται</u> ότι το φορτίο του πυκνωτή την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$q = Q\eta\mu\omega t \text{ ή } q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Χρονική εξίσωση του ρεύματος

✓ **Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή (q=+Q και i=0).** Τότε το ρεύμα του κυκλώματος την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$\iota = -\mathrm{I}\eta\mu\omega t \quad \text{όπου I=ωQ}$$

Στη σχέση αυτή θετικό θεωρείται το ρεύμα του κυκλώματος, όταν η φορά του είναι προς εκείνο τον οπλισμό που ήταν θετικά φορτισμένος τη χρονική στιγμή t=0.

✓ **Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει η φόρτιση του πυκνωτή (q=0 και i=+I).** Τότε αποδεικνύεται ότι το ρεύμα του κυκλώματος την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$i = I\sigma\upsilon\nu\omega t \;\; \text{ή} \;\; \iota = -\mathrm{I}\eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Διαφορά φάσης φορτίου-ρεύματος

✓ **Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή (q=+Q και i=0).** Τότε ισχύουν οι τύποι:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \Leftrightarrow q = Q\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iota = -\mathrm{I}\eta\mu\omega t \Leftrightarrow i = I\eta\mu(\omega t + \pi)$$

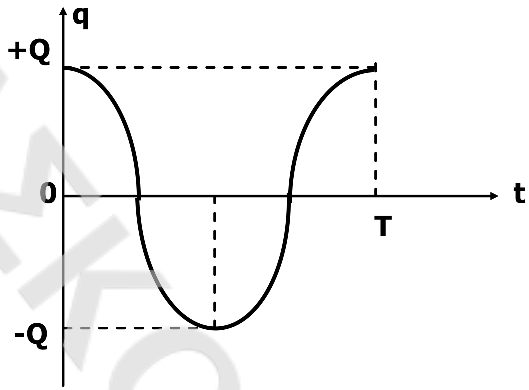
Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο αυτά μεγέθη. Συγκεκριμένα είναι:

$$\Delta\phi = \phi_i - \phi_q = (\omega t + \pi) - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{2}$$

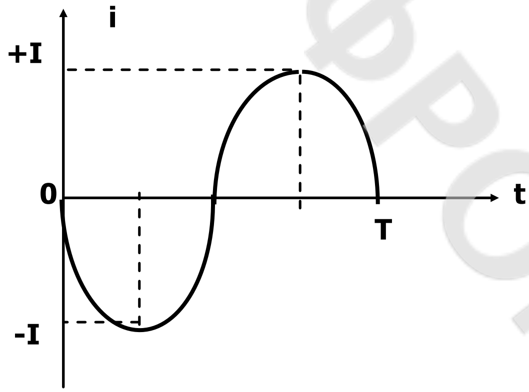
Δηλαδή το ρεύμα προηγείται φασικά κατά $\frac{\pi}{2}$ του φορτίου που σημαίνει ότι οι τιμές του προηγούνται χρονικά κατά $\frac{T}{4}$ των αντίστοιχων τιμών του φορτίου.

Γραφικές παραστάσεις

✓ **Φορτίου-χρόνου ($q=Q\sigma\upsilon\nu\omega t$)**



✓ **Ρεύματος-χρόνου ($i=-I\eta\mu\omega t$)**



ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου πυκνωτή

- ✓ Σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- ✓ Η ενέργεια του πυκνωτή κυμαίνεται από 0 μέχρι μια μέγιστη τιμή

$$U_{E,\max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- ✓ Σε συνάρτηση με το χρόνο

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{(Q\sigma\upsilon\nu\omega t)^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου

- ✓ Σε συνάρτηση με το ρεύμα του κυκλώματος

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

- ✓ Η ενέργεια του πηνίου κυμαίνεται από 0 μέχρι μια μέγιστη τιμή

$$U_{B\max} = \frac{1}{2}LI^2$$

- ✓ Σε συνάρτηση με το χρόνο

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow U_B = \frac{1}{2}L(-I\eta\mu\omega t)^2 \Rightarrow U_B = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t$$

Ολική ενέργεια

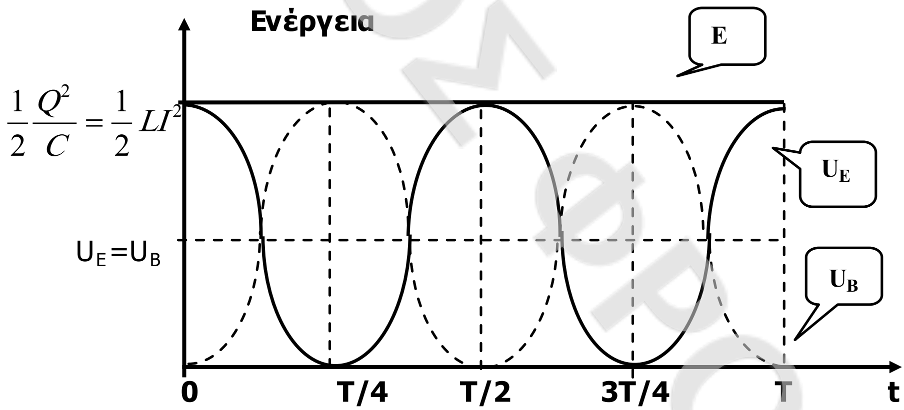
✓ Είναι η ενέργεια που υπάρχει στο κύκλωμα όταν ξεκινάει η ηλεκτρική ταλάντωση και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα των άλλων δύο ενεργειών.

$$E=U_E + U_B$$

✓ Ισχύει ότι $E=U_{E,max}=U_{B,max}$

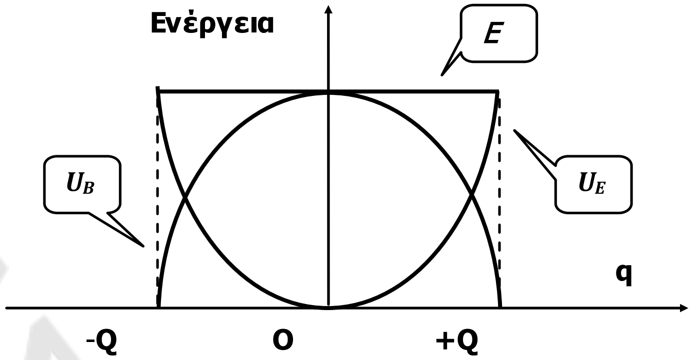
Γραφικές παραστάσεις

✓ **Σε συνάρτηση με το χρόνο (t=0: q=Q και i=0)**



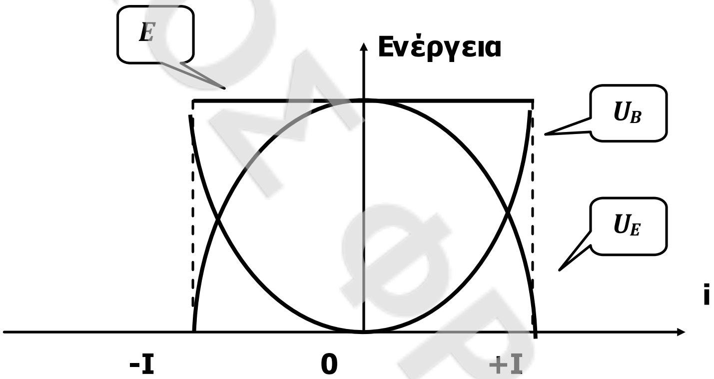
✓ **Σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή**

Ε=σταθερή, $U_E=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$, $U_B=E-\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$



✓ **Σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος**

Ε=σταθερή, $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, U_E=E - $\frac{1}{2}Li^2$



ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

✓ Ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή

Από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος προκύπτει ότι:

$$\frac{dq}{dt} = i$$

✓ Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος (απόλυτη τιμή)

Από τον τύπο υπολογισμού της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή προκύπτει ότι:

$$|E_{αυτ}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{|E_{αυτ}|}{L} \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{V_L}{L} \quad (1)$$

Επειδή όμως το ιδανικό πηνίο και ο πυκνωτής έχουν κοινά άκρα θα έχουν κάθε στιγμή την ίδια τάση, δηλαδή $V_L=V_C$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{V_C}{L} = \frac{\frac{|q|}{C}}{L} = \frac{|q|}{LC} \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \omega^2 |q|$$

✓ Ρυθμός μεταβολής της τάσης πυκνωτή(απόλυτη τιμή)

Από τον τύπο ορισμού της χωρητικότητας πυκνωτή έχουμε:

$$C = \frac{|q|}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{|q|}{C} \Rightarrow dV_C = \frac{1}{C} d|q| \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}\frac{d|q|}{dt} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{|i|}{C}$$

✓ Ρυθμός μεταβολής της τάσης του ιδανικού πηνίου(απόλυτη τιμή)

Επειδή το ιδανικό πηνίο και ο πυκνωτής έχουν κοινά άκρα θα έχουν κάθε στιγμή την ίδια τάση, δηλαδή $V_L=V_C$.

Επομένως: $dV_L = dV_C \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = \frac{|i|}{C}$

✓ Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή είναι εξ' ορισμού η ισχύς του πυκνωτή. Άρα:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_C = V_C i = \frac{q}{C} i = \frac{Q\sigma\upsilon\nu\omega t(-I\eta\mu\omega t)}{C} = -\frac{QI}{C}\eta\mu\omega t.\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$$

$$\frac{dU_E}{dt} = -\frac{QI}{2C}\eta\mu 2\omega t$$

✓ Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ιδανικού πηνίου

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πηνίου μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$U_E + U_B = E \Rightarrow dU_E + dU_B = 0 \Rightarrow dU_B = -dU_E \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = +\frac{QI}{2C}\eta\mu 2\omega t$$

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ιδανικό κύκλωμα L-C εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο τη χρονική στιγμή που η ένταση του ρεύματος:
α) έχει μέγιστη θετική ή μέγιστη αρνητική τιμή
β) έχει τιμή ίση με μηδέν
γ) αποκτά μια οποιαδήποτε θετική τιμή
δ) αποκτά μια οποιαδήποτε αρνητική τιμή

2. Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης ενός ιδανικού κυκλώματος L-C, θα διπλασιαστεί αν διπλασιαστεί:
α) ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου
β) η χωρητικότητα του πυκνωτή
γ) η χωρητικότητα του πυκνωτή και ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου
δ) η ολική ενέργεια της ταλάντωσης

3. Η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων που εκτελεί ένα ιδανικό κύκλωμα L-C είναι ίση με f. Αν αντικαταστήσουμε τον πυκνωτή με άλλο που έχει διπλάσια χωρητικότητα, τότε η νέα συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης γίνεται ίση με f′. Το πηλίκο f′/f έχει τιμή ίση με:
α) 2 **β)** $\sqrt{2}$ **γ)** 1/2 **δ)** $\sqrt{2}/2$

4. Ένα ιδανικό κύκλωμα L-C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Όταν η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με $i = \pm \frac{I}{2}$ το πηλίκο της ηλεκτρικής προς τη μαγνητική ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με:
α) 3 **β)** 1/3 **γ)** 1 **δ)** 2

5. Ένα ιδανικό κύκλωμα L-C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Το πηλίκο της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή προς την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου γίνεται ίσο με τη μονάδα, τη χρονική στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή ισούται με:

α) q= $\pm\frac{Q}{2}$ β) q= $\pm\frac{Q}{4}$ γ) q= $\pm\frac{Q\sqrt{3}}{2}$ δ) q= $\pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}$

6. Ένα ιδανικό κύκλωμα L-C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η ηλεκτρική ενέργεια είναι ίση με τη μαγνητική τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος έχει την τιμή:

α) i= $\pm\frac{\omega.Q}{2}$ β) i= $\pm\frac{\omega.Q}{\sqrt{2}}$ γ) i= $\pm\omega.Q.\sqrt{2}$

7. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC με διακόπτη αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος και ο διακόπτης είναι ανοιχτός. Τη χρονική στιγμή t=0 κλείνουμε τον διακόπτη.

α) Ο πυκνωτής εκφορτίζεται ακαριαία.

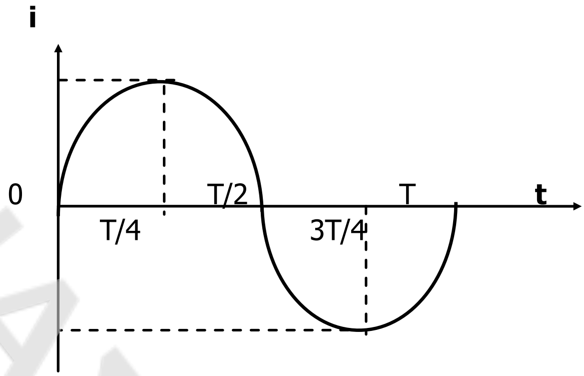
β) Η ένταση του ρεύματος είναι αρχικά μηδέν και αυξάνεται προοδευτικά μέχρι να αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της, τη στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή μηδενίζεται.

γ) Η ένταση του ρεύματος αποκτά ακαριαία τη μέγιστη τιμή της.

δ) Η ένταση του ρεύματος αρχίζει να ελαττώνεται από μια αρχική τιμή και τελικά μηδενίζεται μόλις εκφορτιστεί ο πυκνωτής.

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

8. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο σε ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες;



α) Τη χρονική στιγμή t=0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος.
β) Από (T/4 – T/2) ο πυκνωτής εκφορτίζεται.
γ) Από (3T/4 – T) το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια.
δ) Τη χρονική στιγμή t=T/2 η ενέργεια στο πηνίο ισούται με την ολική ενέργεια του κυκλώματος.
ε) Από (T/2 – 3T/4) το ρεύμα στο κύκλωμα μειώνεται.

9. Φορτίζουμε τον πυκνωτή ενός ιδανικού κυκλώματος L-C υπό τάση V, οπότε το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με ενέργεια Ε και περίοδο Τ. Αν φορτίσουμε αρχικά τον πυκνωτή υπό τάση 2V, τότε:
α) η ολική ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με 4Ε
β) η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με 2Τ

10. Ιδανικό κύκλωμα L-C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με πλάτος φορτίου Q και πλάτος ρεύματος I.
α) Όταν η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι μέγιστη, τότε και η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι μέγιστη.
β) Τις χρονικές στιγμές που το φορτίο ισούται με q=+Q/2, η ένταση του ρεύματος
ισούται με i= $\pm\frac{I\sqrt{3}}{2}$.

11. Οι πυκνωτές δύο ιδανικών κυκλωμάτων L-C, A και B έχουν χωρητικότητες C_A και C_B=2 C_A, ενώ τα αντίστοιχα πηνία έχουν συντελεστές αυτεπαγωγής L_A και $L_B= L_A/2$. Τα δύο κυκλώματα εκτελούν ηλεκτρικές ταλαντώσεις ίσης ολικής ενέργειας.

α) Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις που εκτελούν τα δύο κυκλώματα έχουν ίσες συχνότητες

β) Οι μέγιστες τιμές του φορτίου των πυκνωτών είναι ίσες

γ) Αν το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα Α είναι I_A, τότε το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα Β είναι $I_B= I_A.\sqrt{2}$

δ) Η μέγιστη τάση που αποκτά ο πυκνωτής του κυκλώματος Α είναι διπλάσια της μέγιστης τάσης που αποκτά ο πυκνωτής του κυκλώματος Β

12. Η συχνότητα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση διπλασιάζεται όταν τετραπλασιάζεται ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.

13. Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που το φορτίο ενός οπλισμού είναι +Q μέχρι να γίνει –Q είναι Τ.

14. Όταν τη στιγμή t=0 είναι το φορτίο του πυκνωτή q=+Q τότε η χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή είναι q=Qημ(ωt + π/2).

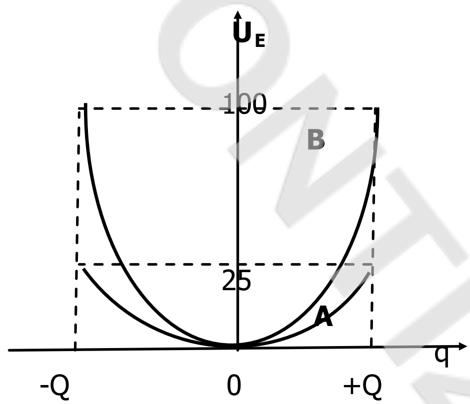
15. Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ενέργειας του πυκνωτή σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι Τ/2.

16. Για δύο κυκλώματα L-C που εκτελούν αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις και τα πηνία τους έχουν τον ίδιο συντελεστή αυτεπαγωγής, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου των δύο πυκνωτών σε συνάρτηση με το φορτίο τους, μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο σχήμα. Για τα δύο κυκλώματα ισχύει:

α) $C_A=2C_B$

β) $T_A=2T_B$

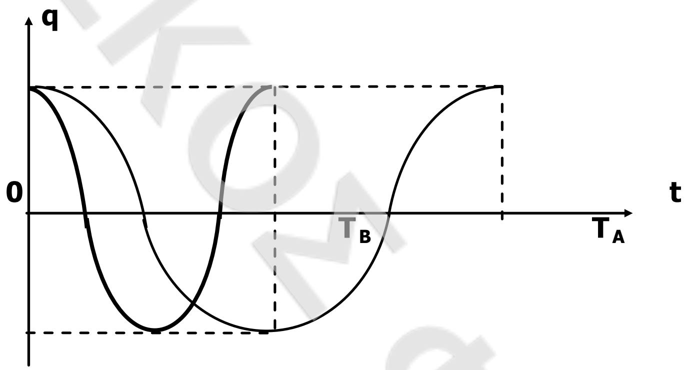
γ) $I_A=2I_B$



Να χαρακτηρίσετε τις παραπάνω προτάσεις σαν σωστές ή λανθασμένες.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

17. Διαθέτουμε δύο ιδανικά κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων Α και Β. Οι συντελεστές αυτεπαγωγής των πηνίων των δύο κυκλωμάτων είναι ίσοι. Στο σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το φορτίο των δύο πυκνωτών σε συνάρτηση με το χρόνο.



Α) Να εξετάσετε σε ποιό από τα δύο κυκλώματα η τάση στα άκρα του πυκνωτή αποκτά μεγαλύτερη τιμή κατά τη διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης.
Β) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να τη δικαιολογήσετε. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει κάθε κύκλωμα είναι:
α) μεγαλύτερη στο κύκλωμα Α
β) μικρότερη στο κύκλωμα Α
γ) ίση και στα δύο κυκλώματα

18. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C φορτίζεται από πηγή τάσης V και στη συνέχεια συνδέεται με ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, οπότε το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με έναν άλλο πυκνωτή ο οποίος έχει τετραπλάσια χωρητικότητα. Να υπολογίσετε το λόγο των μεγίστων τιμών της έντασης του ρεύματος στα δύο ηλεκτρικά κυκλώματα.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

19. Να συμπληρωθούν τα κενά του παρακάτω πίνακα ο οποίος αναφέρεται σε μια αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.

q	**U_E(J)**	**U_B(J)**	**E(J)**
0			
Q/4			
Q/3	4		
Q			

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Κύκλωμα LC, το οποίο αποτελείται από ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και πυκνωτή με χωρητικότητα C=20μF εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση V_C=50συν(1000t) (S.I).Να βρείτε:

α) το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου

β) την χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή

γ) την χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα.

Απ: α) L=1/20 H *β) q=10^{-3}συν(1000t)* *γ) i=-ημ(1000t)*

2. Κύκλωμα LC, το οποίο αποτελείται από ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και πυκνωτή με χωρητικότητα C εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο T=2.10^{-3}s. Αν τη χρονική στιγμή t=0 το φορτίο στο πυκνωτή είναι μέγιστο και ίσο με Q=4.10^{-4}C, να βρείτε:

α) τη χρονική στιγμή t_1 που η τάση του πυκνωτή μηδενίζεται για πρώτη φορά

β) το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή $t_2 = t_1 + T/3$
γ) το λόγο των ενεργειών U_E/U_B τη στιγμή t_2
δ) την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη στιγμή t_2

Απ: α) $t_1 = 0,5.10^{-3}$ s *β)* $q = -2\sqrt{3}.10^{-4}$ C *γ)* $\dfrac{U_E}{U_B} = 3$ *δ)* $i = +0,2\pi$ A

3. Πυκνωτής χωρητικότητας C=1μF είναι έχει φορτιστεί από πηγή τάσης V=400V και είναι συνδεδεμένος μέσω διακόπτη με ιδανικό πηνίο. Τη στιγμή t=0 κλείνουμε το διακόπτη και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο T=0,05s.

α) Να βρείτε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή τη στιγμή t=1/120 s

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή την ίδια στιγμή.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Απ: α) $U_E = 0,02$J β) $\dfrac{dq}{dt} = -8\pi\sqrt{3}.10^{-3} C/s$

4. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC, δίνονται L=1mH και C=10μF. Τη χρονική στιγμή t=0 το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο και ισούται με 2.10^{-4}C.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις q=f(t) και i=f(t).

β) Να υπολογίσετε τη τάση του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{\pi}{4}.10^{-4}$ s.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της τάσης που αναπτύσσεται στο ιδανικό πηνίο σε συνάρτηση με το χρόνο και να βρείτε την τιμή της τη χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}.10^{-4}$ s.

Απ: α) $q = 2.10^{-4}$*συν*$10^4 t$ *(S.I) ,* $i = -2$*ημ*$10^4 t$ *(S.I)* *β)* $V_c = 10\sqrt{2}$ V
γ) $V_L = 20$*συν*$10^4 t$ *(S.I)*

5. Ένα ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο $T = 4\pi.10^{-3}$s. Το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $q=Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ και τη χρονική στιγμή $t_1=(\pi/15).10^{-2}s$ ισούται με $q_1=+10^{-4}C$. Η χωρητικότητα του πυκνωτή ισούται με $C=2\mu F$.

α) Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος τις χρονικές στιγμές που το φορτίο του πυκνωτή ισούται με $q=+\sqrt{3}.10^{-4}$ C.

γ) Να υπολογίσετε το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή που η τάση από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου ισούται με +50V.

Απ: α) $i=-0,1\eta\mu500t$ (S.I) β) $i=\pm5.\ 10^{-2}$ A γ) $q=+10^{-4}$ C

6. Κύκλωμα LC εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Κάποια στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος είναι $i_1=20mA$ και το φορτίο του πυκνωτή $q_1=0,1\mu C$ και μια άλλη στιγμή t_2 η ένταση είναι $i_2=10mA$ και το φορτίο είναι $q_2=0,2\mu C$. Να υπολογιστεί η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος.

Απ: $T=2\pi10^{-5}s$

7. Ένας πυκνωτής έχει φορτιστεί από τάση V και το φορτίο που απέκτησε είναι $4\cdot10^{-3}C$. Τη χρονική στιγμή t=0, ο πυκνωτής συνδέεται με ιδανικό πηνίο με L=20mH, οπότε το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Τη χρονική $t=T/12$ η ένταση του ρεύματος είναι i=-1A.

Να βρείτε:

α) Τη τάση της πηγής που φόρτισε τον πυκνωτή

β) Τις χρονικές εξισώσεις της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου, ($U_E=f(t)$ και $U_B=f(t)$)

γ) Τη χρονική στιγμή που είναι $U_B=3U_E$ για πρώτη φορά

Απ: α) V=20V, β) $U_E=4\cdot10^{-2}\sigma\upsilon\nu^2 500t$, $U_B=4\cdot10^{-2}\eta\mu^2 500t$, γ) $t=\pi/1500s$,

8. Σε ένα κύκλωμα LC ο πυκνωτής έχει αρχικά φορτίο Q=240μC και τη χρονική στιγμή t=0 κλείνουμε τον διακόπτη και αρχίζουν αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο T=π ms. Κατά τη χρονική στιγμή t που είναι $U_E=U_B/3$ για πρώτη φορά να βρεθούν:

α) Το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή.

β) Η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος.

Απ: α) q=+120μC, β) i=-240 $\sqrt{3}$ mA, γ) di/dt = -480 A/s

9. Δίνεται ότι σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων τη χρονική στιγμή t=0 είναι q=+Q και i=0. Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή είναι Q=50μC και η χωρητικότητά του είναι C=2μF. Τη χρονική στιγμή t =(2π/3).10^{-4} s, η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου είναι για πρώτη φορά τριπλάσια από την ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή. Να βρεθούν:

α) η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων και ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου

β) το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t

Απ: α) T=4π.10^{-4}s , L=0,02H β) q=+2,5.10^{-5}s , i=-0,125$\sqrt{3}$ A

10. Ένα ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο T=2π.10^{-4}s. Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τον τύπο i=-10ημωt (S.I). Η ολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης ισούται με E=0,5J. Να υπολογίσετε:

α) το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{\pi}{6}.10^{-4}$s

β) το ρυθμό μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος ισούται με i_1=+4A

γ) την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, τη στιγμή που η ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή ισούται με το 1/4 της μέγιστης τιμής της.

Απ: α) dq/dt=-5 C/s β) $dV_C/dt=4.10^6$ V/s γ) $\left|di/dt\right|=5.10^4$ A/s

11. Οι οπλισμοί ενός πυκνωτή χωρητικότητας C=2μF έρχονται σε επαφή με πηγή που έχει ΗΕΔ E=100V. Αφού φορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής αποσυνδέεται από τη πηγή και συνδέεται στα άκρα πηνίου που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=5mH, σχηματίζοντας έτσι ένα ιδανικό κύκλωμα LC, το οποίο εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

α) Να βρείτε σε ποιες χρονικές διάρκειες, στο χρόνο της πρώτης περιόδου της ηλεκτρικής ταλάντωσης, το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό με τον οποίο απορροφά ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή ισούται για πρώτη φορά με το μισό της μέγιστης τιμής του.

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή κατά τη διάρκεια των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

Απ: α) από 0 έως $\frac{\pi}{2}.10^{-4}$ *s και από π.*10^{-4} *s έως* $\frac{3\pi}{2}.10^{-4}$ *s*

β) $dU_B/dt=50\sqrt{3}$ *J/s γ)* $(dU_E/dt)_{max}=100$ *J/s*

12. Ένας πυκνωτής έχει φορτιστεί σε τάση V=40V και τη στιγμή t=0 συνδέεται με ιδανικό πηνίο, οπότε το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση $U_E=8\cdot10^{-2}(1-i^2)$ (SI).

Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο των ηλεκτρικών ταλαντώσεων

β) Την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή τη στιγμή t=T/12 s.

γ) Την τάση στο πηνίο τη στιγμή t=5T/12 s.

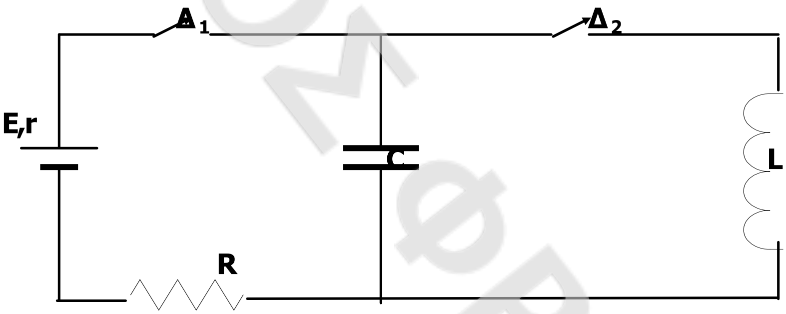
Απ: α)$T=8\pi\cdot10^{-3}$*s, β)* $U_E=6\cdot10^{-2}$*J, γ)* $V_L=-20\sqrt{3}$ *V*

13. Σε ένα κύκλωμα LC η μέγιστη τάση που επικρατεί μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $100\sqrt{3}$ V, ενώ η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι f=5/π Hz. Να βρείτε την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τάσης στον πυκνωτή, όταν η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι η μισή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

Απ: $dV_C/dt = 10^3\ V/s$

Σύνθετο κύκλωμα με τον πυκνωτή να είναι αρχικά φορτισμένος.

14. Στο κύκλωμα του σχήματος περιλαμβάνεται πηγή με ΗΕΔ Ε και εσωτερικής αντίστασης r, αντιστάτης R, πυκνωτής χωρητικότητας C, πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=2H και οι διακόπτες $Δ_1$ και $Δ_2$. Κλείνουμε τον διακόπτη $Δ_1$ οπότε μεταφέρεται ενέργεια στον πυκνωτή ίση με 0,25J. Μετά ανοίγουμε τον διακόπτη $Δ_1$ και κλείνουμε τον διακόπτη $Δ_2$, οπότε στο κύκλωμα LC ξεκινά ηλεκτρική ταλάντωση συχνότητας f=1/2π Hz. Ζητούνται:



α) Η χωρητικότητα του πυκνωτή

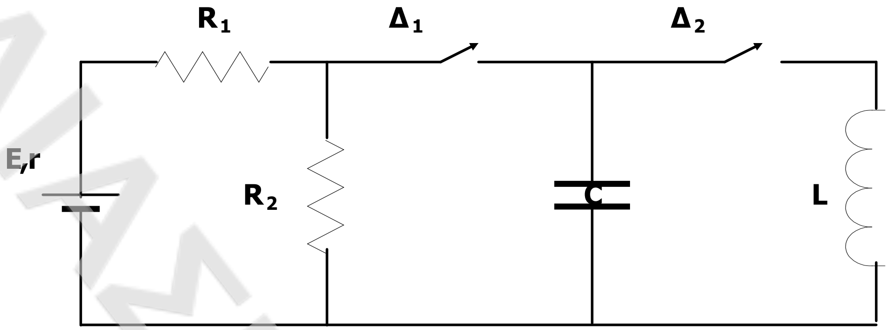
β) Η ΗΕΔ της πηγής

γ) Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα

δ) Η εξίσωση της ενέργειας του πυκνωτή σε συνάρτηση με το φορτίο του

Απ: α) $C=0{,}5F$ β) $E=1V$ γ) $i=-0{,}5ημt$ (S.I) δ) $U_E=q^2$ (S.I)

15. Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος δίνονται Ε=40V, r=1Ω, R_1=5Ω, R_2=4Ω, C=4μF και L=10mH. Αρχικά ο διακόπτης $Δ_1$ είναι κλειστός και ο $Δ_2$ ανοικτός. Ανοίγουμε τον διακόπτη $Δ_1$ και τη στιγμή t=0 κλείνουμε τον $Δ_2$, με αποτέλεσμα να έχουμε αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο κύκλωμα LC.



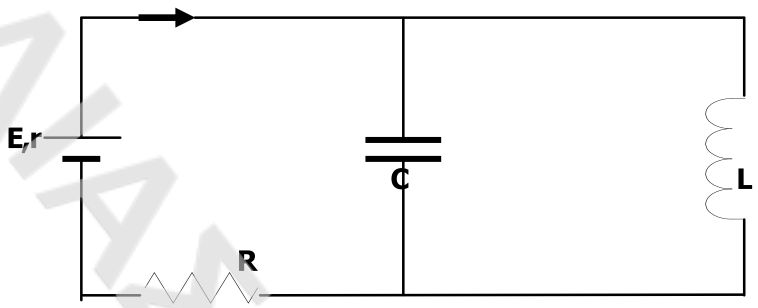
α) Να βρείτε το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή και τη μέγιστη τιμή του ρεύματος στο πηνίο.
β) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή και του ρεύματος στο πηνίο.
γ) Ποια είναι η ένταση του ρεύματος στο πηνίο, τη στιγμή που το φορτίο στον πυκνωτή είναι $q=\frac{Q}{4}$;

Απ: α) Q=64μC, I=0,32A, β) q=64συν5000t (μC), i=-0,32ημ5000t (SI), γ) i= $\pm$ *0,08* $\sqrt{15}$ *A*

Σύνθετο κύκλωμα με τον πυκνωτή να είναι αρχικά αφόρτιστος.

16. Το πηνίο του παρακάτω σχήματος είναι ιδανικό και έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=4mH, η πηγή έχει ΗΕΔ E=40V και εσωτερική αντίσταση r=2Ω και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=10μF. Ο αντιστάτης έχει αντίσταση R=8Ω. Αρχικά ο διακόπτης είναι κλειστός και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί. Τη χρονική στιγμή t=0 ανοίγουμε ακαριαία το διακόπτη και το κύκλωμα που περιλαμβάνει το πηνίο και τον πυκνωτή εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

(δ)



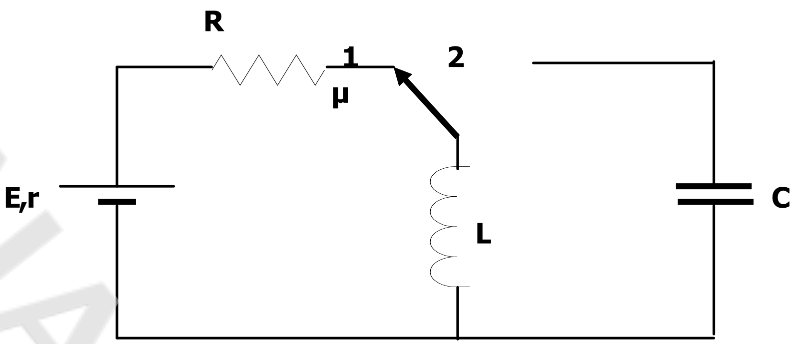
α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή κατά τη διάρκεια των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

β) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα L-C καθώς και του φορτίου του πυκνωτή, θεωρώντας θετική τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο πριν ανοίξουμε τον διακόπτη.

γ) Να υπολογίσετε το πηλίκο της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή προς την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου τη χρονική στιγμή $t_1=T/8$, όπου T η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος.

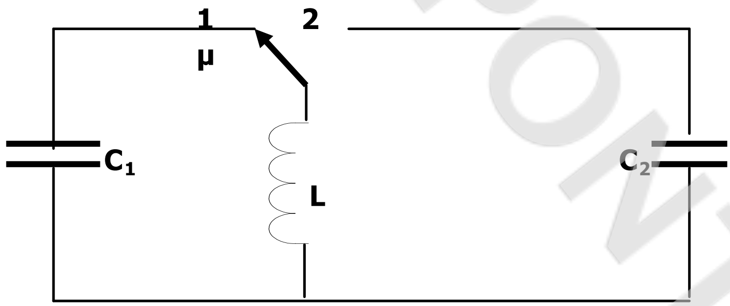
Απ: α) $E=32.10^{-3}$ J β) $i=4συν5.10^3t$ (S.I) , $q=8.10^{-4}$ $ημ5.10^3t$ (S.I) γ) $\frac{U_E}{U_B}=1$

17. Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται: E=20V, r=2Ω, R=8Ω, L=6,25mH. Αρχικά ο μεταγωγός μ βρίσκεται στη θέση 1, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Τη στιγμή t=0 μεταφέρουμε ακαριαία το μεταγωγό στη θέση 2 και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.



α) Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος I_0 που διαρρέει αρχικά το πηνίο.
β) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή, ώστε το αποθηκευμένο φορτίο σ' αυτόν να μην υπερβαίνει το 1mC.
γ) Να γράψετε τις εξισώσεις q=f(t) και i=f(t) του κυκλώματος LC_{max}.
δ) Να παραστήσετε γραφικά την τάση στα άκρα του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο.
Απ: α) I=2A, β) C_{max}=40μF, γ) i=2συν2000t (SI) q=10^{-3}ημ2000t (SI),
δ) V_c=25ημ2000t (SI),

18. Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος οι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες C_1=4μF και C_2=1μF. Ο πυκνωτής χωρητικότητας C_1 είναι φορτισμένος και ο άλλος είναι αφόρτιστος.



Α) Τη χρονική στιγμή t=0 φέρνουμε τον μεταγωγό στη θέση (1) οπότε το κύκλωμα LC_1 αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος είναι 0,2 A, ενώ ο μέγιστος κατ' απόλυτη τιμή ρυθμός μεταβολής του ρεύματος ισούται με 1000 A/s. Να υπολογίσετε:

α) τη μέγιστη τιμή του φορτίου του πυκνωτή

β) τη μέγιστη τιμή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

B) Τη χρονική στιγμή $t_1=(\pi/3).10^{-3}s$ μεταφέρουμε ακαριαία τον μεταγωγό στη θέση (2) οπότε και αρχίζει μια νέα αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση στο κύκλωμα LC_2. Να υπολογίσετε:

α) την ενέργεια της ταλάντωσης του κυκλώματος LC_2

β) το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή.

Απ: Α) α) $Q=4.10^{-5}C$ β) $U_{B,max}=2.10^{-4}J$

Β) α) $E_2=1,5.10^{-4}J$ β)$Q'=\sqrt{3}.10^{-5}C$

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Γενικά

- Οι μηχανικές ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου και τελικά μηδενίζεται, λέγονται **φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις.**

- Οι φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις οφείλονται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στη κίνηση και μετατρέπουν την ενέργεια της ταλάντωσης σε θερμότητα. Έτσι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης ελαττώνεται με συνέπεια να ελαττώνεται και το πλάτος της.

- Θα εξετάσουμε την περίπτωση που η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση είναι της μορφής

$$\mathbf{F'=-b.u}$$

δηλαδή είναι ανάλογη της ταχύτητας και αντίθετης φοράς με την ταχύτητα. Η σταθερά αναλογίας **b** λέγεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το μέγεθος και το σχήμα του σώματος.

Συνισταμένη δύναμη

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα οφείλεται στην δύναμη επαναφοράς εξαιτίας της οποίας γίνεται η ταλάντωση και της δύναμης που αντιστέκεται στη κίνηση.

$$\Sigma F= F_{επαν}+F' \Rightarrow \Sigma F=-Dx-bu$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε αυτή τη περίπτωση παίρνουμε:

$$\Sigma F=ma \Rightarrow \mathbf{-Dx - bu=ma}$$

Πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Εφόσον η σταθερά απόσβεσης είναι μικρή **το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο** σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{A_{\kappa}=A_0 e^{-\Lambda t}} \text{, με } \mathbf{t=\kappa T} \quad , \quad \kappa=0,1,2,3\ldots\ldots$$

A_0: το αρχικό πλάτος (t=0)
A_κ: το πλάτος μετά από κ ταλαντώσεις (t=κT)
Λ: μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του σώματος (Λ=b/2m)

Συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης

- Το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης b, τόσο μεγαλύτερος είναι και ο ρυθμός μείωσης του πλάτους.
- Σε όλη τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης η περίοδος παραμένει σταθερή.
- Η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης μεγαλώνει ελαφρώς καθώς αυξάνεται η σταθερά b, εμείς όμως θεωρούμε αμελητέα αυτή την αύξηση. Κατά συνέπεια όταν ένα σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είτε αυτή είναι αμείωτη είτε είναι φθίνουσα, η περίοδος της ταλάντωσης είναι η ίδια και ονομάζεται **ιδιοπερίοδος** του συστήματος.
- Αποδεικνύεται ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}=\ldots\ldots\ldots\ldots=e^{\Lambda T}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

- Αποδεικνύεται ότι το ποσοστό μείωσης του πλάτους και της ενέργειας της ταλάντωσης ανά περίοδο είναι σταθερό.

- Αν η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη η κίνηση είναι απεριοδική.

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Γενικά

Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου και τελικά μηδενίζεται λέγονται **φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.** Η ελάττωση αυτή οφείλεται κατά κύριο λόγο στην ύπαρξη ωμικής αντίστασης R στο κύκλωμα, η οποία μετατρέπει σταδιακά την ενέργεια της ταλάντωσης σε θερμότητα λόγω φαινομένου Joule.

Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή

Σε αντιστοιχία με τη μηχανική ταλάντωση το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{Q_\kappa = Q_0 e^{-\Lambda t}}\ , \text{ με } \mathbf{t=\kappa T}\quad ,\quad \kappa=0,1,2,3\ldots\ldots.$$

Q_0: το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (t=0)
Q_κ: το φορτίο του πυκνωτή μετά από κ ταλαντώσεις (t=κT)
Λ: μια σταθερά που εξαρτάται από την αντίσταση R και τον συντελεστή αυτεπαγωγής L. $(\Lambda=\dfrac{R}{2L})$

Το πλάτος της έντασης του ρεύματος

Σε αντιστοιχία με τη μηχανική ταλάντωση το πλάτος του ρεύματος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{I_\kappa = I_0 e^{-\Lambda t}}\ , \text{ με } \mathbf{t=\kappa T}\quad ,\quad \kappa=0,1,2,3\ldots\ldots.$$

I_0: το αρχικό πλάτος του ρεύματος (t=0)
$I_κ$: το πλάτος του ρεύματος μετά από κ ταλαντώσεις (t=κT)
Λ: μια σταθερά που εξαρτάται από την αντίσταση R και τον συντελεστή αυτεπαγωγής L. ($Λ=\frac{R}{2L}$)

Συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης

Είναι αντίστοιχα με αυτά της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης , αρκεί να αντιστοιχίσουμε την σταθερά απόσβεσης b με την αντίσταση R.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη αντίστασης στη κίνηση της μορφής F′=-bu (b=σταθ.) Με τη πάροδο του χρόνου:
α) το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό ενώ μειώνεται η περίοδός της
β) η περίοδος και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνονται
γ) το πλάτος και η ολική ενέργεια της ταλάντωσης μειώνονται
δ) το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται ενώ η περίοδος αυξάνεται σημαντικά.

2. Το πλάτος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-Λt}$ (Λ=σταθ.) Στη σχέση αυτή ο χρόνος παίρνει:
α) οποιαδήποτε τιμή
β) τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου

γ) τιμές που είναι μόνο περιττά πολλαπλάσια της περιόδου
δ) τιμές που είναι μόνο άρτια πολλαπλάσια της περιόδου

3. Ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων L-C έχει αντίσταση R. Το μέγεθος που **δεν** ελαττώνεται με τη πάροδο του χρόνου είναι:
α) το μέγιστο φορτίο στο πυκνωτή
β) η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος
γ) η περίοδος της ταλάντωσης
δ) η ολική ενέργεια της ταλάντωσης

4. Η περίοδος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης είναι ίση με Τ και το πλάτος της μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-\Lambda t}$ (Λ=σταθ.). Το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται ίσο με $A=\frac{A_0}{2}$ τη χρονική στιγμή:
α) t=T/2 β) t=ln2/Λ γ) t=Λ.ln2 δ) t=ln2/T

5. Το πλάτος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-\Lambda t}$ (Λ=σταθ.) και μετά από 10 πλήρεις ταλαντώσεις γίνεται ίσο με $\frac{A_0}{2}$.Το πλάτος της ταλάντωσης μετά από ακόμα 40 ταλαντώσεις γίνεται:
α) $A_0/16$ β) $A_0/32$ γ) $A_0/8$ δ) $15A_0/16$

6. Το πλάτος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-\Lambda t}$ (Λ=σταθ.). Αν η ενέργεια της ταλάντωσης τη στιγμή t=0 ισούται με E_0, η ενέργεια γίνεται ίση με $E_0/8$ τη χρονική στιγμή:
α) $t=\frac{\ln 2}{\Lambda}$ β) $t=\frac{2\ln 2}{3\Lambda}$ γ) $t=\frac{3\ln 2}{\Lambda}$ δ) $t=\frac{3\ln 2}{2\Lambda}$

7. Το πλάτος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-\Lambda t}$ (Λ=σταθ.) Αν η ενέργεια της ταλάντωσης τη στιγμή t=0 ισούται με E_0, τη χρονική στιγμή $t=\frac{\ln 2}{\Lambda}$, η ενέργεια που έχει χάσει το σύστημα είναι ίση με:

α) $E_0/2$ β) $E_0/4$ γ) $3E_0/4$ δ) $E_0/16$

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

8. Ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη αντίστασης στη κίνηση της μορφής F′=-bu (b=σταθ.)

α) Η περίοδος για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης b είναι σταθερή.

β) Η περίοδος μπορεί να θεωρηθεί ίση με την περίοδο της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης του συστήματος αν η δύναμη απόσβεσης είναι μικρή.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος είναι μεγαλύτερος, όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης b

δ) Ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών μικραίνει διαρκώς κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

9. Από την οροφή κρέμεται ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Στο κάτω άκρο του δένουμε σώμα μάζας m και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης απόσβεσης F′, μέχρι να σταματήσει εντελώς η ταλάντωση.

Δίνονται η σταθερά του ελατηρίου k, η μάζα του σώματος m και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

➢ Έργο της δύναμης απόσβεσης F′ σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση

Η δύναμη απόσβεσης F′ μετατρέπει την ενέργεια της ταλάντωσης σε *θερμότητα.*

$$Q_\theta = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Επειδή η δύναμη της απόσβεσης είναι πάντα αντίρροπη της ταχύτητας, το έργο της είναι πάντα αρνητικό και ίσο με την μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης.

$$W_{F'} = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}$$

➢ **Θερμότητα σε μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση**

Προφανώς και εδώ η θερμότητα υπολογίζεται αν από την αρχική ενέργεια της ταλάντωσης αφαιρέσουμε την τελική ενέργεια της ταλάντωσης. Δηλαδή:

$$Q_\theta = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda}$$

➢ Χρόνος υποδιπλασιασμού (χρόνος ημιζωής)

Είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί το πλάτος της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης από μια αρχική τιμή , στο μισό αυτής της τιμής. Αποδεικνύεται ότι ο χρόνος αυτός δίνεται από τη σχέση: $t_{1/2} = \ln 2 / \Lambda$

Απόδειξη

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow e^{\Lambda t_{1/2}} = 2 \Rightarrow \Lambda t_{1/2} = \ln 2 \Rightarrow$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και στη περίπτωση της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης.

- Ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο

Αποδεικνύεται ότι η ενέργεια σε μια φθίνουσα ταλάντωση ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $\boldsymbol{E = E_0 . e^{-2\Lambda t}}$

Απόδειξη

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D\left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D A_0{}^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και στη περίπτωση της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης

1. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0 e^{-(\ln 4)t}$. Σε χρόνο t=10T όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης το πλάτος ελαττώνεται κατά 50%. Να υπολογίσετε:

α) την περίοδο T της φθίνουσας ταλάντωσης

β) τον αριθμό των ταλαντώσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μειωθεί από $A_0/4$ σε $A_0/16$.

Απ: α) T=0,05 s β) 20 ταλαντώσεις.

2. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0 e^{-\Lambda t}$. Όταν πραγματοποιούνται 40 ταλαντώσεις το πλάτος γίνεται $A_{40}=A_0/2$. Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος της ταλάντωσης όταν πραγματοποιηθούν επιπλέον 120 ταλαντώσεις

β) το κλάσμα της αρχικής ενέργειας της ταλάντωσης που γίνεται θερμότητα στο χρονικό διάστημα που πραγματοποιούνται οι 120 ταλαντώσεις

Απ: α) $A_{160}= A_0/16$ β) κ=63/256

3. Η φθίνουσα ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα έχει περίοδο T=0,1s και το πλάτος της μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0e^{-4t}$ (S.I). Να υπολογίσετε:

α) το πηλίκο των πλατών στο τέλος της πρώτης και της δεύτερης περιόδου της ταλάντωσης του σώματος,

β) το πλάτος στο τέλος της δέκατης ταλάντωσης, αν το πλάτος στο τέλος της ένατης ταλάντωσης είναι 0,03 m,

γ) τη χρονική διάρκεια από τη στιγμή που ξεκίνησε η φθίνουσα ταλάντωση μέχρι τη στιγμή που η ενέργειά της έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής,

δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της μείωσης του αρχικού πλάτους τη χρονική στιγμή $t_1=0{,}5\ln 2$ s.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $e^{0,4}=1{,}5$ και $\ln 2=0{,}7$.

Απ. α) 1,5 β) 0,02 m γ) 7/80 s δ) 75%

4. Σώμα μάζας m=1Kg εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και το πλάτος της μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=0{,}1\ e^{-\Lambda t}$ (S.I). Τη χρονική στιγμή t=0 η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος ισούται με $E_0=2J$ και τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της ταλάντωσης έχει υποδιπλασιαστεί. Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2=4t_1$,

β) την περίοδο της ταλάντωσης,

γ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής ενέργειας που χάθηκε από τη στιγμή t=0 που ξεκίνησε η φθίνουσα ταλάντωση μέχρι τη στιγμή $t_3=2t_1$.

Απ. α) 1/160 m β) 0,1π s γ) 93,75%

5. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα ω=20π rad/s και εξίσωση πλάτους $A=0{,}4.e^{-(\ln 2)t}$. Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή που έχουν ολοκληρωθεί 30 ταλαντώσεις

β) την απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια των τριάντα αυτών ταλαντώσεων

γ) τον αριθμό των ταλαντώσεων μέχρι τη στιγμή που η ενέργεια της ταλάντωσης έχει υποδιπλασιαστεί.

Απ: α) A_{30}=0,05m β) ΔΕ=31,5J γ) Ν=5 ταλαντώσεις

6. Ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις το πλάτος των οποίων μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0.e^{-\Lambda t}$ με t=NT. Η αρχική ενέργεια του ταλαντωτή ισούται με E_0=8J. Τη χρονική στιγμή t_1=2s ο ταλαντωτής έχει εκτελέσει 10 ταλαντώσεις και το πλάτος της ταλάντωσής του ισούται με το 1/16 του αρχικού. Να υπολογίσετε:

α) τη σταθερά Λ

β) το πηλίκο των πλατών δύο διαδοχικών ταλαντώσεων

γ) τη χρονική στιγμή t_2 που το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μισό αυτού που υπήρχε τη χρονική στιγμή t_1

δ) την ενέργεια του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t'=0,5t_1$

Δίνεται: $2^{0,4}=1,32$

Απ: α) $\Lambda=2\ln 2\ s^{-1}$ β) $\dfrac{A_N}{A_{N+1}}=1,32$ γ) $t_2=2,5\ s$ δ) E′=0,5 J

7. Σώμα μάζας m=1Kg εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση και η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του υπολογίζεται από την εξίσωση ΣF=-100x-12υ (S.I), όπου x η αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του και υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητάς του. Το σώμα ξεκίνησε να εκτελεί τη φθίνουσα ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t=0 από την ακραία θετική θέση που απέχει από τη θέση ισορροπίας απόσταση 0,4m.

α) Να υπολογίσετε τη σταθερά απόσβεσης b της φθίνουσας ταλάντωσης.

β) Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα διέρχεται από τη θέση x_1, η επιτάχυνση είναι $a_1=+6m/s^2$ και η ταχύτητά του είναι $υ_1$=+2m/s. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση x_1.

γ) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην ταλάντωση του σώματος από τη χρονική στιγμή t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1.

Απ: α) b=12 Kg/s β) x_1=-0,3 m γ) W=-1,5 J

8. A) Πυκνωτής χωρητικότητας C=10μF φορτίζεται από μια πηγή συνεχούς τάσης V=20V. Αφού αποσυνδεθεί η πηγή ο πυκνωτής συνδέεται στα άκρα πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L=1mH και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Να βρείτε:

i) τη μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα

ii) το φορτίο του πυκνωτή όταν η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι $(I\sqrt{2})/2$.

B) Σώμα μάζας m=1Kg είναι δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το κάτω άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο και ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω (θετική φορά) κατά d=0,2 m και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έτσι ώστε σε 400 μηδενισμούς του φορτίου του πυκνωτή να αντιστοιχούν τέσσερις μηδενισμοί της ταχύτητας του σώματος.(π^2=10).

i) Ποια είναι η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου; ($g=10m/s^2$)

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση x=0,1 m και ανεβαίνει;

Γ) Αν η μηχανική ταλάντωση είναι φθίνουσα και η ενέργεια μειωθεί κατά 75% μετά από χρόνο 7 sec, να υπολογίσετε τη τιμή του συντελεστή απόσβεσης Λ. Δίνεται ln2=0,7.

Απ: Α) Ι=2Α , $q=\pm\sqrt{2}.10^{-4}C$ Β) $\Delta l_0=10^{-3}m$, dK/dt= Γ) $\Lambda=0,1\ s^{-1}$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Γενικά

Αμείωτη ταλάντωση, λέγεται η ταλάντωση της οποίας το πλάτος παραμένει σταθερό.

Ελεύθερη ταλάντωση, λέγεται η ταλάντωση στην οποία η ενέργεια προσφέρεται μόνο μια φορά στο σύστημα και στην συνέχεια σταματάμε να παρεμβαίνουμε. Αν ένα σύστημα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση σε ιδανικό περιβάλλον, αυτή θα είναι *αμείωτη* επειδή δεν θα υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Αν όμως υπάρχουν αποσβέσεις όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι *φθίνουσα.*

Ιδιοσυχνότητα συστήματος, λέγεται η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα όταν εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση σε ιδανικό περιβάλλον χωρίς αποσβέσεις (αμείωτη). Η ιδιοσυχνότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Προφανώς η ιδιοπερίοδος του συστήματος θα είναι $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ και η κυκλική ιδιοσυχνότητα θα είναι $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

Όταν το σύστημα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση η οποία είναι φθίνουσα, θεωρούμε στην πράξη ότι δεν αλλάζει η συχνότητά του, επομένως σε κάθε περίπτωση που ένα σύστημα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση δεχόμαστε ότι ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση, λέγεται η ταλάντωση κατά τη διάρκεια της οποίας ασκούμε στο σύστημα συνεχώς μια περιοδική δύναμη, η οποία προσφέρει διαρκώς ενέργεια με σκοπό την αναπλήρωση της ενέργειας που χάνεται λόγω αποσβέσεων. Το αποτέλεσμα είναι το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Διεγέρτης, λέγεται το μέσο με το οποίο ασκείται η περιοδική δύναμη και προσφέρεται η ενέργεια.

Συχνότητα διεγέρτη, λέγεται η συχνότητα με την οποία ασκείται η περιοδική δύναμη και προσφέρεται η ενέργεια. Η περιοδική δύναμη που ασκεί ο διεγέρτης δίνεται συνήθως από την σχέση: $\mathbf{F=F_0 συνω_δ t}$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ένα σώμα όταν εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση οφείλεται στην δύναμη επαναφοράς $\mathbf{F_{επ}=-Dx}$, στην δύναμη αντίστασης **F′=-bu** και στην δύναμη του διεγέρτη $\mathbf{F=F_0 συνω_δ t}$. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

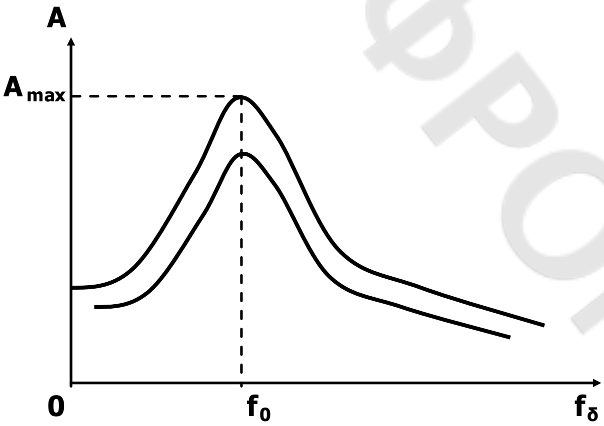
$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F' + F = m\alpha \Rightarrow -Dx - bu + F_0 \sigma\upsilon\nu\omega_\delta t = m\alpha$$

Συμπεράσματα

✓ Το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι σταθερό σε συνάρτηση με το χρόνο.

✓ Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πάντα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη. Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι είναι $D=m\omega_0^2$ και όχι $D=m\omega_\delta^2$.

✓ Το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη αλλά και από τη σταθερά απόσβεσης b.



Για μια ορισμένη τιμή της συχνότητας του διεγέρτη ($f_\delta = f_0$) έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ($A=A_{max}$). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b , τόσο ψηλότερα είναι η κορυφή της παραπάνω καμπύλης, δηλαδή τόσο πιο έντονα παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού.

Ενεργειακή μελέτη

Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η διεγείρουσα δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σύστημα με σκοπό την αναπλήρωση της ενέργειας που χάνεται και την διατήρηση του πλάτους της ταλάντωσης. **Στην κατάσταση του συντονισμού ο ταλαντωτής απορροφά ενέργεια με τον βέλτιστο τρόπο, για αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.**

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Γενικά

Ιδιοσυχνότητα κυκλώματος, λέγεται η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το ιδανικό κύκλωμα L-C (χωρίς ωμική αντίσταση), όταν εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση. Η ιδιοσυχνότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Όταν το κύκλωμα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση η οποία είναι φθίνουσα (δηλαδή είναι κύκλωμα R-L-C), θεωρούμε στην πράξη ότι δεν αλλάζει η συχνότητά του, άρα μπορούμε να λέμε ότι κάθε φορά που ένα κύκλωμα R-L-C εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του.

Εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση, λέγεται η ταλάντωση κατά τη διάρκεια της οποίας προσφέρουμε διαρκώς ενέργεια στο κύκλωμα μέσω μιας πηγής εναλλασσόμενης τάσης, με σκοπό την αναπλήρωση της ενέργειας που χάνεται λόγω αποσβέσεων. Το αποτέλεσμα είναι το πλάτος του ρεύματος και το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή να παραμένουν σταθερά.

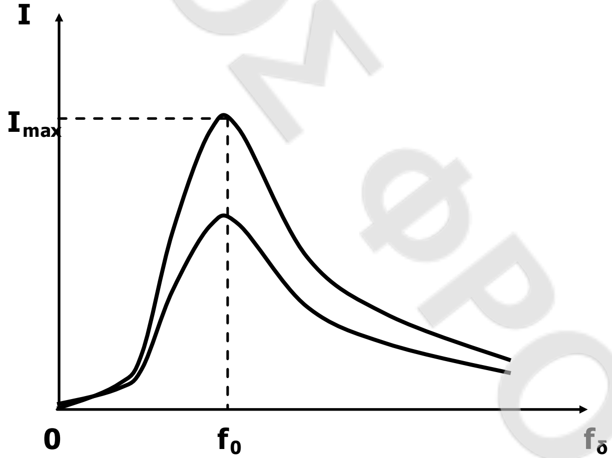
Διεγέρτης, είναι συνήθως μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης η οποία συνδέεται στο κύκλωμα και προσφέρει την ενέργεια.

Συχνότητα διεγέρτη, είναι η συχνότητα της πηγής της εναλλασσόμενης τάσης.

Συμπεράσματα

✓ Το πλάτος του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο μιας εξαναγκασμένης ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι σταθερά σε συνάρτηση με το χρόνο.

✓ Το πλάτος του ρεύματος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη αλλά και από τον αντιστάτηR.



Για μια ορισμένη τιμή της συχνότητας του διεγέρτη ($f_{\delta}=f_0$) έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους του ρεύματος (καθώς και του μέγιστου φορτίου) της εξαναγκασμένης ταλάντωσης $I=I_{max}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή της αντίστασης R, τόσο ψηλότερα είναι η κορυφή της παραπάνω καμπύλης, δηλαδή τόσο πιο έντονα παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού.

Ενεργειακή μελέτη

Στις εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις η πηγή της εναλλασσόμενης τάσης προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα με σκοπό την αναπλήρωση της ενέργειας που χάνεται και την διατήρηση του πλάτους της ταλάντωσης. **Στην κατάσταση του συντονισμού το κύκλωμα απορροφά ενέργεια με τον βέλτιστο τρόπο, για αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.**

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος ελατήριο-μάζα εξαρτάται:
α) μόνο από τη μάζα του σώματος
β) μόνο από τη μάζα του σώματος και τη σταθερά του ελατηρίου
γ) από τη σταθερά του ελατηρίου και τη σταθερά απόσβεσης
δ) από τη μάζα του σώματος, τη σταθερά του ελατηρίου και τη σταθερά απόσβεσης

2. Σύστημα ελατήριου-σώματος βρίσκεται μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Για να φέρουμε το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού θα πρέπει:
α) να αυξήσουμε την πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο
β) να αλλάξουμε το ελατήριο με ένα άλλο μικρότερης σταθεράς
γ) να αλλάξουμε το σώμα με ένα άλλο μικρότερης μάζας
δ) να μικρύνουμε κι άλλο τη συχνότητα του διεγέρτη.

3. Σύστημα ελατήριου-σώματος βρίσκεται μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι τέτοια ώστε αν μικρύνει κι άλλο, το πλάτος της ταλάντωσης αρχικά θα μεγαλώσει και στη συνέχεια θα μικρύνει. Για να φέρουμε το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού χωρίς να αλλάξουμε τη συχνότητα του διεγέρτη θα πρέπει:
α) να μειώσουμε την πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο
β) να αλλάξουμε το ελατήριο με ένα άλλο μεγαλύτερης σταθεράς
γ) να αλλάξουμε το σώμα με ένα άλλο μεγαλύτερης μάζας.

4. Σύστημα ελατήριου σταθεράς k=400N/m και σώματος μάζας m=4Kg βρίσκεται μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη βοήθεια τροχού ο οποίος εκτελεί μια περιστροφή κάθε π/5 s. Αν αυξήσουμε την πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο, το πλάτος της ταλάντωσης:
α) θα αυξηθεί
β) θα μειωθεί
γ) θα παραμείνει το ίδιο.

5. Κύκλωμα RLC εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση με τη βοήθεια πηγής εναλλασσόμενης τάσης συχνότητας $f = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$. Για να απορροφά το κύκλωμα την ενέργεια από την πηγή με τον βέλτιστο τρόπο θα πρέπει:
α) Να μειώσουμε την αντίσταση R
β) Να διπλασιάσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή
γ) Να υποτετραπλασιάσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή
δ) Τίποτα από τα παραπάνω.

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

6. Ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.
α) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο
β) Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι πάντοτε ίση με την ιδιοσυχνότητα.
γ) Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη και τη σταθερά απόσβεσης b.

δ) Η ενέργεια που χάνεται σε μια περίοδο λόγω απόσβεσης, είναι ίση με την ενέργεια που προσφέρει ο διεγέρτης στον ίδιο χρόνο.

7. Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

α) Στο σύστημα ασκείται σταθερή εξωτερική δύναμη

β) Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος είναι μέγιστο.

γ) Στο σύστημα προσφέρεται ενέργεια ανά περίοδο η οποία αντισταθμίζει τις ενεργειακές απώλειες.

δ) Η κινητική ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος ισούται κάθε στιγμή με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του.

8. Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.

α) Στη κατάσταση συντονισμού η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι διπλάσια από τη ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

β) Αύξηση της σταθεράς απόσβεσης συνεπάγεται μείωση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

γ) Αν η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη, το φαινόμενο του συντονισμού δεν παρατηρείται ή γίνεται ελάχιστα αντιληπτό.

δ) Αν η σταθερά απόσβεσης είναι μηδέν το πλάτος της ταλάντωσης κατά το συντονισμό γίνεται άπειρο.

9. Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.

α) Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μεταβάλλεται ανάλογα με τη συχνότητα του διεγέρτη.

β) Αν μεγαλώσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη τότε το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται οπωσδήποτε.

γ) Το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις σταθερού πλάτους ανεξάρτητα της συχνότητας του διεγέρτη.

10. Κύκλωμα RLC τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Σε σειρά με τον αντιστάτη R συνδέουμε έναν άλλο όμοιο αντιστάτη.

α) η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος αλλάζει.

β) το κύκλωμα εξακολουθεί να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

γ) η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος ελαττώνεται.
δ) η μέγιστη τιμή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή αυξάνεται.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

11. Ένα σύστημα ελατηρίου σώματος ιδιοσυχνότητας f_0 εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αν η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_1=f_0$ τότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι A_1. Αν διπλασιαστεί η συχνότητα του διεγέρτη τότε το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται A_2. Να γίνει κοινό ποιοτικό διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου για τις δύο ταλαντώσεις του συστήματος(θεωρήστε μηδενική αρχική φάση).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

➢ **Όταν σε μια εξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση θέλουμε να υπολογίσουμε το ρυθμό αφαίρεσης ενέργειας από το σύστημα κάποια στιγμή, υπολογίζουμε τον ρυθμό παραγωγής έργου(ισχύς) από την δύναμη αντίστασης F′. Δηλαδή:**

$$\frac{dW}{dt} = \frac{-F'.dx}{dt} = -F'.\frac{dx}{dt} = -b.u.u = -b.u^2 = -b.\omega^2.A^2.\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

➢ Αποδεικνύεται ότι η ενέργεια που προσφέρει η διεγείρουσα δύναμη ανά περίοδο σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους Α και γωνιακής συχνότητας ω, ισούται με:

$$W = \pi b \omega A^2$$

➢ Η ενέργεια που πρέπει να προσφέρει η πηγή εναλλασσόμενης τάσης (διεγέρτης) στο κύκλωμα ανά περίοδο, πρέπει να είναι ίση με τη θερμότητα που παράγεται ανά περίοδο λόγω φαινομένου Joule πάνω στον αντιστάτη R, δηλαδή υπολογίζεται από τον νόμο του Joule για το εναλλασσόμενο ρεύμα.

$$W = Q = I_{\varepsilon\nu}^{2}.R.T$$

όπου $I_{\varepsilon\nu} = I/\sqrt{2}$ είναι η ενεργός ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος και T είναι η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης.

➢ Όταν δύο αντιστάτες R_A και R_B είναι σε σειρά και διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα, τα ποσά θερμότητας που παράγονται από αυτούς είναι ανάλογα με τις αντιστάσεις τους. Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{Q_{\Theta,A}}{Q_{\Theta,B}} = \frac{R_A}{R_B}$$

➢ Κάθε ραδιόφωνο περιλαμβάνει ένα κύκλωμα LC του οποίου ο πυκνωτής έχει μεταβλητή χωρητικότητα. Η ιδιοσυχνότητα αυτού του κυκλώματος είναι

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

και μπορεί να αλλάξει αν αλλάξουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που εκπέμπει ένας ραδιοφωνικός σταθμός δημιουργεί στο κύκλωμα LC εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση, δηλαδή ένα εναλλασσόμενο ρεύμα. Όταν «πιάνουμε» έναν σταθμό στο ραδιόφωνο φέρνουμε σε συντονισμό το κύκλωμα LC με τον διεγέρτη που στη περίπτωση αυτή είναι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που εκπέμπει ο ραδιοφωνικός σταθμός. Επομένως θα ισχύει

$$f_{\kappa\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau o\varsigma} = f_0$$

1. Σύστημα ελατήριο – μάζα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητά του. Η μάζα του σώματος είναι m=1Kg και η σταθερά του ελατηρίου είναι K=100N/m. Αυξάνοντας τη συχνότητα του διεγέρτη κατά 20% το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά 10% και αποκτά τη τιμή A_1=0,45m. Να υπολογίσετε:

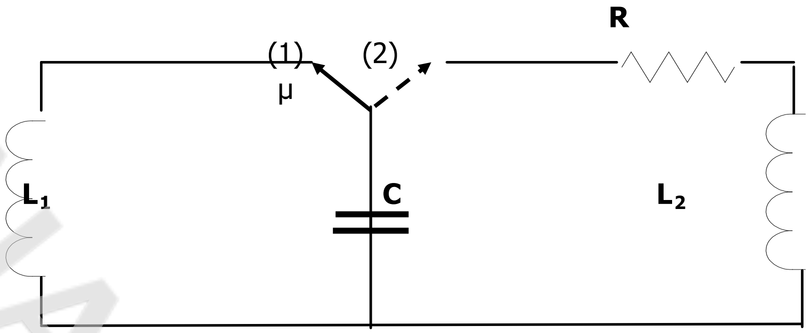
α) τη νέα συχνότητα του διεγέρτη,
β) το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης όταν η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή,
γ) την επί τοις εκατό μεταβολή της ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της μεταβολής της συχνότητας του διεγέρτη.

Απ. α) 6/π Hz β) 0,5 m γ) –19%

2. Σώμα μάζας m=1Kg εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A=0,2m στερεωμένο στην άκρη ελατηρίου σταθερά k=400 N/m υπό την επίδραση περιοδικής δύναμης συχνότητας f_δ=6/π Hz. Το σώμα τη χρονική στιγμή t=0 βρισκόταν στη θέση ισορροπίας του.

α) Αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη σε f'_δ=7/π Hz. Τι θα συμβεί στο πλάτος της ταλάντωσης και γιατί;
β) Πόση θα έπρεπε να ήταν η μάζα του σώματος ώστε αρχικά με συχνότητα διεγέρτη 6/π Hz, η απορρόφηση ενέργειας από τον ταλαντωτή να ήταν βέλτιστη;
γ) Αν κάποια στιγμή καταργηθεί η περιοδική δύναμη οπότε η ταλάντωση μετατραπεί σε φθίνουσα, να βρεθεί πόσο είναι το έργο της δύναμης απόσβεσης στη διάρκεια της πρώτης περιόδου, αν το πλάτος ελαττωθεί κατά 20%.
Απ: α) θα αυξηθεί β) m=25/9 Kg γ) W=-2,88 J

4. Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος ο πυκνωτής χωρητικότητας C=2μF μπορεί να συνδέεται μέσω ενός μεταγωγού μ, είτε με ένα ιδανικό πηνίο με L_1=20mH, είτε με ένα άλλο ιδανικό πηνίο με L_2=50mH και έναν αντιστάτη με $R=10^4 \Omega$.



Α. Αρχικά ο μεταγωγός είναι στη θέση (1) οπότε το κύκλωμα L_1-C εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Θεωρούμε ως αρχή των χρόνων (t=0) τη στιγμή κατά την οποία η ένταση του ρεύματος είναι i=10mA και ο ρυθμός μεταβολής της είναι μηδενικός.

α) Να βρεθούν οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος.

β) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_1=(\pi/6).10^{-3}$s.

Β. Τη χρονική στιγμή $t_1=(\pi/6).10^{-3}$s ο μεταγωγός μεταφέρεται στη θέση (2) οπότε αρχίζει μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση. Να βρεθεί η θερμότητα που αναπτύσσεται στον αντιστάτη λόγω φαινομένου Joule, μέχρι τη στιγμή που το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή γίνει $Q=5.10^{-7}$C.

Απ. Α. α) $i=10^{-2}$συν(5000t) (S.I) , $q=2.10^{-6}$ημ(5000t) (S.I) ,

β) dU/dt= $-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right).10^{-2} J/s$ Β. Q= (3/16).10^{-6} J.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΑΠΛΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΙΔΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΙΔΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΠΟΥ ΕΞΕΛΙΣΣΟΝΤΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.

Γενικά

Έστω ότι οι δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εκτελεί ταυτόχρονα ένα σώμα είναι της μορφής:

$$x_1=A_1ημωt \quad \text{και} \quad x_2=A_2ημ(ωt+φ)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας που ισχύει σε κάθε σύνθετη κίνηση, η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι κάθε στιγμή ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων x_1 και x_2. Το ίδιο ισχύει για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις.

$$x=x_1+x_2$$
$$υ=υ_1+υ_2$$
$$α=α_1+α_2$$

Αποδεικνύεται ότι στη περίπτωση αυτή η συνισταμένη κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής:

$$x=Aημ(ωt+θ)$$

όπου $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2συνφ}$ και $εφθ=\dfrac{A_2ημφ}{A_1+A_2συνφ}$

Ειδικές περιπτώσεις

✓ **φ=0 rad**

Δηλαδή: $x_1=A_1ημωt$ και $x_2=A_2ημωt$. Τότε όπως προκύπτει θα είναι:

$$x=(A_1+A_2)ημωt$$

✓ **φ=π rad**

Δηλαδή: $\mathbf{x_1=A_1\etaμωt}$ και $\mathbf{x_2=A_2\etaμ(ωt+π)}$. Τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

I) $A_1>A_2$: $\mathbf{x=(A_1-A_2)\etaμωt}$

II) $A_2>A_1$: $\mathbf{x=(A_2-A_1)\etaμ(ωt+π)}$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι η φάση της σύνθετης ταλάντωσης ταυτίζεται με την φάση εκείνης της αρχικής ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στη περίπτωση που οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:

$$\mathbf{x_1=A_1\etaμ(ωt+φ_{01})} \quad \text{και} \quad \mathbf{x_2=A_2\etaμ(ωt+φ_{02})}$$

η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{x=A\etaμ(ωt+φ_{01}+θ)}$$

με Α= $\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu(\phi_{02}-\phi_{01})}$ και εφθ= $\dfrac{A_2\eta\mu(\phi_{02}-\phi_{01})}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu(\phi_{02}-\phi_{01})}$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΑΠΛΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΙΔΙΟ ΠΛΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ, ΠΟΥ ΕΞΕΛΙΣΣΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.

Γενικά

Έστω ότι οι δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εκτελεί ταυτόχρονα ένα σώμα είναι της μορφής:

$$\mathbf{x_1=A\eta\mu\omega_1 t} \quad \text{και} \quad \mathbf{x_2=A\eta\mu\omega_2 t}$$

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι κάθε στιγμή ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων x_1 και x_2.

$$\mathbf{x=x_1+x_2}$$

Αποδεικνύεται ότι στη περίπτωση αυτή η συνισταμένη κίνηση είναι μια περιοδική κίνηση (όχι απλή αρμονική ταλάντωση) και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής:

$$x=2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Η ταλάντωση που γίνεται έχει κυκλική συχνότητα $\omega=\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ και πλάτος

$A'=2A\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$

Διακροτήματα

Η ιδιάζουσας μορφής ταλάντωση που προκύπτει παρουσιάζει μια περιοδική διακύμανση του πλάτους της από $A'=0$ μέχρι $A'=2A$. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος λέμε ότι η ταλάντωση παρουσιάζει **διακροτήματα.**

Περίοδος των διακροτημάτων

Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους ή δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους ονομάζεται **περίοδος του διακροτήματος.**

Αποδεικνύεται ότι η περίοδος των διακροτημάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad \text{ή} \quad T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

Συχνότητα των διακροτημάτων

Η **συχνότητα των διακροτημάτων** μας δείχνει πόσες φορές μεγιστοποιείται ή μηδενίζεται το πλάτος της ταλάντωσης ανά δευτερόλεπτο.

Προφανώς η συχνότητα των διακροτημάτων δίνεται από τη σχέση:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} \quad \text{ή} \quad f_\delta = |f_1 - f_2|$$

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η συνισταμένη κίνηση του σώματος εξαρτάται:

α) μόνο από τη φάση των επιμέρους ταλαντώσεων
β) μόνο από το πλάτος των επιμέρους ταλαντώσεων
γ) μόνο από τη συχνότητα των επιμέρους ταλαντώσεων
δ) από όλα τα παραπάνω

2. Ένα σώμα μάζας m=0,5 Kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις x_1=2ημ(4t) (S.I) και x_2=2ημ(4t+π/2) (S.I). Η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα ισούται με:

α) 18 J β) 12 J γ) 16 J δ) 32 J

3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που έχουν ίσες συχνότητες και ίσα πλάτη. Αν και η συνισταμένη ταλάντωση έχει το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα με τις συνιστώσες ταλαντώσεις, η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι:

α) φ=π/6 β) φ=π/3 γ) φ=2π/3 δ) φ=5π/6

4. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις x_1=0,3ημ(10πt) (S.I) και x_2=0,2ημ(10πt+π/3) (S.I) και η συνισταμένη κίνηση από την εξίσωση x=Αημ(10πt+θ). Η εφαπτομένη της γωνίας θ ισούται με:

α) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ β) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ γ) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ δ) 3

5. Ένα σώμα μάζας εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1=0,5ημ(4πt)$ (S.I) και $x_2=0,5\sqrt{3}\,ημ(4πt+π/2)$ (S.I). Η ταχύτητα του υλικού σημείου υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση:

α) $υ=4πσυν(4πt+π/3)$ (S.I)
β) $υ=4πημ(4πt+π/3)$ (S.I)
γ) $υ=4πσυν(4πt)$ (S.I)

6. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1=2ημ(1000πt)$ (S.I) και $x_2=2ημ(1002πt)$ (S.I). Η συνισταμένη κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση:

α) $x=4συν(πt).ημ(1001πt)$ (S.I)
β) $x=4ημ(πt).ημ(1001πt)$ (S.I)
γ) $x=2συν(πt).ημ(2002πt)$ (S.I)
δ) $x=2συν(πt).ημ(1001πt)$ (S.I)

7. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η συνισταμένη κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση: $x=4.συν(0,5t).ημ(1000,5πt)$ (S.I). Η περίοδος του διακροτήματος που προκύπτει από τη σύνθεση αυτών των ταλαντώσεων είναι ίση με:

α) 0,5 s β) 2π s γ) 1 s δ) 1/2π s

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

8. Ένα σώμα μάζας m=0,1 Kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1=4ημ(20t)$ (S.I) και $x_2=2ημ(20t)$ (S.I). Η συνισταμένη ταλάντωση έχει:

α) πλάτος Α=2 m
β) συχνότητα f=10/π Hz
γ) εξίσωση απομάκρυνσης $x=6ημ(40πt)$ (S.I)
δ) ενέργεια Ε=0,72 J

9. Ένα σώμα μάζας εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις x_1=3ημ(10πt) (S.I) και x_2=4ημ(10πt+π) (S.I)

α) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή από τη σχέση $x=x_1+x_2$.

β) Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίσο με 7 m.

γ) Η διαφορά φάσης της συνισταμένης ταλάντωσης και της συνιστώσας ταλάντωσης x_1=f(t) ισούται με π rad.

δ) Ο ταλαντωτής διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κάθε 0,1 s.

10. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις x_1=Aημ(1996πt) (S.I) και x_2=Aημ(2004πt) (S.I).

α) Οι φάσεις των ταλαντώσεων κάθε στιγμή είναι ίσες μεταξύ τους.

β) Η περίοδος του διακροτήματος είναι ίση με το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ) Στη διάρκεια ενός δευτερολέπτου το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης μηδενίζεται στιγμιαία 4 φορές.

δ) Το σώμα εκτελεί 250 ταλαντώσεις σε χρόνο 0,25 s.

11. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, πλάτους A=0,2 m. Οι ταλαντώσεις δεν έχουν αρχική φάση και οι συχνότητές τους είναι f_1=500 Hz και f_2=502 Hz αντίστοιχα.

α) Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης έχει μέγιστη τιμή ίση με 0,4 m.

β) Η συχνότητα της συνισταμένης κίνησης είναι ίση με 501 Hz.

γ) Η συχνότητα του διακροτήματος είναι ίση με 2 Hz.

δ) Η συνισταμένη κίνηση είναι περιοδική με περίοδο 0,1 s.

12. Κατά τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων προκύπτει πάντοτε απλή αρμονική ταλάντωση.

13. Ένα σώμα συμμετέχει ταυτόχρονα σε δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που περιγράφονται από τις εξισώσεις x_1=0,4ημ102πt (S.I) και x_2=0,4ημ98πt (S.I). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες;

α) Το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του 100 φορές το δευτερόλεπτο.

β) Το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται τέσσερις φορές στη διάρκεια τριών δευτερολέπτων.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

14. Ένα υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις y_1=Αημωt και y_2=Αημ(ωt+π/3). Ποια είναι η ταχύτητά του όταν η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι τριπλάσια της κινητικής. Δίνονται τα μεγέθη Α και ω.

15. Σώμα εκτελεί σύνθετη ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,8συν4πt.ημ1000πt (S.I). Η ταλάντωση αυτή προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε πόσες φορές το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και συχνότητας, που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για την συνισταμένη ταλάντωση, στις περιπτώσεις που οι δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις έχουν εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής:

α) $x_1=20ημ10t$ (S.I) και $x_2=5ημ(10t+π)$ (S.I)

β) $x_1=4\sqrt{3}\,ημ2t$ (S.I) και $x_2=4ημ(2t+\frac{\pi}{2})$ (S.I)

γ) $x_1=5ημ(2t+\frac{\pi}{3})$ (S.I) και $x_2=5ημ(2t+\frac{5\pi}{6})$ (S.I)

Απ: α) $x=15ημ10t$ β) $x=8ημ(2t+\frac{\pi}{6})$ γ) $x=5\sqrt{2}\,ημ(2t+\frac{7\pi}{12})$

2. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και συχνότητας, που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$x_1=0{,}2ημ(2t)$ (S.I) και $x_2=0{,}2ημ(2t+π/3)$ (S.I)

α) να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος

β) να βρείτε τη ταχύτητα του σώματος τη στιγμή $t=π/4$

γ) να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος όταν βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα και ισχύει $K=3U$.

α) $x=0{,}2\sqrt{3}\,ημ(2t+π/6)$ β) $u=-0{,}2\sqrt{3}$ m/s γ) $a=0{,}4\sqrt{3}$ m/s^2

3. Ένα σώμα μάζας $m=2Kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της μορφής $x_1=A'ημωt$ (S.I) και $x_2=A'ημ(ωt+π/3)$ (S.I) που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης του σώματος είναι E=300J. Τη χρονική στιγμή t_1=T/2 όπου T η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης, το σώμα διέρχεται από τη θέση $x=-\sqrt{3}$ m.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος των συνιστωσών ταλαντώσεων.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ) Να υπολογίσετε τη χρονική διαφορά μεταξύ της συνιστώσας ταλάντωσης $χ_2$= f(t) και της συνισταμένης ταλάντωσης.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του έχει μέτρο ίσο με $50\sqrt{3}$ N.

Απ. α) 2m β) $χ=2\sqrt{3}$ ημ(5t+π/6) (S.I) γ) π/30 s δ) 15 m/s

4. Σώμα μάζας m εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της μορφής x_1=0,8ημ10t (S.I) και $x_2=0,8\sqrt{3}$συν10t (S.I) που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

α) Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Να υπολογίσετε τη θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές που η απομάκρυνση του εξαιτίας της ταλάντωσης x_1=f(t) ισούται με x_1=+0,4 m.

Απ: α) $x=1,6ημ(10t+\frac{\pi}{3})$ (S.I) β) x=+1,6 m ή x=-0,8 m.

5. Ένα σώμα μάζας m=1 Kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της μορφής $χ_1$=2ημωt (S.I) και $χ_2$=4ημ(ωt+π) (S.I) που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.Τη χρονική στιγμή t_1=0,1π s το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση x=-2 m.

α) Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $\chi_1=f(t)$ και $\chi_2=f(t)$ και $\chi=f(t)$ σε κοινό σύστημα αξόνων.

γ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t=0$.

Απ. α) $\chi=2\eta\mu(5t+\pi)$ (S.I) γ) $0,3\pi$ s

6. Σώμα μάζας $m=0,1Kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίδιο πλάτος $A=0,02m$, γωνιακή συχνότητα $\omega_1=99\pi rad/s$ και $\omega_2=101\pi rad/s$ και αρχική φάση ίση με μηδέν.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων καθώς και την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα σε χρόνο ίσο με δύο περιόδους διακροτήματος.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος.$(\pi^2=10)$

Απ: α) $x_1=0,02\eta\mu 99\pi t$, $x_2=0,02\eta\mu 101\pi t$, $x=0,04\sigma\upsilon\nu(\pi t)\eta\mu(100\pi t)$ β) 100 γ) $U_{max}=8$ J.

7. Η ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα και προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$, που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος, μηδενική αρχική φάση και παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 με $f_1> f_2$. Τη χρονική στιγμή $t_1=1/8s$ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\varphi=\pi/2$ rad. Το σώμα κατά τη διάρκεια της σύνθετης ταλάντωσης διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 200 φορές το δευτερόλεπτο και η μέγιστη τιμή του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με $A'=0,5m$.

α) Να υπολογίσετε την περίοδο των διακροτημάτων.

β) Να γράψετε την εξίσωση των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων.

γ) Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης για πρώτη φορά.

Απ. α) 0,5 s β) $x_1=0,25\eta\mu 202\pi t$ (S.I) $x_2=0,25\eta\mu 198\pi t$ (S.I). γ) 0,25s.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΥΜΑΤΑ

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ,
ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ,
ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ,
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ,
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ,
ΟΛΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

ΤΣΙΑΡΔΑΚΛΗΣ ΘΕΟΛΟΓΟΣ - Φυσικός

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ	
$υ=\frac{x}{t}$, $υ=λf$, $υ=\frac{λ}{T}$	Ταχύτητα διάδοσης του κύματος
$y=Aημ2π(\frac{t}{T}-\frac{x}{λ})$ $y=Aημ2π(\frac{t}{T}+\frac{x}{λ})$	Εξίσωση εγκάρσιου γραμμικού αρμονικού κύματος, για κύμα που διαδίδεται κατά την θετική ή την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x΄x.
$φ= 2π(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{λ})$	Φάση γραμμικού αρμονικού κύματος

ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ	
$y=2Aσυν2π(\frac{r_1-r_2}{2λ})ημ2π(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2λ})$	Εξίσωση της ταλάντωσης ενός σημείου της επιφάνειας του υγρού εξαιτίας της συμβολής σε αυτό δύο αρμονικών κυμάτων που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές.
$A'=2A\left\|συν2π(\frac{r_1-r_2}{2λ})\right\|$	Πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου της επιφάνειας του υγρού εξαιτίας της συμβολής σε αυτό δύο αρμονικών κυμάτων που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές.

$r_1 - r_2 = N\lambda$, με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Συνθήκη που ισχύει για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής (Α′=2Α)
$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$, με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Συνθήκη που ισχύει για τα σημεία ακυρωτικής συμβολής (Α′=0)

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ	
$y = 2A\,\text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda}\,\text{ημ}\frac{2\pi t}{T}$	Εξίσωση του στάσιμου κύματος, η οποία ισχύει με την προϋπόθεση ότι τη στιγμή t=0 για το σημείο χ=0 είναι y=0 και υ>0
$A' = 2A\left\|\text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda}\right\|$	Πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου του γραμμικού ελαστικού μέσου (άξονας χ′χ) στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.
$x_\kappa = N\frac{\lambda}{2}$, με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Θέσεις των σημείων του γραμμικού ελαστικού μέσου (άξονας χ′χ) στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, που είναι κοιλίες.
$x_\delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$, με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Θέσεις των σημείων του γραμμικού ελαστικού μέσου (άξονας χ′χ) στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, που είναι δεσμοί.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ	
$c=\frac{x}{t}$, $c=\lambda f$, $c=\frac{\lambda}{T}$	Ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό
$υ=\frac{x}{t}$, $υ=\lambda f$, $υ=\frac{\lambda}{T}$	Ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ύλη
$E=E_{max}\ ημ2π(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$ $B=B_{max}\ ημ2π(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$	Χρονικές εξισώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα χ΄χ, για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή.
$\frac{E}{B}=c\ ,\ \frac{E_{max}}{B_{max}}=c$	Σχέση των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (στιγμιαίων και μέγιστων τιμών) ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό.
$\frac{E}{B}=υ\ ,\ \frac{E_{max}}{B_{max}}=υ$	Σχέση των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (στιγμιαίων και μέγιστων τιμών) ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στην ύλη.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ-ΔΙΑΘΛΑΣΗ-ΟΛΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ	
$\boldsymbol{\theta_a=\theta_b}$	Νόμος της ανάκλασης
$\boldsymbol{n=\frac{c}{v}}, \quad \boldsymbol{n=\frac{\lambda_0}{\lambda}}$	Δείκτης διάθλασης ενός οπτικού μέσου
$\boldsymbol{n_a ημθ_a = n_b ημθ_b}$	Νόμος του Snell
$\boldsymbol{ημθ_{crit}=\frac{n_b}{n_a}}$ **με** $\boldsymbol{n_b<n_a}$	Υπολογισμός της κρίσιμης γωνίας (αν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία τότε συμβαίνει ολική ανάκλαση).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός του κύματος

Κύμα ονομάζουμε την διάδοση μιας διαταραχής (π.χ ταλάντωσης) σε όλα τα σημεία ενός μέσου με ορισμένη ταχύτητα. Με το κύμα μεταφέρεται **ενέργεια** και **ορμή** χωρίς να μεταφέρεται **ύλη**.

Είδη κυμάτων

Α. Ανάλογα με την ενέργεια που μεταφέρουν:

Μηχανικά κύματα. Μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και διαδίδονται σε υλικά μέσα με ορισμένη ταχύτητα.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και μπορούν να διαδοθούν και στο κενό. Διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός.

Β. Ανάλογα με τη διεύθυνση της ταλάντωσης:

Εγκάρσια κύματα. Η διεύθυνση της ταλάντωσης είναι κάθετη στη διεύθυνση της διάδοσης του κύματος.

Διαμήκη κύματα. Η διεύθυνση της ταλάντωσης είναι παράλληλη στη διεύθυνση της διάδοσης του κύματος.

Γ. Ανάλογα με τις διαστάσεις του μέσου διάδοσης:

Γραμμικά κύματα. Το μέσο διάδοσης είναι μονοδιάστατο.
Επιφανειακά κύματα. Το μέσο διάδοσης είναι δυσδιάστατο.
Κύματα χώρου. Το μέσο διάδοσης είναι τρισδιάστατο.

Χαρακτηριστικά στοιχεία του κύματος

Περίοδος κύματος

✓ Είναι η περίοδος της ταλάντωσης όλων των σημείων του ελαστικού μέσου.

✓ Είναι ο χρόνος στον οποίο επαναλαμβάνεται η κυματική εικόνα, επειδή όλα τα σημεία του μέσου εκτελούν μια ταλάντωση, οπότε επανέρχονται στις αρχικές τους θέσεις.

Συχνότητα κύματος

✓ Είναι η συχνότητα της ταλάντωσης όλων των σημείων του ελαστικού μέσου.

✓ Είναι ο αριθμός των κορυφών (πυκνωμάτων) ή κοιλάδων (αραιωμάτων) που περνάνε από ένα σημείο του μέσου διάδοσης σε ένα δευτερόλεπτο.

Προφανώς ισχύει η σχέση $f = \frac{1}{T}$

Μήκος κύματος

✓ Είναι η σταθερή απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

✓ Είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σημεία που ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης. Δηλαδή δύο σημεία που έχουν κάθε στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια φορά κίνησης.

Ταχύτητα διάδοσης

✓ Είναι η σταθερή ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή στο μέσο διάδοσης. Υπολογίζεται από την σχέση: $u = \frac{x}{t}$, όπου x είναι η απόσταση που διανύει το κύμα και t είναι ο αντίστοιχος χρόνος.

✓ Η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου που σημαίνει ότι δύο κύματα διαφορετικής συχνότητας που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο ή σε όμοια ελαστικά μέσα έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης.

Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής

✓ Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος, το μήκος κύματος και η συχνότητα του κύματος συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση που είναι γνωστή ως θεμελιώδης εξίσωση της μηχανικής.

$$\mathbf{υ=λ.f}$$

✓ <u>Αν δύο διαφορετικής συχνότητας κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο, εξαιτίας του ότι η ταχύτητα διάδοσης θα είναι η ίδια, το μήκος κύματος θα είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας.</u>

✓ <u>Αν το ίδιο κύμα αλλάξει μέσο διάδοσης, τότε εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν θα αλλάξει η συχνότητα, το μήκος κύματος θα αλλάξει ανάλογα με την ταχύτητα διάδοσης.</u>

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Εξίσωση εγκάρσιου γραμμικού αρμονικού κύματος

Όταν η ταλάντωση της πηγής είναι απλή αρμονική ταλάντωση, τότε το παραγόμενο κύμα ονομάζεται **αρμονικό κύμα**.

Η εξίσωση του γραμμικού αρμονικού κύματος είναι μια εξίσωση με την οποία υπολογίζουμε την απομάκρυνση (y) ενός οποιουδήποτε σημείου του μέσου διάδοσης (x) , την οποιαδήποτε χρονική στιγμή (t).

Θεωρούμε ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα χ΄Οχ **προς την θετική φορά του άξονα.** Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να ταλαντώνεται η αρχή του άξονα (x=0). Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:

$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Θεωρούμε ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα χ΄Οχ **προς την αρνητική φορά του άξονα.** Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να ταλαντώνεται η αρχή του άξονα (x=0). Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:

$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

✓ Αν το κύμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα στους παραπάνω τύπους θέτουμε x<0.

✓ Αν το κύμα τη στιγμή t=0 δεν βρίσκεται στην αρχή του άξονα και άρα έχει ήδη διαδοθεί σε κάποια απόσταση πέρα από το σημείο O , δηλαδή αν η ταλάντωση του σημείου O έχει αρχική φάση φ_0, η εξίσωση του κύματος θα έχει την μορφή:

$$y=A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

✓ Αν δεν τονίζεται ιδιαίτερα θα θεωρούμε ότι το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα.

✓ Αν το ελαστικό μέσο εκτείνεται μόνο κατά μήκος του ημιάξονα Οχ τότε η αρχή του άξονα θα είναι ταυτόχρονα και η πηγή του κύματος.

Φάση του κύματος

Φάση του κύματος ονομάζεται η γωνία του ημιτόνου της εξίσωσης του κύματος. Δηλαδή είναι: $\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

Ταχύτητα και επιτάχυνση της ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου

Η ταχύτητα της ταλάντωσης του οποιουδήποτε σημείου του μέσου διάδοσης την οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από την εξίσωση:

$$u=u_{max}\ \text{συν}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\quad,\ u_{max}=\omega A$$

Η επιτάχυνση της ταλάντωσης του οποιουδήποτε σημείου του μέσου διάδοσης την οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από την εξίσωση:

$$\alpha=-\alpha_{max}\ \text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\quad,\ \alpha_{max}=\omega^2 A$$

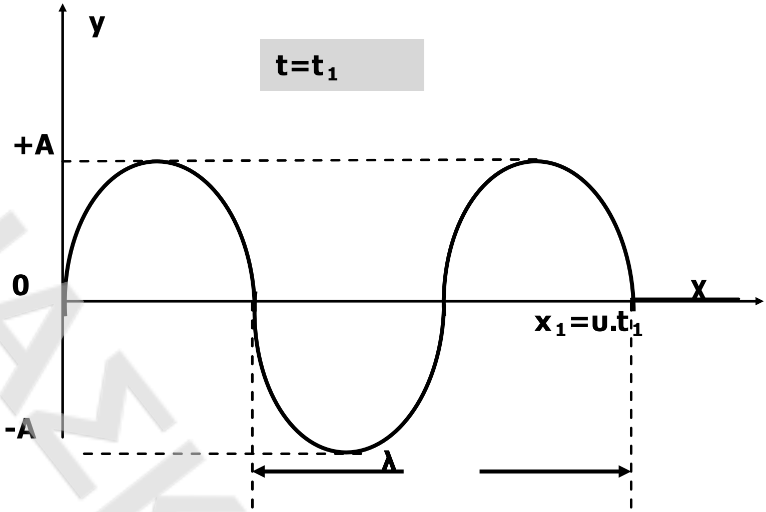
Γραφικές παραστάσεις

Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου κάποια χρονική στιγμή, σε συνάρτηση με την θέση τους.

Για δεδομένη χρονική στιγμή , δηλαδή για **$t=t_1=$σταθ.** η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$y=A\text{ημ}2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow y=A\text{ημ}2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta.-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Αυτή η σχέση μας δείχνει ότι η απομάκρυνση y των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της απόστασης x από την αρχή του άξονα, δηλαδή y=f(x).Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης λέγεται **στιγμιότυπο του κύματος.**

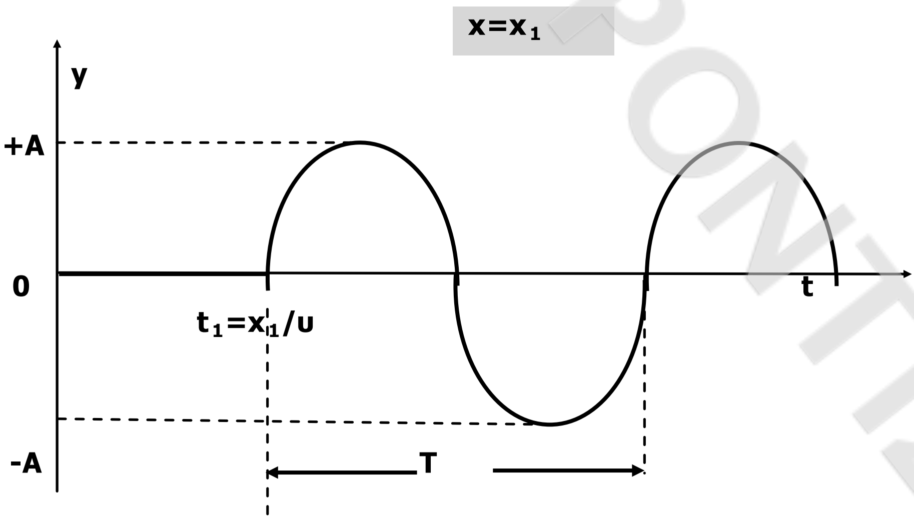


Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για ένα δεδομένο σημείο του ελαστικού μέσου, δηλαδή για $\mathbf{x=x_1=\sigma\tau\alpha\theta}$. η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)\Rightarrow y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\sigma\tau\alpha\theta.\right).$$

Αυτή η σχέση μας δείχνει ότι η απομάκρυνση y των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου t, δηλαδή y=f(t).

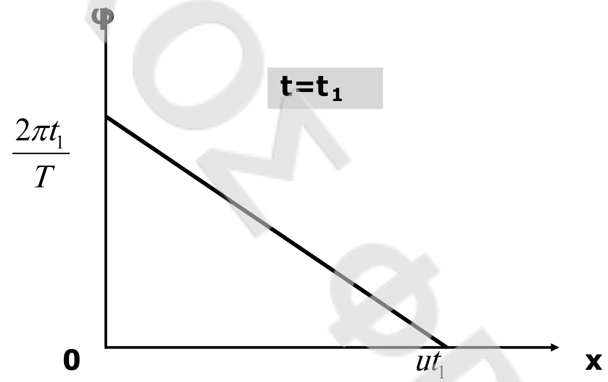


Γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου κάποια χρονική στιγμή, σε συνάρτηση με την θέση τους.

Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή **$t=t_1$** η εξίσωση της φάσης του κύματος γράφεται:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = \frac{2\pi t_1}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή. Τα σημεία τομής της με τους άξονες βρίσκονται ως εξής. Για x=0 $\Rightarrow \phi = \dfrac{2\pi t_1}{T}$, ενώ για φ=0 $\Rightarrow x = \dfrac{\lambda t_1}{T} = ut_1$.



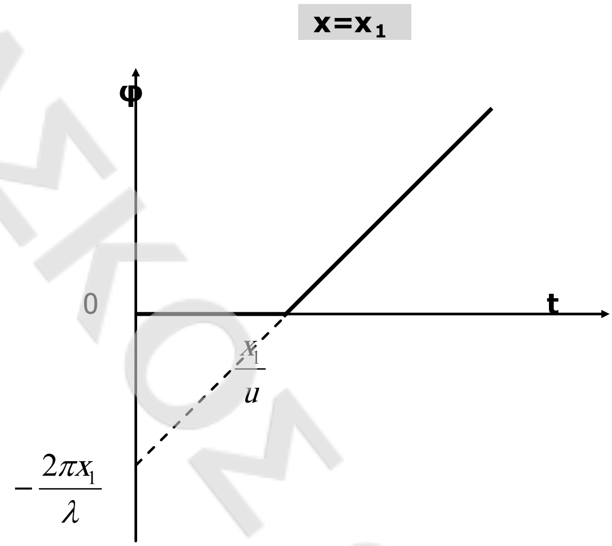
Προφανώς όπου x= $\dfrac{\lambda t_1}{T} \Rightarrow x = u.t_1$ είναι η απόσταση που έχει διανύσει το κύμα σε χρόνο t_1.

Γραφική παράσταση της φάσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για ένα δεδομένο σημείο Α του άξονα Οx που βρίσκεται στη θέση **$x=x_1$** η εξίσωση της φάσης του κύματος γράφεται:

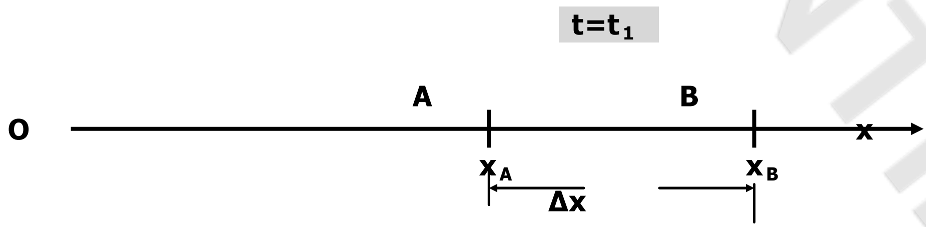
$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή. Τα σημεία τομής της με τους άξονες βρίσκονται ως εξής. Για t=0 $\Rightarrow \phi = -\frac{2\pi x_1}{\lambda}$, ενώ για φ=0 $\Rightarrow t = \frac{T.x_1}{\lambda} = \frac{x_1}{u}$.



Διαφορά φάσης της ταλάντωσης δύο υλικών σημείων του μέσου την ίδια χρονική στιγμή

Για να βρούμε την διαφορά φάσης Δφ της ταλάντωσης δύο υλικών σημείων του μέσου την ίδια χρονική στιγμή, αφαιρούμε τις φάσεις της ταλάντωσης των δύο σημείων την στιγμή αυτή.



Οι φάσεις των ταλαντώσεων των δύο σημείων Α και Β την ίδια χρονική στιγμή t_1 θα είναι αντίστοιχα.

$$\phi_A = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) \quad (1) \qquad \text{και} \quad \phi_B = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Επειδή είναι $x_A < x_B$, όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις θα είναι και $\varphi_A > \varphi_B$. Δηλαδή όσο πιο κοντά στην πηγή του κύματος βρίσκεται κάποιο σημείο του μέσου διάδοσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η φάση της ταλάντωσής του.

Επομένως είναι :

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi.\Delta x}{\lambda}$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε τα εξής:

α) Αν είναι **$\Delta x = \kappa\lambda$**, τότε θα είναι και **$\Delta\varphi = 2\kappa\pi$** και κατά συνέπεια τα δύο σημεία θα έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση $y_A = y_B$ και την ίδια ταχύτητα $\upsilon_A = \upsilon_B$. Τότε λέμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης.**

β) Αν είναι **$\Delta x = (2\kappa+1)\lambda/2$**, τότε θα είναι και **$\Delta\varphi = (2\kappa+1)\pi$** και κατά συνέπεια τα δύο σημεία θα έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις $y_A = -y_B$ και αντίθετες ταχύτητες $\upsilon_A = -\upsilon_B$. Τότε λέμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης.**

Μεταβολή της φάσης ενός υλικού σημείου του μέσου διάδοσης μεταξύ δύο χρονικών στιγμών.

Για ένα δεδομένο σημείο Α του άξονα Οx που βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ η φάση του τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 είναι :

$$\phi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad \phi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)$$

Επομένως η μεταβολή της φάσης του από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1 \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\frac{t_2-t_1}{T} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{2\pi.\Delta t}{T}}$$

Που έχει φτάσει το κύμα κάποια χρονική στιγμή t_1.

Αν το κύμα δεν έχει αρχική φάση έχουμε δύο ισοδύναμους τρόπους για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό.

<u>1ος τρόπος</u>

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = \upsilon.\Delta t \Leftrightarrow x_1 - 0 = \upsilon.(t_1 - 0) \Leftrightarrow x_1 = \upsilon.t_1$$

<u>2ος τρόπος</u>

Τη χρονική στιγμή που ξεκινάει η ταλάντωση κάποιου σημείου του ελαστικού μέσου, η φάση του αρχίζει να αυξάνεται από τη τιμή μηδέν. Άρα μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση της φάσης με την θέση φ(x) τη χρονική στιγμή t_1 και να μηδενίσουμε τη φάση για να βρούμε έτσι ποιο σημείο του ελαστικού μέσου είναι έτοιμο να ξεκινήσει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t_1.

$$\varphi(x,t_1) = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda.t_1}{T} = \upsilon.t_1$$

Ποια χρονική στιγμή ξεκινάει η ταλάντωση κάποιου σημείου του ελαστικού μέσου.

Αν το κύμα δεν έχει αρχική φάση έχουμε δύο ισοδύναμους τρόπους για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό.

<u>1ος τρόπος</u>

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = \upsilon.\Delta t \Leftrightarrow x_1 - 0 = \upsilon.(t_1 - 0) \Leftrightarrow t_1 = \frac{x_1}{\upsilon}$$

<u>2ος τρόπος</u>

Τη χρονική στιγμή που ξεκινάει η ταλάντωση κάποιου σημείου του ελαστικού μέσου, η φάση του αρχίζει να αυξάνεται από τη τιμή μηδέν. Άρα μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση της φάσης με το χρόνο φ(t) για το συγκεκριμένο σημείο x_1 και να μηδενίσουμε τη φάση για να βρούμε έτσι ποια χρονική στιγμή είναι έτοιμο να ξεκινήσει την ταλάντωσή του το σημείο x_1.

$$\varphi(x_1, t) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{T.x_1}{\lambda} = \frac{x_1}{\upsilon}$$

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Κατά τη διάδοση ενός κύματος σ' ένα ελαστικό μέσο μεταφέρεται:

α) μόνο ύλη
β) ενέργεια και ύλη
γ) ενέργεια και ορμή

δ) ενέργεια, ορμή και ύλη.

2. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σε ένα ελαστικό μέσο εξαρτάται:
α) από την ένταση της διαταραχής
β) από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδεται
γ) από τη συχνότητα του κύματος
δ) από το πλάτος ταλάντωσης της πηγής του κύματος.

3. Ένα κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης και από ένα μέσο Α στο οποίο διαδίδεται με ταχύτητα u_A συνεχίζει να διαδίδεται σ' ένα άλλο μέσο Β με ταχύτητα $u_B = 2u_A$. Κατά την αλλαγή του μέσου διάδοσης,
α) η συχνότητα του κύματος διπλασιάζεται
β) το μήκος κύματος διπλασιάζεται
γ) η περίοδος του κύματος υποδιπλασιάζεται
δ) το μήκος κύματος υποδιπλασιάζεται.

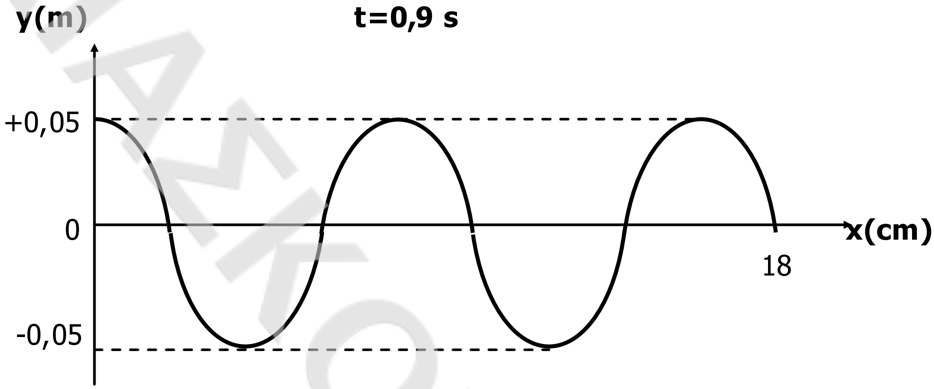
4. Αρμονικό κύμα διαδίδεται σε γραμμικό αρμονικό μέσο. Σε χρόνο Δt η πηγή έχει εκτελέσει 100 πλήρεις ταλαντώσεις και το κύμα έχει διαδοθεί κατά Δx=20m. Το μήκος κύματος λ είναι ίσο με:
α) 0,2m β) 0,4m γ) 2m δ) 20m

5. Η εξίσωση ταλάντωσης μιας πηγής αρμονικού κύματος είναι $y=A\eta\mu 4\pi t$ (S.I). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται σε ελαστικό μέσο με ταχύτητα $u = 4m/s$. Το μήκος κύματος λ είναι ίσο με:
α) 2m β) 4m γ) 8m δ) 0,5m

6. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα u=10m/s. Η φάση της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου μεταβάλλεται με ρυθμό 10π rad το δευτερόλεπτο. Η εξίσωση της φάσης αυτού του κύματος είναι η:
α) $\varphi=\pi(10t - 2x)$ (S.I)
β) $\varphi=2\pi(5t - 0,5x)$ (S.I)
γ) $\varphi=10\pi t - 4x$ (S.I)

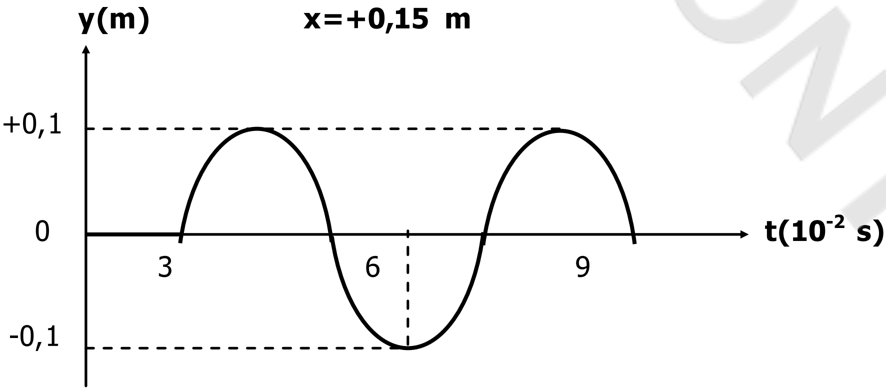
δ) φ=2π(4t – 2x) (S.I)

7. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t=0,9s. Η εξίσωση του κύματος είναι η:



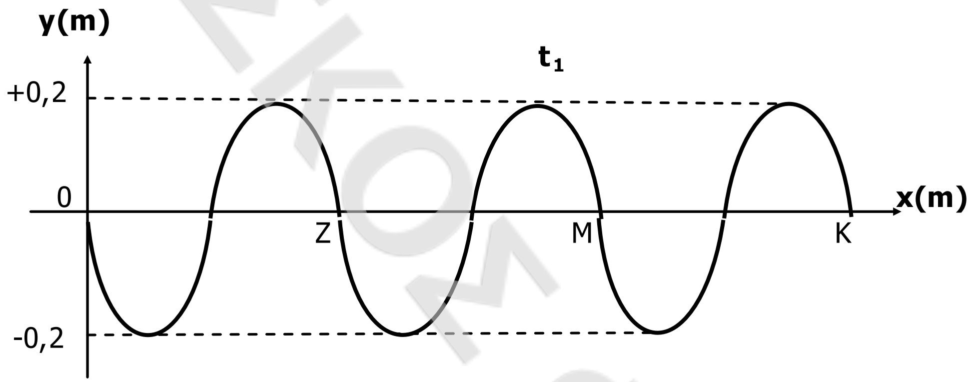
α) y=0,05 ημπ(5t –12,5x) (S.I)
β) y=0,05 ημ2π(2,5t –25x) (S.I)
γ) y=0,1 ημ2π(5t –25x) (S.I)
δ) y=0,05 ημπ(5t –25x) (S.I)

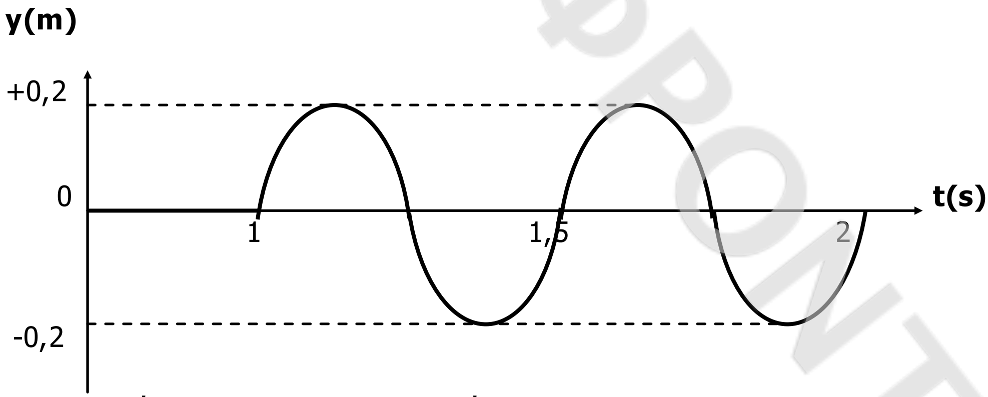
8. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου Μ του ελαστικού μέσου (x_M=0,15 m) σε συνάρτηση με το χρόνο. Η εξίσωση του κύματος είναι η:



α) y=0,1ημ2π(25t – 5x) (S.I)
β) y=0,1ημπ(0,5t – 10x) (S.I)
γ) y=0,2ημ2π(5t – 0,2x) (S.I)
δ) y=0,1ημπ(50t – 2,5x) (S.I)

9. Αρμονικό κύμα με εξίσωση y=Αημ(4πt – 20πx) διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα χ΄Οχ. Με βάση τα δύο παρακάτω διαγράμματα:





1) Το διάγραμμα y=f(t) αντιστοιχεί:
α) στο σημείο Z
β) στο σημείο M
γ) στο σημείο K

2) Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

α) $α=-3{,}2π^2ημ(4πt - 6π)$ (S.I)

β) $α=-3{,}2π^2ημ(4πt - 2π)$ (S.I)

γ) $α=-0{,}8π^2ημ(πt - 6π)$ (S.I)

10. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα με μήκος κύματος $λ=0{,}4$m. Οι θέσεις δύο υλικών σημείων Κ και Μ του ελαστικού μέσου απέχουν μεταξύ τους απόσταση $Δx=0{,}6$m με το Κ να είναι πιο κοντά στη πηγή του κύματος. Τις στιγμές που το Μ φτάνει στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του, το Κ:

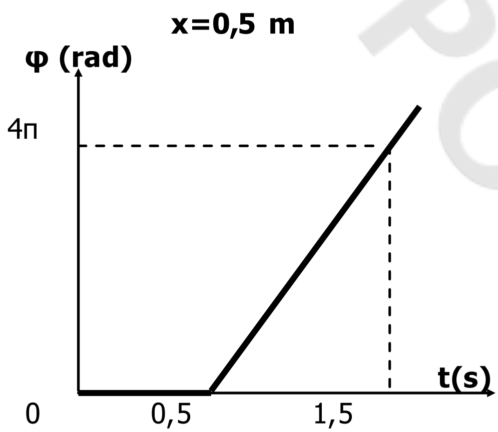
α) φτάνει και αυτό στην ακραία θετική του θέση

β) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα

γ) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα

δ) φτάνει στην ακραία αρνητική του θέση

11. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Μ ($x_M=+0{,}5$m) σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ο όταν περνά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του είναι $0{,}2π$ m/s. Η εξίσωση του κύματος είναι η:



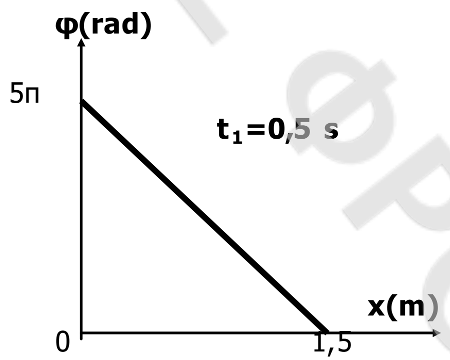
α) $y=0{,}05ημ2π(t - 2x)$ (S.I)

β) $y=0,1ημ2π(2t-x)$ (S.I)
γ) $y=0,1ημ2π(t-x)$ (S.I)
δ) $y=0,05ημ2π(2t-2x)$ (S.I)

12. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οχ διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση, με μήκος κύματος $λ=0,4$ m. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σημείο Λ ($x_Λ=+0,9$ m) φτάνει στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του, το Κ ($x_Κ=+0,2$ m):
α) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα
β) φτάνει στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του
γ) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

13. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται για τη χρονική στιγμή $t_1=0,5$s η γραφική παράσταση της φάσης ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οχ.



α) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι 2 m/s
β) Το υλικό σημείο Ο περνά από τη θέση ισορροπίας του κάθε 0,1 s
γ) Η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου είναι 0,6 m
δ) Τη στιγμή $t_2=2$ s η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι 20π rad.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

14. Σε ομογενές ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα χ'Οχ διαδίδεται αρμονικό κύμα με εξίσωση $y=0,2ημπ(4t + 10x)$ (S.I)

α) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή $t_1=1,25$ s για τα σημεία του άξονα για τα οποία ισχύει $x \leq +0,4$ m.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τη θέση, για τα σημεία του άξονα για τα οποία ισχύει $x \leq +0,4$ m, τη στιγμή $t_1=1,25$ s.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης του σημείου $M(x_M=-0,2$ m)

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Δίνεται η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής

1. Η άκρη Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή t=0 με εξίσωση $y=0,1ημπt$ (S.I). Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $υ=0,5$m/s.

α) Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος

β) Να βρεθεί η απομάκρυνση ενός σημείου που απέχει 10m από τη πηγή του κύματος Ο, τη στιγμή t=25s

γ) Πόσο απέχει από το Ο, ένα σημείο Β, το οποίο τη στιγμή t=5s έχει για πρώτη φορά απομάκρυνση y=5cm με υ>0;

Απ: α) $y=0,1ημ2π(t/2 - x)$ (S.I) β) $y=0$ γ) $x=29/12$ m

2. Κατά μήκος χορδής διαδίδεται αρμονικό κύμα το οποίο παράγεται από μια πηγή της οποίας η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $ψ=Αημ5πt$ (S.I). Η απόσταση μεταξύ ενός «όρους» και της μεθεπόμενης «κοιλάδας» είναι 30cm. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου της χορδής είναι 25π cm/s. Να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

β) η απομάκρυνση ενός σημείου Β της χορδής που απέχει από τη πηγή απόσταση $\chi=1m$, τη στιγμή $t=2,1s$.

γ) το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Β όταν η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι $y=3cm$

Απ: α) υ=0,5m/s β) y=+5cm γ) υ=20π cm/s

3. Μια πηγή Ο που βρίσκεται στη θέση $x=0$ του άξονα xx′ τη στιγμή $t=0$ αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,04\eta\mu 4\pi t$ (S.I) και το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα με ταχύτητα $\upsilon=50m/s$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του παραγόμενου κύματος

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος

γ) Τη χρονική στιγμή $t=20$ s να βρείτε για το σημείο Μ

i) την ταχύτητά του

ii) την επιτάχυνσή του

Απ: α) λ=25m β) $y=0,04\eta\mu 2\pi(2t-\chi/25)$ (S.I) γ) ι) v=0,16π m/s ιι) α=0

4. Το άκρο Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t=0$ με εξίσωση $y=10\eta\mu 20\pi t$ (t-s , ψ-cm), οπότε διαδίδεται κατά μήκος του ημιάξονα Οx κύμα με ταχύτητα $\upsilon=1m/s$.

α) Ποιο είναι το μήκος του κύματος;

β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ και να υπολογίσετε την τιμή της τη χρονική στιγμή $t=5,625s$

γ) Να υπολογίσετε τη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ τη στιγμή $t=4s$

δ) Να γράψετε την χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Μ

Απ: α) λ=0,1m β) $y=0,1\eta\mu 2\pi(10t-20)m$, ψ=0,1m γ) υ=2π m/s δ) $\alpha=-40\pi^2\eta\mu 2\pi(10t-20)m/s^2$

5. Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα xx′ σε γραμμικό ελαστικό μέσο και έχει μήκος κύματος $\lambda=24m$. Η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα είναι y=Αημωt. Κάποια χρονική στιγμή δύο υλικά σημεία Μ και Ν του μέσου έχουν φάσεις $φ_1$=5π/6 rad και $φ_2$=20π/3 rad αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Ν προς το σημείο Μ.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση ΜΝ.

Απ: β) Δx=70m

6. Μια πηγή Ο αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y=0,08ημπt (S.I). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα xx′ με ταχύτητα u=2m/s.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας της ταλάντωσης και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το σημείο Μ που βρίσκεται στη θέση x=2m

β) Να παραστήσετε γραφικά τη φάση φ της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του άξονα Οx σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x, τη χρονική στιγμή t=5 s

Απ: α) υ=0,08πσυν2π(0,5t-0,5) (S.I) α=0,08$π^2$ημ2π(0,5t-0,5) (S.I)

β) φ=5π-0,5πx

7. Η πηγή ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y=0,1ημ20πt (SI). Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι u=1m/s.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του κύματος τις στιγμές t_1=0,05s, t_2=0,1s και t_3=0,2s.

Απ: α) y=0,1ημ2π(10t-10x)

8. Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Πηγή του κύματος είναι το αριστερό άκρο της χορδής Ο, του οποίου η ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση y=5ημ2πt $(y \to cm, t \to s)$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι u=1m/s. Τη χρονική στιγμή t_1, η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου Β της χορδής είναι $φ_B$=π/6 rad.

α) Να βρείτε τη φάση της ταλάντωσης ενός σημείου Α της χορδής που απέχει d=50cm από το σημείο Β προς το άκρο Ο, τη χρονική στιγμή t_1.
β) Ποια είναι η απομάκρυνση του σημείου Α της χορδής, όταν η απομάκρυνση του σημείου Β είναι μέγιστη αρνητική;
Απ: α) $\varphi_A=7\pi/6$ rad, *β) $y_A=5cm$*

Δίνεται η εξίσωση του κύματος

9. Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα κύμα με εξίσωση $\psi=0{,}01\eta\mu\pi(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{0{,}5})$ (S.I). Ένα υλικό σημείο του μέσου μάζας $m=10^{-3}$ Kg βρίσκεται σε απόσταση $x_1=0{,}1m$ από τη πηγή του κύματος και ταλαντώνεται.
α) Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου;
β) Να γράψετε την χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο υλικό σημείο.
γ) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου όταν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $\psi_1=\frac{\sqrt{3}}{2}A$. Δίνεται $\pi^2=10$.
Απ: α) $\upsilon_{max}=0{,}04\pi$ m/s β) $F=-16.10^{-4}\eta\mu(4\pi t-0{,}2\pi)$ (S.I) γ) $K=2.10^{-4}$ J

10. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος είναι $\psi=0{,}4\eta\mu(4\pi t-0{,}2\pi x)$ (S.I)
α) Πόσο μπορεί να απέχει από τη πηγή ένα σημείο Γ, που τη στιγμή t=1s έχει απομάκρυνση $\psi=0{,}2\sqrt{2}$ m;
β) Ποια είναι η απομάκρυνση ενός σημείου Δ που απέχει από τη πηγή x=10m τις χρονικές στιγμές 0,2s , 0,5s , 9/16 s;
γ) Ποιο είναι το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t= 17/4 s;

11. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο κατά μήκος του άξονα xx' είναι ψ=0,1ημ2π(2t-$\frac{x}{4}$) (S.I)

α) Πόσο απέχουν δύο σημεία του ελαστικού μέσου Α και Β που παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ=3,5π rad. Να θεωρήσετε ότι το σημείο Α βρίσκεται πλησιέστερα της πηγής του κύματος από το σημείο Β.

β) Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Α σε χρονικό διάστημα Δt=2,5s;

γ) Αν το σημείο Α βρίσκεται στη θέση x_A=5m, ποια σημεία ανάμεσα στα Α και Β βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους τη στιγμή t=2s;

δ) Να γίνει το διάγραμμα της φάσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με την απόσταση από τη πηγή x, τη χρονική στιγμή t=2s

ε) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου που απέχει από τη πηγή απόσταση x=16m σε συνάρτηση με το χρόνο

Απ: α) Δx=7m β) Δφ=10π rad γ) x=6m , x=8m , x=10m

12. Ένα γραμμικό αρμονικό κύμα περιγράφεται από την εξίσωση y=10ημπ(10t-20x) $(x \to m, y \to cm, t \to s)$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πλάτους, της περιόδου, του μήκους κύματος και της ταχύτητας του κύματος.

β) Να βρεθεί η απόσταση δύο σημείων που παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ=3π/4 rad.

γ) Να βρεθεί η μεταβολή της φάσης ενός σημείου, από τη στιγμή t_1=5s έως τη στιγμή t_2=8s.

δ) Να βρεθεί η φάση ενός σημείου Μ (x=60cm) του μέσου, τη στιγμή t_1=0,4s. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

Απ: α) Α=10cm, f=5Hz, T=0,2s, υ=0,5m/s, β) Δx=3/80 m, γ) Δφ=30π rad, δ) φ=-8π rad

13. Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα Οx και η εξίσωσή του είναι:

$$y=0{,}1\eta\mu(3\pi t - 4\pi x) \text{ (S.I).}$$

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς που δέχεται ένα υλικό σημείο Κ του ελαστικού μέσου, μάζας $m=10^{-3}$ Kg.

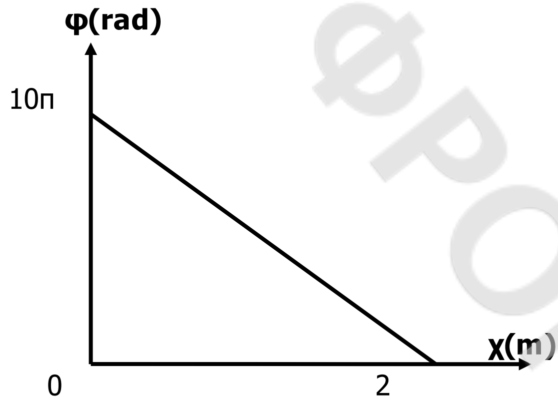
β) Να υπολογίσετε τη θέση του σημείου Κ αν η φάση της ταλάντωσης του, τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ ισούται με $\varphi_K=4\pi$ rad.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι $y_1=+5\sqrt{3}.\ 10^{-2}$ m.

Δίνεται για τις πράξεις ότι $\pi^2=10$.

Δίνεται η φ=φ(χ)

14. Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα xx′ σε γραμμικό ελαστικό μέσο και έχει πλάτος A=0,1m. Η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα είναι ψ=Αημ(ωt). Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από τη πηγή τη χρονική στιγμή t=2s.



α) Να βρείτε την περίοδο και το μήκος κύματος

β) Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος

δ) Να βρείτε τη στιγμή t=4s και για το σημείο Α ελαστικού μέσου το οποίο απέχει από τη πηγή απόσταση x=1m :

ι) την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του

ιι) την ταχύτητά του

ιιι) την επιτάχυνσή του

ε) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t=2s.

Απ: α) T=0,4s λ=0,4m β) υ=1m/s) ψ=0,1ημ2π(2,5t-2,5x) (S.I)

δ) ι) ψ=0 ιι) υ=0,5m/s ιιι) α=0

Με αρχική φάση

15. Εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα με πλάτος 0,08m και μήκος κύματος 1,6m διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος τεντωμένης χορδής με ταχύτητα 100m/s. Θεωρούμε ότι τη στιγμή t=0, το αριστερό άκρο της χορδής (x=0) είναι στη θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα κάτω.

α) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση της κίνησης ενός σημείου της χορδής που απέχει 1,2m από την αρχή.

γ) Ποια είναι η απομάκρυνση και ποια είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του προηγούμενου σημείου τη στιγμή t=0,024s.

Απ: α) y=0,08ημ$\left[2\pi(62,5t-0,625x)+\pi\right]$ (SI), β) y=0,08ημ(125πt-$\frac{\pi}{2}$) (SI), γ) y=0,08m, v=0

ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ

Γενικά

✓ Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα τότε κάθε σωματίδιο του μέσου εκτελεί μια σύνθετη ταλάντωση η οποία οφείλεται και στα δύο κύματα. Τότε λέμε ότι τα δύο κύματα συμβάλλουν στο ελαστικό μέσο.

Εξίσωση της ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της επιφάνειας του υγρού εξαιτίας της συμβολής

✓ Θεωρούμε ότι στην επιφάνεια ενός ελαστικού μέσου υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 οι οποίες παράγουν δύο κύματα του ίδιου πλάτους και του ίδιου μήκους κύματος και ένα τυχαίο σημείο της επιφάνειας του μέσου Σ το οποίο απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές αντίστοιχα.
Έστω ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης της κάθε μιας πηγής είναι $y=A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$.
Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ αν υπήρχε η κάθε πηγή ξεχωριστά θα ήταν $y_1=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)$ και $y_2=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$, αντίστοιχα.

Τελικά η απομάκρυνση του σημείου Σ εξαιτίας και των δύο πηγών θα είναι: $y=y_1+y_2$ με βάση την οποία καταλήγουμε στη εξίσωση:

$$y=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_1-r_2)}{2\lambda}.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$$

✓ Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η κίνηση του σημείου Σ είναι απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A'=2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|$ το οποίο εξαρτάται από την διαφορά των αποστάσεων του σημείου από τις δύο πηγές.

Σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος

✓ Η διαφορά των αποστάσεων του σημείου της επιφάνειας του υγρού από τις δύο πηγές πρέπει να είναι:

$$A'=2A \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|=2A \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|=1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}=\pm 1$$

$$\Rightarrow 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}=N\pi \quad \Rightarrow \quad r_1-r_2=N\lambda \qquad , N=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

✓ Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν στο σημείο της επιφάνειας του υγρού τα δύο κύματα αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι:

$$\Delta t=NT \qquad , N=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

✓ Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του σημείου της επιφάνειας του υγρού εξαιτίας των δύο κυμάτων αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι:

$$\Delta\varphi=N.2\pi \qquad , N=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

Σημεία τα οποία παραμένουν ακίνητα

✓ Η διαφορά των αποστάσεων του σημείου της επιφάνειας του υγρού από τις δύο πηγές πρέπει να είναι:

$$A'=0 \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|=0 \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} = (2N+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, \quad N=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

✓ Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν στο σημείο της επιφάνειας του υγρού τα δύο κύματα αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι:

$$\Delta t=(2N+1)T/2 \quad , N=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

✓ Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του σημείου της επιφάνειας του υγρού εξαιτίας των δύο κυμάτων αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι:

$$\Delta\varphi=(2N+1)\pi \quad , N=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

Η διαφορά φάσης με την οποία τα κύματα φτάνουν σε ένα σημείο της επιφάνειας του υγρού.

Τα δύο κύματα που φτάνουν σε κάποιο σημείο της επιφάνειας του υγρού έχουν φάσεις

$$\boldsymbol{\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \;\; \kappa\alpha\iota \; \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)}$$

Άρα η διαφορά φάσης με την οποία τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο είναι

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}}$$

Οι πηγές έχουν διαφορά φάσης

Έστω ότι οι πηγές Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με εξισώσεις

$$\boldsymbol{y_1 = A\eta\mu\omega t \;, \qquad y_2 = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)}$$

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που φτάνουν σε ένα σημείο Μ το οποίο απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές, είναι:

$$\boldsymbol{y_1 = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \;\; \kappa\alpha\iota \; y_2 = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)}$$

Τελικά η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων σε αυτό θα είναι:

$$\boldsymbol{y = y_1 + y_2}$$

$$y = 2A.\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} + \frac{\varphi_0}{4\pi}\right).\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} + \frac{\varphi_0}{4\pi}\right)$$

Τα σημεία ενισχυτικής συμβολής θα ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = N\lambda - \frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Τα σημεία ακυρωτικής συμβολής θα ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στην επίπεδη επιφάνεια ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο όμοια κύματα που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2. Σε σημείο Δ της επιφάνειας του μέσου το οποίο απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση r_1=2,5λ και από την πηγή Π_2 απόσταση r_2 (r_2>r_1) συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές σχηματίζονται τρία σημεία ενισχυτικής συμβολής.

Α) Η απόσταση r_2 είναι:

α) 3,5λ **β)** 4,5λ **γ)** 5λ

Β) Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Δ ξεκινά τη χρονική στιγμή:

α) 2,5 Τ **β)** 3,5 Τ **γ)** Τ

2. Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 με εξίσωση ταλάντωσης y=Αημ10πt (S.I), δημιουργούν στην επιφάνεια ενός ελαστικού μέσου αρμονικά κύματα μήκους κύματος λ. Τη χρονική στιγμή t_1=1s τα δύο κύματα συμβάλλουν σε σημείο Ζ της επιφάνειας που απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση r_1 και από την πηγή Π_2 απόσταση r_2, για τις οποίες ισχύει r_1>r_2 και r_2= 10λ/3.

Α) Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ζ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό δίνεται από την σχέση:

α) y= Αημ(10πt -25π/3)

β) y= Αημ(10πt -20π/3)

γ) y= Αημ(5πt -14π/3)

Β) Τη χρονική στιγμή t=0,9s η φάση της ταλάντωσης του σημείου Ζ είναι:

α) 0 **β)** 7π/3 rad **γ)** 2π/3 rad

3. Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος λ που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο Γ της επιφάνειας του υγρού απέχει από τη πηγή $Π_1$ απόσταση $r_1=2λ$ και από την πηγή $Π_2$ απόσταση r_2 ($r_1>r_2$), έτσι ώστε τα σημεία Κ,Γ και Λ να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{Γ}=90^0$. Το σημείο Γ ανήκει στη πιο κοντινή στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ υπερβολή ακυρωτικής συμβολής. Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών ισούται με:

α) 1,5λ **β)** 5λ **γ)** 2,5λ

4. Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος λ που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού. Το πιο απομακρυσμένο από την πηγή $Π_2$ σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή απέχει από το μέσο Μ του τμήματος ΚΛ απόσταση $d_1=2λ$. Ο αριθμός των σημείων της ενισχυτικής συμβολής που εμφανίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι:

α) 5 **β)** 9 **γ)** 10

5. Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος λ που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού. Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών ισούται με d=2,2λ. Ο αριθμός των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ στα οποία εμφανίζεται ενισχυτική συμβολή ισούται με:

α) 1 **β)** 3 **γ)** 5 **δ)** 7

6. Δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος λ που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού. Η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής $Π_1$ είναι $y_1=Αημ(ωt+φ_0)$ ενώ της πηγής $Π_2$ είναι $y_2=Αημωt$.

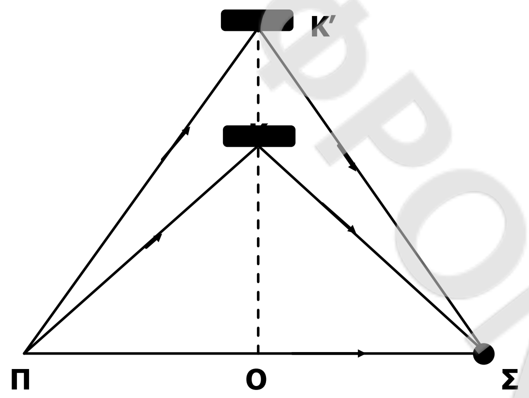
Α) Αν $φ_0=π/2$ rad τότε η ελάχιστη απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ των αποστάσεων r_1 και r_2 ενός σημείου ενισχυτικής συμβολής από τις δύο πηγές ισούται με:

α) λ **β)** λ/2 **γ)** λ/4

Β) Για να παραμένει συνεχώς ακίνητο ένα σημείο της επιφάνειας του ελαστικού μέσου που απέχει από τη πηγή $Π_1$ απόσταση $r_1=3λ$ και από την πηγή $Π_2$ απόσταση $r_2=4λ$ πρέπει η αρχική φάση $φ_0$ να ισούται με:

α) 0 **β)** π/2 rad **γ)** π rad

7. Στην ήρεμη επιφάνεια υγρού μια πηγή Π δημιουργεί αρμονικά κύματα μήκους κύματος λ. Σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας που απέχει από την πηγή απόσταση ΠΣ=6m, συμβάλουν τα κύματα που προέρχονται απευθείας από την πηγή και αυτά που ανακλώνται πρώτα στον ανακλαστήρα Κ. Ο ανακλαστήρας μπορεί να κινείται πάνω στην μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΠΣ. Όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται σε απόσταση ΟΚ=4m από το σημείο Ο, το σημείο Σ παραμένει συνεχώς ακίνητο για πρώτη φορά.



Α) Το μήκος κύματος λ είναι:

α) 4,25m **β)** 6,5m **γ)** 8m

Β) Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα και τον φέρουμε στην θέση Κ′ ώστε ΟΚ′=$\sqrt{40}$m, τότε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι:

α) Α/2 **β)** 2Α **γ)** 0

8. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ δημιουργούν εγκάρσια κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού.

Α) Δύο διαδοχικά σημεία ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση

α) λ **β)** λ/2 **γ)** λ/4

Β) Ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής και το διπλανό του σημείο ακυρωτικής συμβολής που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση

α) λ **β)** λ/2 **γ)** λ/4

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα υ=1m/s, έχουν πλάτος Α=0,1m και περίοδο Τ=2s. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται στο σημείο Β για το οποίο ισχύει r_1=3m και r_2=2,5m.

α) Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται ο φελλός;

β) Ποια χρονική στιγμή συμβάλουν τα κύματα στο σημείο Β; Ποιο το πλάτος ταλάντωσης του φελλού μετά τη συμβολή των κυμάτων στο σημείο Β;

γ) Ποια είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του φελλού τη χρονική στιγμή t=4s ;

δ) Αν η μάζα του φελλού είναι $m=10^{-3}$ Kg, ποιά είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια του φελλού αν τοποθετηθεί στο σημείο Γ για το οποίο ισχύει r_1=7m και r_2=5m.($π^2$=10)

Απ: α) t=2,5 s β) t=3 s , Α΄=0,1$\sqrt{2}$ m γ) υ=-0,1π m/s δ) K=2.10^{-4} J

2. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που έχουν συχνότητα f=5Hz και πλάτος Α=5mm. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα υ=40cm/s. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις d_1=31cm και d_2=33cm αντίστοιχα.

α) Να γραφεί η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σημείο Μ σε συνάρτηση με το χρόνο. Για ποιες χρονικές στιγμές ισχύει αυτή η εξίσωση;

β) Ποια χρονική στιγμή η απομάκρυνση της συνισταμένης ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σημείο Μ, θα είναι για πρώτη φορά ψ=0;

Απ: α) y=5 $\sqrt{2}$ ημ(10πt-8π) (y σε cm) , t≥33/40s β) t=0,9s

3. Δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής κυμάτων βρίσκονται σε δύο σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της επιφάνειας του υγρού. Οι δύο πηγές ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος Α=2cm και την ίδια συχνότητα f=5Hz, χωρίς αρχική φάση. Τα κύματα που παράγονται διαδίδονται με ταχύτητα υ=0,8m/s. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού και απέχει 20cm από την πηγή $Π_1$ και 24cm από την πηγή $Π_2$.

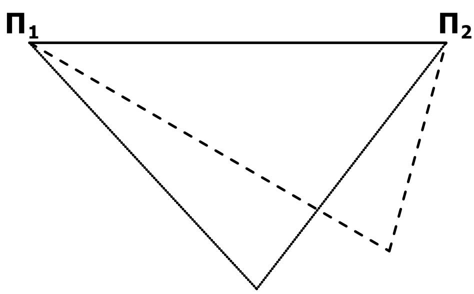
α) Να γραφεί η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων.

β) Από ποια χρονική στιγμή ισχύει το παραπάνω ερώτημα;

γ) Να υπολογιστεί η απομάκρυνση του φελλού τη χρονική στιγμή t=0,4s.

Απ: α) y=2 $\sqrt{2}$ ημ(10πt-$\frac{11\pi}{4}$) $(y \to cm, t \to s)$, β) $t \geq 0,3s$, γ) y=-2cm

4. Οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$ είναι σύγχρονες και έχουν συχνότητα f=20Hz. Δίνεται ότι για το σημείο Κ ισχύει d_1-d_2=145cm και για το σημείο Λ ισχύει d_1'-d_2'=255cm. Αν τα σημεία Κ και Λ παραμένουν συνεχώς ακίνητα και στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ υπάρχουν ακόμη 10 ακίνητα σημεία, να βρείτε την ταχύτητα των κυμάτων.

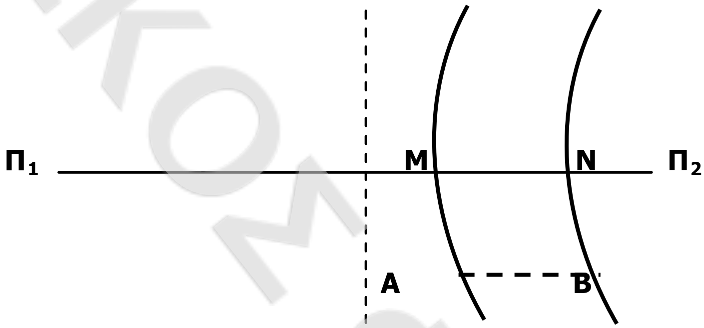


Λ

Κ

Απ: υ=2m/s

5. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$, $Π_2$ βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού και εκπέμπουν κύματα συχνότητας f=10Hz ταχύτητας υ=20m/s και ίδιου πλάτους. Για δύο σημεία Α και Β που βρίσκονται δεξιά της μεσοκαθέτου του τμήματος $Π_1Π_2$ η διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι $Δd_A$=40m και $Δd_B$=50m.



α) Να βρείτε πόσα σημεία μεταξύ των Α και Β ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

β) Τα Α και Β βρίσκονται πάνω σε δύο καμπύλες που τέμνουν το $Π_1Π_2$ στα σημεία Μ και Ν. Να προσδιορίσετε την απόσταση ΜΝ.

Απ: α) 4 σημεία, β) ΜΝ=5 m

6. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=5m και εκπέμπουν κύματα ίδιου πλάτους, συχνότητας f=100Hz και ταχύτητας υ=50m/s. Να βρείτε πόσα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ ανάμεσα στις δύο πηγές, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και πόσα μένουν ακίνητα.

Απ: 19 σημεία και 20 σημεία αντίστοιχα

7. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και δημιουργούν κύματα πλάτους A=0,08m και μήκους κύματος λ=0,3m. Σημείο Δ στο οποίο συμβάλλουν τα δύο κύματα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση y=0,08ημ2π$(4t - \frac{7}{6})$ (SI). Το σημείο αυτό απέχει από τη πηγή $Π_1$ απόσταση x_1=30cm και από την $Π_2$ απόσταση $x_2 > x_1$ σχηματίζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο $Π_1ΔΠ_2$.

α) Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

β) Να βρεθεί η απόσταση x_2.

γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών, ώστε στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ να δημιουργούνται εννιά σημεία ενισχυτικής συμβολής.

Απ: α) υ=1,2m/s, β) x_2=40cm, γ) f_{min}=9,6Hz

8. Στην επιφάνεια υγρού παράγονται κύματα από δύο σύγχρονες πηγές που εκτελούν ταλαντώσεις με εξισώσεις $y_1=y_2$=0,1ημ10πt (S.I) και τα δημιουργούμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα υ=2m/s. Αν η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι d=12m να υπολογίσετε:

α) το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου Σ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται σε απόσταση r_1=5m από τη πηγή $Π_1$ κάθετα στη διεύθυνση $Π_1Π_2$.

β) την απομάκρυνση του σημείου Σ τη στιγμή που φτάνει σε αυτό το κύμα από την πηγή $Π_2$

γ) το πλησιέστερο σημείο στη πηγή $Π_1$ που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο πηγές και παραμένει συνέχεια ακίνητο

Απ: α) 0,2m β) 0 γ) 0,1m

9. Στην επιφάνεια υγρού παράγονται κύματα από δύο σύγχρονες πηγές που εκτελούν ταλαντώσεις με εξισώσεις $y_1=y_2$=Aημωt (S.I) και τα δημιουργούμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα υ=8m/s. Σε ένα σημείο της επιφάνειας του υγρού που απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r_1 και r_2 με $r_1 > r_2$ υπάρχει ένα κομμάτι φελλού. λόγω συμβολής. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του φελλού είναι $υ=0,4.συν(4πt-8π)$ (S.I). Ο φελλός βρίσκεται στη δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης μετά τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές. Να υπολογίσετε:

α) Το μήκος κύματος των παραγόμενων κυμάτων.

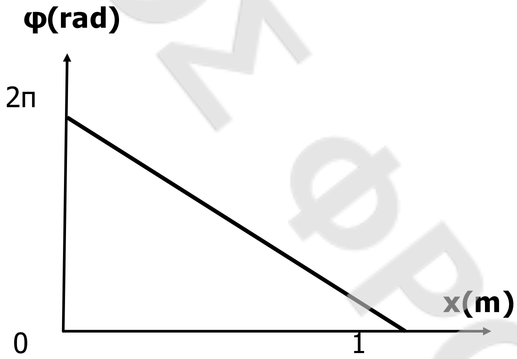
β) Το πλάτος ταλάντωσης των πηγών.

γ) Τις αποστάσεις του φελλού από τις δύο πηγές.

δ) Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση y(t) για την ταλάντωση του φελλού, από τη χρονική στιγμή T=0 έως τη χρονική στιγμή t=3,5s.

Απ. α) $λ=4m$ β) $A=5/π$ cm γ) $r_1=20m$, $r_2=12m$

10. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ απέχουν 4m και δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους $A=0,2m$ στην επιφάνεια μιας λίμνης. Αν υπήρχε μόνο η πηγή $Π_1$ τότε η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με την απόσταση από την πηγή $Π_1$ τη στιγμή t=2s θα ήταν:



α) Ποιο είναι το μήκος κύματος και ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων;

β) Ποια είναι η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σημείου Μ που απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις $r_1=2m$ και $r_2=5/3$ m, εξαιτίας της συμβολής;

δ) Πόσο απέχει από το σημείο Ο που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των δύο πηγών το δεύτερο σημείο απόσβεσης που βρίσκεται στα δεξιά του;

ε) Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές που η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας; ($π^2=10$)

Απ. α) $λ=1m$, $υ=0,5m/s$ β) $y=0,2ημ(πt-11π/3)$ (S.I) γ) $x=0,75m$ δ) $α=1m/s^2$

11. Σε ένα σημείο Μ της επιφάνειας ενός υγρού που απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r_1 και r_2 και ηρεμεί, φτάνουν ταυτόχρονα δύο εγκάρσια κύματα με εξισώσεις

$$\boldsymbol{y_1 = 0,1ημ2π\left(2t - \frac{r_1}{4} + \frac{1}{8}\right)} \quad και \quad \boldsymbol{y_2 = 0,1ημ2π\left(2t - \frac{r_2}{4}\right)} \ (\boldsymbol{S.I})$$

α) Να υπολογίσετε τη ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ, λόγω συμβολής των δύο κυμάτων.

γ) Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $|\boldsymbol{r_1 - r_2}|$ ώστε το σημείο Μ να παραμένει διαρκώς ακίνητο;

δ) Αν η διαφορά των αποστάσεων του σημείου Μ από τις δύο πηγές είναι $r_1 - r_2 = 4,5\ m$ πάνω σε ποια υπερβολή πρέπει να βρίσκεται ώστε να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος;

Απ. α) $υ=8m/s$ β) $y = 0,2συν2π\left(\frac{r_1-r_2}{8} - \frac{1}{16}\right).ημ2π\left(2t - \frac{r_1+r_2}{8} + \frac{1}{16}\right)$

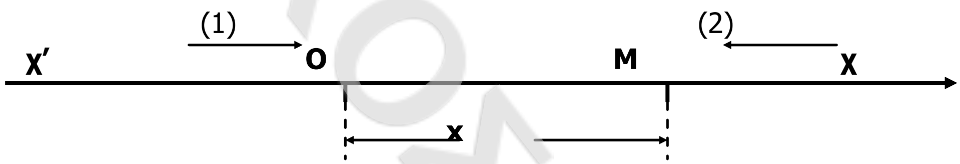
γ) $|r_1 - r_2| = 2,5m$ δ) $N=1$

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Γενικά

✓ Στάσιμο κύμα ονομάζεται μια κατάσταση η οποία δημιουργείται όταν διαδίδονται στο ίδιο μέσο δύο αρμονικά κύματα τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια συχνότητα (άρα και την ίδια περίοδο και το ίδιο μήκος κύματος) και διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος



✓ Έστω ότι στον άξονα χ΄Οχ διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα (1) και (2) τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια συχνότητα (άρα και την ίδια περίοδο και το ίδιο μήκος κύματος) και διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Έστω ότι τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα στην αρχή του άξονα O (χ=0) την χρονική στιγμή t=0. Δηλαδή για το σημείο χ=0 εξαιτίας του κάθε κύματος ξεχωριστά ισχύει ότι τη στιγμή t=0 είναι y=0 και u>0, επομένως η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O θα είναι $y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$.

✓ Με αυτές τις προϋποθέσεις η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα είναι $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και του κύματος που διαδίδεται κατά τη αρνητική φορά του άξονα είναι $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$.

✓ Εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων η απομάκρυνση του τυχαίου σημείου του άξονα θα βρεθεί ως εξής:

$$y=y_1+y_2 \Rightarrow y=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}.\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$

✓ Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **εξίσωση του στάσιμου κύματος** και μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε την απομάκρυνση του οποιουδήποτε σημείου του άξονα x, την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

✓ Το πλάτος της ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του άξονα δίνεται από την σχέση $A'=2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$, δηλαδή εξαρτάται από τη θέση του σημείου πάνω στον άξονα. Αναλυτικότερα υπάρχουν σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος A′=2A και λέγονται **κοιλίες** και σημεία που παραμένουν ακίνητα A′=0 και λέγονται **δεσμοί.** Όλα τα υπόλοιπα σημεία ταλαντώνονται με ενδιάμεσα πλάτη 0<A′<2 A.

Θέσεις κοιλιών

✓ Κοιλίες είναι τα σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Επομένως $A'=2A \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=2A \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}=\pm 1 \Rightarrow$

$\frac{2\pi x}{\lambda}=\kappa\pi \Rightarrow x_\kappa=\kappa\frac{\lambda}{2}$ $\kappa=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

✓ Αποδεικνύεται ότι στο σημείο x=0 υπάρχει κοιλία και ότι η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $d=\frac{\lambda}{2}$.

Θέσεις δεσμών

✓ Δεσμοί είναι τα σημεία που δεν ταλαντώνονται. Επομένως: $A'=0 \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=0 \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=0 \Rightarrow$ συν $\frac{2\pi x}{\lambda}=0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda}=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$x_\delta=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}$ κ=0, $\pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

✓ Αποδεικνύεται ότι η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $d=\frac{\lambda}{2}$ και ότι η απόσταση κάθε δεσμού από την γειτονική του κοιλία είναι $d=\frac{\lambda}{4}$.

Διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων του ελαστικού μέσου

✓ Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο τυχαίων σημείων του άξονα θα είναι Δφ=0 (συμφωνία φάσης) ή Δφ=π (αντίθεση φάσης).

✓ Συγκεκριμένα όλα τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης, ενώ τα σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν του ίδιου δεσμού και μέχρι τους δύο πλησιέστερους δεσμούς ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης.

✓ Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν ανάμεσα σε δύο σημεία δεν υπάρχει κανένας δεσμός ή υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών θα ισχύει ότι Δφ=0, ενώ αν μεσολαβεί περιττός αριθμός δεσμών θα ισχύει Δφ=π.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που εκτείνεται στον θετικό ημιάξονα Οχ, δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο Ο (χ=0). Εκατέρωθεν του πρώτου δεσμού Δ βρίσκονται τα σημεία Κ και Λ που απέχουν από αυτόν αποστάσεις $d_K=\lambda/8$ και $d_\Lambda=\lambda/3$, με το σημείο Κ να προηγείται.

Α) Τα σημεία Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης:

α) 0 **β)** π **γ)** π/2

Β) Για τις μέγιστες ταχύτητες των σημείων Κ και Λ ισχύει η σχέση:

α) $\upsilon_{K,max} = \sqrt{2}\upsilon_{\Lambda,max}$ **β)** $\upsilon_{K,max} = \sqrt{3}\upsilon_{\Lambda,max}$ **γ)** $\upsilon_{K,max} = 2\upsilon_{\Lambda,max}$

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις, δικαιολογώντας τις επιλογές σας.

2. Πάνω σε χορδή που έχει και τα δύο άκρα της στερεωμένα δημιουργείται στάσιμο κύμα με τέσσερις δεσμούς, εξαιτίας της συμβολής δύο κυμάτων με συχνότητα f_1. Αν η συχνότητα των κυμάτων γίνει f_2, δημιουργείται στάσιμο κύμα με επτά δεσμούς. Ο λόγος f_1/f_2 των δύο συχνοτήτων είναι:

α) 2 **β)** 1/2 **γ)** 4/7 **δ)** 7

3. Πάνω σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οχ δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο Ο (χ=0). Δύο σημεία της χορδής βρίσκονται στις θέσεις $x_1=\lambda/3$ και $x_2=7\lambda/6$ αντίστοιχα.

Α) Ο λόγος των απομακρύνσεών τους y_1/y_2 την ίδια στιγμή είναι:

α) 1 **β)** -1 **γ)** 2 **δ)**-2

Β) Η διαφορά φάσης τους την ίδια στιγμή είναι:

α) 0 **β)** π **γ)** π/2 **δ)** π/3

4. Σε χορδή μεγάλου μήκους που ταυτίζεται με τον άξονα x΄Ox διαδίδεται αρμονικό κύμα με αποτέλεσμα ένα σημείο Κ της χορδής να ταλαντώνεται με ενέργεια Ε. Από κάποια χρονική στιγμή και μετά αρχίζει να διαδίδεται στη χορδή ένα δεύτερο αρμονικό κύμα, όμοιο με το πρώτο, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το σημείο Κ συνεχίζει να ταλαντώνεται με την ίδια ενέργεια Ε και μάλιστα είναι το 4^o σημείο του θετικού ημιάξονα που η ενέργειά του παρέμεινε σταθερή και μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος. Η απόσταση μεταξύ της θέσης ισορροπίας του Κ και της πλησιέστερης σε αυτό κοιλίας είναι:

α) λ **β)** λ/3 **γ)** λ/6

5. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x΄Ox έχει δημιουργηθεί εξαιτίας της συμβολής δύο αρμονικών κυμάτων με μήκος κύματος λ, στάσιμο κύμα. Αν $υ_{Kmax}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ (x_K=+2,5λ) , τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ζ (x_Z=+λ/6) ,τη στιγμή που το σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα είναι:

α) - $υ_{Kmax}$ **β)** + $υ_{Kmax}$ /2 **γ)** - $υ_{Kmax}$ /2

Ερωτήσεις ανάπτυξης

6. Πάνω σε χορδή κιθάρας μήκους L δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στο μέσο της Μ. Αν υ είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που συμβάλλουν και f είναι η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$f = (N + 1/2).\frac{\upsilon}{L}, \quad N = 0,1,2,3, \ldots$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Κατά μήκος ενός σχοινιού σχηματίζεται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση y=10συν(πx/10)ημ(5πt) (x,y→cm, t→s).

α) Να γραφούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο κύμα.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων

γ) Να βρεθεί η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου που βρίσκεται στη θέση x=30cm τη χρονική στιγμή t=1,7 s.

Απ. β) υ=50cm/s γ) y=-10cm

2. Κατά μήκος ενός σχοινιού σχηματίζεται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση y=20συν(πx/30)ημ40πt (x,y→cm, t→s).

α) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση x=60cm.

β) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της ταλάντωσης του σημείου Ν που βρίσκεται στη θέση x=20cm κατά τη χρονική στιγμή t=0,6875s. ($\pi^2=10$)

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του σχοινιού στο θετικό ημιάξονα τη χρονική στιγμή t=0,6875s.

Απ: α) Α=20cm β) α=-1600m/s²

3. Δύο κύματα που διαδίδονται ταυτόχρονα κατά μήκος ενός σχοινιού προς αντίθετες κατευθύνσεις συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Το κύμα που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση έχει εξίσωση:

$$y=3\eta\mu 2\pi\left(250t-\frac{x}{24}\right) \quad (x,y\rightarrow cm\ ,\ t\rightarrow s)$$

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x=0) μια κοιλία και ως αρχή μέτρησης των χρόνων (t=0) τη στιγμή που η φάση της ταλάντωσης του σημείου x=0 είναι φ=0.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση

β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας ενός σημείου του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση x=60cm

Απ: α) y=3ημ2π(250t+x/24) (x,y→cm,t→s)

β)y=0,06ημ(500πt+π) ,v=30π συν(500πt+π) (S.I)

4. Κατά μήκος μιας χορδής μεγάλου μήκους, η οποία ταυτίζεται με τον άξονα xOx΄ διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα με εξισώσεις y_1=0,05ημ2π(4t-2x) (SI) και y_2=0,05ημ2π(4t+2x) (SI).

α) Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται.

β) Να αποδειχτεί ότι στο σημείο Ο (x=0) δημιουργείται κοιλία.

γ) Να υπολογιστεί το πλάτος η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x_1=+\frac{1}{3}$ m.

δ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου Κ από τον πλησιέστερο δεσμό.

(Δίνεται: $π^2$=10)

Απ: α) y=0,1συν(4πx)ημ8πt (SI), γ) Α΄=0,05m, $υ_{max}$=0,4π m/s, $α_{max}$=32m/s^2, (δ) Δx=1/24 m

5. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα xOx΄ διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους. Τα κύματα διαδίδονται προς αντίθετη κατεύθυνση και συμβάλλοντας δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση y=0,4συν2πxημ4πt (SI).

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης σ' αυτόν κοιλίας.

γ) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ ($x=\frac{2}{3}$ m).

(Δίνεται: $π^2$=10)

Απ: α) y_1=0,2ημ2π(2t-x), y_2=0,2ημ2π(2t+x) (SI),

β) $d_{Δ\text{-}Κ}$=0,25m, γ) υ=0,8πσυν(4πt+π) (SI), α=-32ημ(4πt+π) (SI))

6. Γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο εκτείνεται πάνω στον άξονα x΄x. Δύο σημεία του Α και Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση 20cm και αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με την ίδια συχνότητα f=5Hz και πλάτος A=4cm. Κατά μήκος του ελαστικού μέσου διαδίδονται τα δύο ημιτονοειδή κύματα που παράγονται λόγω της ταλάντωσης των σημείων Α και Β. Το μήκος κύματος είναι λ=4cm. Θεωρούμε αρχή του άξονα x΄x το μέσο Ο της απόστασης ΑΒ, με το Α αριστερά και το Β δεξιά. Επίσης θεωρούμε αρχή του χρόνου, τη στιγμή κατά την οποία τα κύματα συναντώνται στο Ο και είναι για το σημείο Ο, y=0 και υ>0.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

β) Να βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που σχηματίζονται, ανάμεσα στα Α και Β.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης για τη δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία μετά το Ο.

Απ: α) $y=8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t \;\; (x,y \to cm, t \to s)$, *β)* $x_\Delta=(2\kappa+1)cm$, $-5 \le \kappa \le 4$, $x_K=2\kappa\ cm$, $-5 \le \kappa \le 5$, *γ)* $y=8\eta\mu 10\pi t \;\; (y \to cm, t \to s)$

7. Δύο όμοια γραμμικά αρμονικά κύματα, πλάτους A=2cm και συχνότητας f=100Hz διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε ένα ελαστικό μέσο που θεωρείται ο ημιάξονας Ox, με ταχύτητα υ=30m/s. Έστω ότι στη θέση x=0 (σημείο Ο) υπάρχει κοιλία και τη στιγμή t=0 ισχύει y=0 και v>0.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης για τον πρώτο δεσμό και τη δεύτερη κοιλία.

β) Να βρεθούν οι θέσεις των δύο υλικών σημείων ανάμεσα στη πρώτη και στη δεύτερη κοιλία, όπου το καθένα έχει ενέργεια ταλάντωσης ίση με το 75% της ενέργειας ταλάντωσης των κοιλιών.

Απ: α) y=0, y=4ημ(200πt+π) $(y \to cm)$, β) x=2,5cm, x=12,5cm

8. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα xOx΄ δημιουργείται στάσιμο κύμα μέγιστου πλάτους 0,2m και συχνότητας f=5Hz.

Στο σημείο Ο ($x=0$) σχηματίζεται κοιλία, ενώ ο πλησιέστερος δεσμός στο σημείο Ο απέχει από το σημείο αυτό απόσταση $x_1=0,1m$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β) Σημείο Ζ βρίσκεται στη θέση $x_2=+0,65m$. Να βρείτε τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που σχηματίζονται στο τμήμα ΟΖ.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx, τη στιγμή που τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας και το σημείο Ο στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του.

δ) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του σημείου Ζ ($x_2=+0,65m$) και ενός σημείου Θ ($x_3=+0,75m$) την ίδια στιγμή.

ε) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της συχνότητας των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα, ώστε στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΖ να σχηματίζεται ο διπλάσιος αριθμός δεσμών από αυτόν που βρήκατε στο ερώτημα (β), παραμένοντας κοιλία στο Ο.

Απ: (Α) υ=2m/s, (β) 4 κοιλίες, 3 δεσμοί, (δ) Δφ=π rad, (ε) $f_{min}=110/13$ *Hz*

9. Κατά μήκος γραμμικού μέσου το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα x΄x, δημιουργείται στάσιμο κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y=6\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\eta\mu 10\pi t \quad (x, y \to cm, t \to s).$$

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προκύπτει το στάσιμο κύμα.

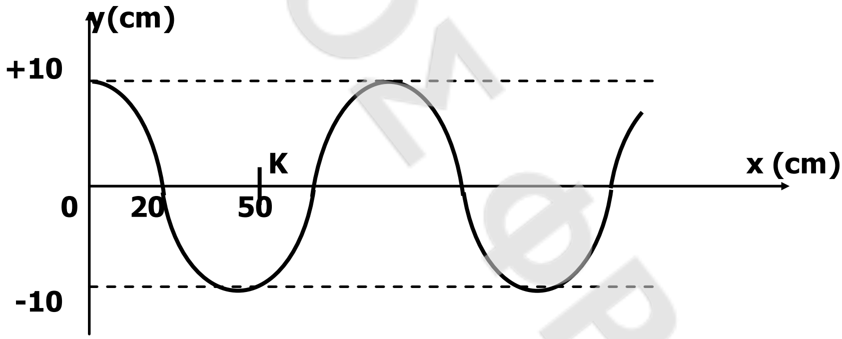
β) Πόσο είναι το πλάτος ταλάντωσης δύο σημείων Α, Β του μέσου, τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $x_1=-25cm$ και $x_2=+25cm$ αντίστοιχα;

γ) Πόσες κοιλίες σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Α, Β;

δ) Μεταβάλλουμε κατάλληλα τη συχνότητα των συμβαλλόντων κυμάτων οπότε δημιουργείται κατά μήκος του ελαστικού μέσου ένα νέο στάσιμο κύμα. Διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των σημείων Α και Β σχηματίζεται μία κοιλία λιγότερη. Δεδομένου ότι η κινητική κατάσταση των σημείων Α και Β δεν άλλαξε, ποιο είναι το νέο μήκος κύματος και η νέα περίοδος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα;

Απ: α) $y_1=3\eta\mu 2\pi(5-\frac{x}{20})$, $y_2=3\eta\mu 2\pi(5t+\frac{x}{20})$ $(x, y \rightarrow cm)$, *β) 0m, γ) 5 κοιλίες, δ)* $\lambda'=25cm$, $T'=0{,}25s$

10. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος, όταν τα μόρια της χορδής έχουν μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης. Η συχνότητα των τρεχόντων κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προήλθε το στάσιμο κύμα είναι f=40Hz.



α) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ που απέχει 50cm από το Ο.

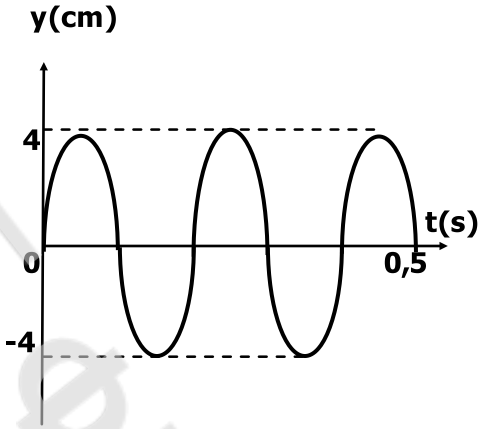
γ) i) Να βρεθεί η απομάκρυνση του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του, όταν έχει ταχύτητα ίση με το μισό της μέγιστης ταχύτητάς του.
ii) Πόσο είναι το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Κ αυτή τη στιγμή;

δ) Έστω Λ σημείο της χορδής το οποίο είναι το πλησιέστερο σημείο αριστερά του Κ που ταλαντώνεται με πλάτος, ίσο με το πλάτος καθενός από τα κύματα που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα. Πόση είναι η απόσταση των θέσεων ισορροπίας των σημείων Κ και Λ;

Απ. *α)* $y=10\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\chi}{40}\eta\mu 80\pi t$ *(x,y cm)* *β)* $A'=5\sqrt{2}$ *cm* *γ) i)* $\pm\frac{5\sqrt{6}}{2}$ *m*

ii) 3 *δ)* $d=\frac{70}{3}$ *cm*

11. Μια τεντωμένη χορδή ΟΑ μήκους L εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα Οχ. Το δεξιό άκρο Α είναι στερεωμένο στη θέση x=L ενώ το αριστερό άκρο Ο που βρίσκεται στη θέση x=0 είναι ελεύθερο έτσι ώστε με κατάλληλο τρόπο να δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση x=0. Κάποια χρονική στιγμή t_1 μια κοιλία έχει απομάκρυνση y=4cm και ταχύτητα ταλάντωσης $\upsilon=32\pi\sqrt{3}$cm/s.



Σε απόσταση d_1=0,25cm αριστερά του πρώτου δεσμού υπάρχει ένα σημείο Λ της χορδής το οποίο ταλαντώνεται με απομάκρυνση η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με το διπλανό διάγραμμα.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης των κοιλιών του στάσιμου κύματος

β) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ των κυμάτων, από τη συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο κύμα.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος L της χορδής αν γνωρίζετε ότι σε αυτή έχουν δημιουργηθεί 10 κοιλίες.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_2=49/48s.

ε) Να γράψετε τη χρονική συνάρτηση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου Σ τη χορδής που βρίσκεται στη θέση $x_Σ$=8cm.

στ) Να υπολογίσετε το λόγο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης ενός σημείου Μ της χορδής, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση d_2=1cm δεξιά της τρίτης κοιλίας τη χρονική στιγμή t_2=49/48 s.

Απ: α. Α΄=8cm, β. λ=3cm, γ. L=14,25cm, ε. υ=0,32πσυν(8πt+π) (S.I), στ. U/K=1/3

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Γενικά

✓ Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ένα εγκάρσιο κύμα που οφείλεται στην ταυτόχρονη διάδοση ενός μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου(ηλεκτρικό κύμα) και ενός μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου(μαγνητικό κύμα) τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα δύο κύματα έχουν την ίδια συχνότητα και μακριά από την πηγή της εκπομπής τους έχουν την ίδια φάση, πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του χώρου οι εντάσεις των δύο πεδίων παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες τιμές τους. Κοντά στην κεραία που εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπάρχει διαφορά φάσης $\Delta\varphi=90^0$ ανάμεσα στην ταλάντωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και στην ταλάντωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή όταν η μια ένταση γίνεται μέγιστη η άλλη μηδενίζεται.

✓ Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στην ύλη αλλά και στο κενό με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός. Δηλαδή στο κενό είναι $c=3.10^8$ m/s και στην ύλη είναι $u<c$.

✓ Σε κάθε σημείο και σε κάθε χρονική στιγμή το πηλίκο των εντάσεων των δύο πεδίων είναι σταθερό και ίσο με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο μέσο.

$$\frac{E}{B}=c \text{ (στο κενό) , } \frac{E}{B}=u \text{ (στην ύλη)}$$

Προφανώς η ίδια σχέση θα ισχύει και για τα πλάτη των δύο εντάσεων.

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}}=c \text{ (στο κενό) , } \frac{E_{\max}}{B_{\max}}=u \text{ (στην ύλη)}$$

✓ Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα παράγεται από την επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων (π.χ από το εναλλασσόμενο ρεύμα που δημιουργείται κατά τη διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης σε κύκλωμα LC).

Εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού κύματος

✓ Για ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα Ox και με την προϋπόθεση ότι φτάνει στην αρχή του άξονα τη στιγμή t=0 ισχύουν οι εξισώσεις:

$$E=E_{max}ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad B=B_{max}ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

	Περιοχή φάσματος	**Μήκος κύματος**	**Τρόπος δημιουργίας**	**Χρήσεις, ιδιότητες**
1	Ραδιοκύματα	10^5m έως μερικά εκατοστά	Ηλεκτρικά κυκλώματα (LC)	Σε ραδιοφωνία και τηλεόραση.
2	Μικροκύματα	30cm έως 1mm	Ηλεκτρονικά κυκλώματα	Σε φούρνους μικροκυμάτων και σε ραντάρ.
3	Υπέρυθρο	1mm έως 700nm	Θερμά σώματα	Απορροφάται εύκολα από τα σώματα και τα θερμαίνει.
4	Ορατό	700nm έως 400nm	Από ανακατανομή των ηλεκτρονίων των ατόμων (αποδιεγέρσεις).	Προκαλεί την όραση.
5	Υπεριώδες	400nm έως 60nm	Από ανακατανομή των ηλεκτρονίων των ατόμων (αποδιεγέρσεις). Σημαντική πηγή είναι ο Ήλιος.	Προκαλεί το μαύρισμα του δέρματος.
6	Ακτίνες X	10^{-8}m έως 10^{-13}m	Επιβράδυνση ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων αλλά και αποδιεγέρσεις ατόμων.	Στην ιατρική (ακτινογραφίες), αλλά και στη μελέτη της δομής των κρυστάλλων.

7	Ακτίνες γ	10^{-10}m έως 10^{14}m	Ραδιενεργοί πυρήνες, πυρηνικές αντιδράσεις, διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων.	Αποστείρωση εργαλείων και τροφίμων. Επικίνδυνες για τον άνθρωπο.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

✓ **Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δίνουν φαινόμενα συμβολής, όπως και τα μηχανικά κύματα (π.χ. δημιουργούν στάσιμο κύμα)**

✓ **Όταν δίνεται η εξίσωση του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και μας ζητείται να βρούμε αν το κύμα διαδίδεται στο κενό:**

α) Βρίσκουμε από την εξίσωση τα μεγέθη λ και f

β) Υπολογίζουμε το γινόμενο λ.f. Αν $\lambda.f=3.10^8$ m/s τότε το κύμα διαδίδεται στο κενό. Αν $\lambda.f<3.10^8$ m/s τότε το κύμα διαδίδεται στην ύλη.

✓ **Όταν δίνονται οι εξισώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και μας ζητείται να βρούμε αν το κύμα διαδίδεται στο κενό:**

α) Βρίσκουμε από την εξίσωση τα μεγέθη λ και f και υπολογίζουμε το γινόμενο λ.f. Πρέπει $\lambda.f=3.10^8$ m/s.

β) Επιπλέον πρέπει να ισχύει και $E_{max}/B_{max}=c$.

✓ **Για να ακούσουμε ένα σταθμό στο ραδιόφωνο πρέπει να συμβεί το φαινόμενο του συντονισμού μεταξύ του κυκλώματος LC του ραδιοφώνου (δέκτης) και του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός (πομπός). Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:**

$$f_{\kappa\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

✓ **Για να διαπιστώσουμε αν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στο ορατό φάσμα (φως) πρέπει να γνωρίζουμε το μήκος κύματος στο κενό λ_0 και στη συνέχεια να ελέγξουμε αν ικανοποιείται η ανισότητα $400nm \leq \lambda_0 \leq 700nm$.**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε οπτικό μέσο (A). Η χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος είναι

$$E = 0{,}06\eta\mu 2\pi(2.10^{14}\mathbf{t} - \frac{1}{6}.10^{7}\mathbf{x}) \quad (S.I)$$

Ενώ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος αυτού στο κενό είναι $c=3.10^8$ m/s.

1) Η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου αυτού του κύματος είναι:

α) 5.10^{-10} T **β)** 2.10^{-10} T **γ)** 18.10^{-10} T

2) Το ηλεκτρομαγνητικό αυτό κύμα ανήκει:

α) στο ορατό φάσμα

β) στο υπεριώδες φάσμα

γ) στο υπέρυθρο φάσμα

2. Δύο πομποί ραδιοφωνικών κυμάτων εκπέμπουν σε μήκη κύματος λ_1=120m και λ_2=300m, αντίστοιχα. Ένας δέκτης έχει ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,2mH και μεταβλητό πυκνωτή που η χωρητικότητά του μπορεί να πάρει τιμές από 50pF έως 200pF. Μεταβάλλοντας τη χωρητικότητα του πυκνωτή μπορούμε να ακούσουμε:

α) τον πρώτο πομπό

β) τον δεύτερο πομπό

γ) και τους δύο πομπούς.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό κατά μήκος του άξονα x΄x. Η εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος είναι η:

$$E=10ημπ(10^{15}t-\frac{x}{2\lambda}) \ (SI).$$

α) Να εξετάσετε αν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει μήκος κύματος που ανήκει στο ορατό φάσμα.

β) Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κύματος.

(Δίνεται: $c=3\cdot10^8$m/s)

Απ: α) λ=600nm (ορατό), *β)* $B=\frac{10^{-7}}{3}ημ2π(5\cdot10^{14}-\frac{10^7}{6}x)$ *(SI)*

2. Δύο ραδιοκύματα με συχνότητες f_1=90MHz και f_2=100MHz διαδίδονται στον αέρα και διεγείρουν την κεραία ενός δέκτη. Η κεραία βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με ιδανικό κύκλωμα L-C που έχει $L=\frac{10^{-5}}{\pi^2}$ H και πυκνωτή μεταβλητής χωρητικότητας που αρχικά έχει $C=2{,}25\cdot10^{-12}$F.

α) Να διερευνήσετε αν ο δέκτης συντονίζεται με τα ραδιοκύματα συχνότητας f_1.

β) Να υπολογίσετε κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή, ώστε ο δέκτης να συντονιστεί με τα ραδιοκύματα συχνότητας f_2.

Απ: α) όχι, *β)* $+0{,}25\cdot10^{-12}$*F,*

3. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας $f=10^{14}$ Hz διαδίδεται σε υλικό μέσο κατά μήκος του άξονα x΄Ox. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E_{max}=2.10^6$ V/m, ενώ η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι $B_{max}=10^{-2}$ T.

α) Να υπολογίσετε τη ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο υλικό μέσο.

β) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου.

γ) Αν το κύμα διαδιδόταν στο κενό θα είχε μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά 10% μικρότερη από αυτή που δίνεται παραπάνω.
i) Να υπολογίσετε πόσο τοις εκατό μικρότερη θα ήταν η μέγιστη ένταση του μαγνητικού πεδίου.
ii) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό.
Δίνεται $c=3.10^8$ m/s.
Απ. α) $\upsilon=2.10^8$ *m/s*
β) $E=2.10^6 ημ2π(10^{14}t - 5.10^5x)$ (S.I) , $B=10^{-2}ημ2π(10^{14}t - 5.10^5x)$ (S.I)
γ) i) 40% ii) $E=1,8.10^6 ημ2π(10^{14}t - \frac{10^6}{3}x)$ (S.I)

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ

Γενικά για την ανάκλαση

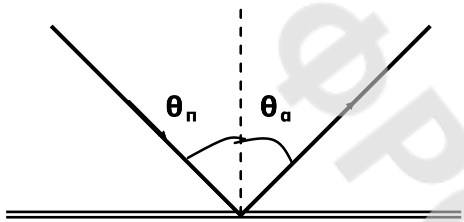
✓ Όταν το φως (αλλά και οποιοδήποτε άλλο κύμα) που διαδίδεται σ' ένα μέσο συναντήσει την διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σ' αυτό το μέσο και σε ένα άλλο, τότε ένα μέρος του αλλάζει διεύθυνση και επιστρέφει στο αρχικό μέσο διάδοσης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ανάκλαση** και διακρίνεται σε i) **κατοπτρική ανάκλαση** και ii) **διάχυση.**

Νόμος της ανάκλασης

✓ Η προσπίπτουσα ακτίνα η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετος στην επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

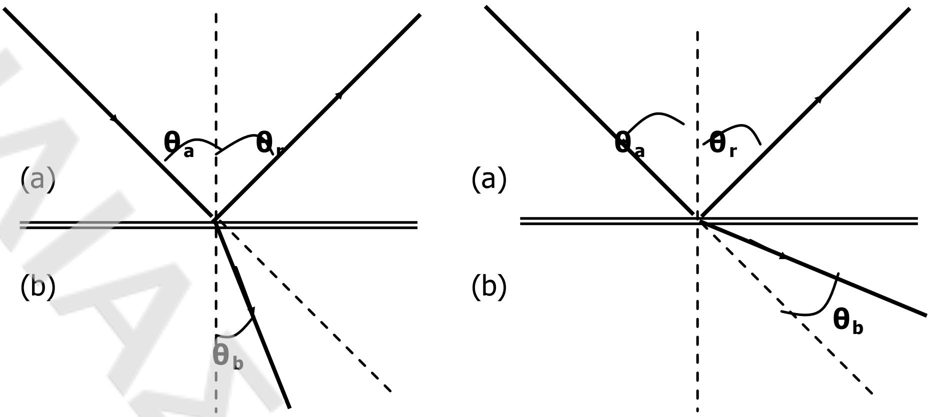
✓ Η γωνία ανάκλασης ($\theta_α$) είναι ίση με την γωνία πρόσπτωσης ($\theta_π$), δηλαδή:

$$\boldsymbol{\theta_α = \theta_π}$$



Γενικά για την διάθλαση

✓ Όταν το φως (αλλά και οποιοδήποτε άλλο κύμα) που διαδίδεται σ' ένα μέσο συναντήσει την διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σ' αυτό το μέσο και σε ένα άλλο στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα, τότε ένα μέρος του ανακλάται και το υπόλοιπο **διαθλάται**, δηλαδή διαδίδεται στο δεύτερο μέσο αλλάζοντας διεύθυνση.



Δείκτης διάθλασης

✓ **Δείκτης διάθλασης** (n) ενός οπτικού μέσου ονομάζεται το πηλίκο της ταχύτητας του φωτός στο κενό (c) προς την ταχύτητα του φωτός στο μέσο (u). Δηλαδή: $n=\frac{c}{u}$

Ο δείκτης διάθλασης είναι καθαρός αριθμός και εξαρτάται από το οπτικό μέσο και το μήκος κύματος του φωτός.

✓ Για την ύλη (u<c) είναι n>1 και για το κενό είναι n=1.

✓ Αν εφαρμόσουμε τη σχέση ορισμού του δείκτη διάθλασης για δύο οπτικά μέσα (1) και (2) και στη συνέχεια διαιρέσουμε κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{u_2}{u_1}$$

<u>Αν $u_1>u_2$ τότε $n_1<n_2$.</u> Δηλαδή όσο πιο γρήγορα διαδίδεται το φώς σε ένα υλικό τόσο πιο μικρός είναι ο δείκτης διάθλασης του και το υλικό αυτό χαρακτηρίζεται **οπτικά αραιότερο** σε σχέση με το άλλο.

<u>Αν $u_1<u_2$ τότε $n_1>n_2$.</u> Δηλαδή όσο πιο αργά διαδίδεται το φώς σε ένα υλικό τόσο πιο μεγάλος είναι ο δείκτης διάθλασης του και το υλικό αυτό χαρακτηρίζεται **οπτικά πυκνότερο** σε σχέση με το άλλο.

Νόμος της διάθλασης (νόμος του Snell)

✓ Η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη ακτίνα και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων στο σημείο πρόσπτωσης βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Ισχύει η σχέση: $n_a.ημθ_a = n_b.ημθ_b \Leftrightarrow \dfrac{ημθ_a}{ημθ_b} = \dfrac{n_b}{n_a}$ (νόμος του Snell)

✓ Η ακτινοβολία που αποτελείται από ένα μόνο μήκος κύματος λέγεται **μονοχρωματική.**

Συμπεράσματα που προκύπτουν από το νόμο του Snell

✓ Αν μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός πέσει κάθετα ($θ_a=0$) στην διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων συνεχίζει την διάδοσή της στο δεύτερο μέσο χωρίς να αλλάξει πορεία ($θ_b=0$).

✓ Αν το φως διέρχεται από οπτικά αραιότερο μέσο (π.χ αέρας) σε οπτικά πυκνότερο μέσο (π.χ νερό) τότε η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει την κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης ($θ_b < θ_a$).

✓ Αν το φως διέρχεται από οπτικά πυκνότερο μέσο (π.χ νερό) σε οπτικά αραιότερο μέσο (π.χ αέρας) τότε η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης ($θ_b > θ_a$).

✓ Η πορεία που ακολουθεί μια ακτίνα είναι η ίδια είτε αυτή μεταβαίνει από το μέσο (1) στο μέσο (2) είτε αντίστροφα.

Πως μεταβάλλεται το μήκος κύματος όταν το φως αλλάζει μέσο διάδοσης.

✓ Αν εφαρμόσουμε την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής για τα δύο μέσα διάδοσης (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη ότι η συχνότητα δεν μεταβάλλεται και στη συνέχεια διαιρέσουμε κατά μέλη προκύπτει: $\frac{u_1}{u_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

και επειδή $\frac{n_2}{n_1}=\frac{u_1}{u_2}$ προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

✓ **Επομένως όταν μια μονοχρωματικά ακτίνα διέρχεται από οπτικά αραιότερο μέσο σε οπτικά πυκνότερο μέσο το μήκος κύματός της (όπως και η ταχύτητα διάδοσης) μικραίνει. Το αντίθετο συμβαίνει αν το φως διέρχεται από οπτικά πυκνότερο μέσο σε οπτικά αραιότερο.**

Πως μεταβάλλεται το μήκος κύματος όταν το φως μεταβαίνει από το κενό ή τον αέρα σε κάποιο οπτικό μέσο.

✓ Αν εφαρμόσουμε την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής για τα δύο μέσα διάδοσης λαμβάνοντας υπόψη ότι η συχνότητα δεν μεταβάλλεται και στη συνέχεια διαιρέσουμε κατά μέλη προκύπτει: $\frac{c}{u}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$ και επειδή είναι

n= $\frac{c}{u}$ προκύπτει ότι: n= $\frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{\lambda_0}{n}$

✓ **Επομένως όταν μια μονοχρωματική ακτινοβολία μεταβαίνει από το κενό ή τον αέρα σε κάποιο οπτικό μέσο, το μήκος κύματος της ακτινοβολίας ελαττώνεται.**

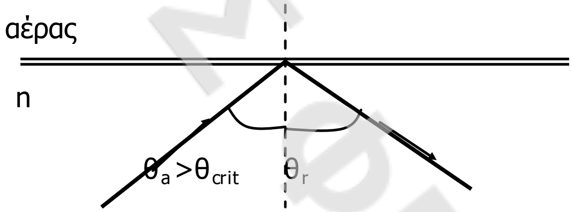
<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης δεν συμβαίνουν μόνο στα φωτεινά κύματα αλλά είναι κοινά σε όλα τα είδη κυμάτων, μηχανικά και ηλεκτρομαγνητικά.

Πότε συμβαίνει ολική ανάκλαση

✓ Για να συμβεί το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης πρέπει να ισχύουν οι εξής δύο προϋποθέσεις:
α) Το φως να πέσει πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων προερχόμενο από το οπτικά πυκνότερο μέσο, δηλαδή $\mathbf{n_a>n_b}$.(π.χ. από το νερό προς τον αέρα)
β) Η γωνία πρόσπτωσης να είναι μεγαλύτερη από μια τιμή που λέγεται **κρίσιμη γωνία (θ_{crit})** ή **οριακή γωνία.**

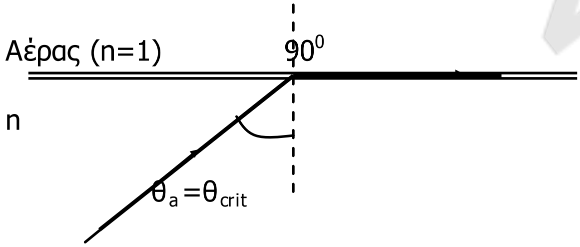
Τι είναι ολική ανάκλαση

✓ Όταν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η ακτίνα παθαίνει μόνο ανάκλαση χωρίς κάποιο μέρος της να πάθει διάθλαση και να περάσει έτσι στο επόμενο μέσο διάδοσης. Τότε λέμε ότι συμβαίνει **ολική ανάκλαση.**



Υπολογισμός της κρίσιμης γωνίας

✓ Όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την κρίσιμη γωνία τότε η διαθλώμενη ακτίνα είναι παράλληλη με την διαχωριστική επιφάνεια. Επομένως όταν $\theta_a=\theta_{crit}$ τότε $\theta_b=90^0$, οπότε συμβαίνει οριακά διάθλαση.



από το νόμο του Snell έχουμε:

$$n_a.ημθ_a = n_b.ημθ_b \Rightarrow n_a.ημθ_{crit} = n_b \Rightarrow ημθ_{crit} = \frac{n_b}{n_a} \Rightarrow ημθ_{crit} = \frac{1}{n}.$$

Προφανώς η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για $n_a < n_b$, διαφορετικά θα έδινε $ημθ_{crit} > 1$ που είναι αδύνατον.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

✓ Στο φαινόμενο της διάθλασης οφείλονται ορισμένες οφθαλμαπάτες. Έτσι όπως μπορούμε εύκολα να δείξουμε, όταν είμαστε έξω από το νερό και κοιτάμε ένα αντικείμενο που βρίσκεται μέσα στο νερό, αυτό φαίνεται πιο κοντά στην επιφάνεια. Αλλά και όταν είμαστε μέσα στο νερό και κοιτάμε ένα αντικείμενο που βρίσκεται έξω από το νερό, αυτό φαίνεται πιο ψηλά από ότι είναι στην πραγματικότητα.

✓ Όταν μια ακτινοβολία μεταβαίνει από ένα μέσο Α σε ένα άλλο μέσο Β διαθλάται, εκτός αν:

- Οι δείκτες διάθλασης είναι ίσοι ($η_Α = η_Β$).
- Η ακτινοβολία πέφτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια.

✓ Έστω ότι μια μονοχρωματική ακτινοβολία μεταβαίνει από ένα μέσο Α σε ένα άλλο μέσο Β. Τότε ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\frac{\boldsymbol{\eta_A}}{\boldsymbol{\eta_B}} = \frac{\boldsymbol{\eta\mu\theta_B}}{\boldsymbol{\eta\mu\theta_A}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon_B}}{\boldsymbol{\upsilon_A}} = \frac{\boldsymbol{\lambda_B . f}}{\boldsymbol{\lambda_A . f}}$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Μονοχρωματική ακτινοβολία διέρχεται διαδοχικά από δύο οπτικά μέσα (Α) και (Β) τα οποία έχουν δείκτες διάθλασης n_A και n_B αντίστοιχα. Ισχύει $\left(\frac{E_{max}}{B_{max}}\right)_A=2\left(\frac{E_{max}}{B_{max}}\right)_B$.

Α) Το πηλίκο των μηκών κύματος της ακτινοβολίας $\frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ στα δύο οπτικά μέσα ισούται με:

α) 2 **β)** 4 **γ)** 8

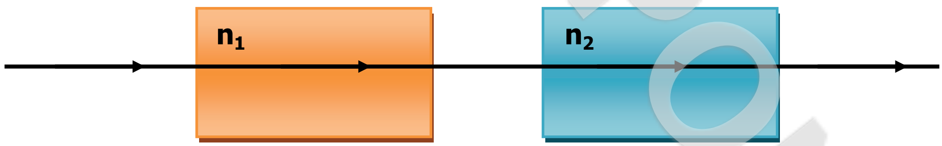
Β) Αν η μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων υπό γωνία 60^0 ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια, διερχόμενη από το (Β) προς το (Α), τότε:

α) θα διαθλαστεί προς το οπτικό μέσο (Α) υπό γωνία 30^0

β) θα διαθλαστεί προς το οπτικό μέσο (Α) υπό γωνία 90^0

γ) θα υποστεί ολική ανάκλαση.

2. Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός διέρχεται πρώτα από μια πλάκα πάχους d και υλικού με δείκτη διάθλασης n_1 και στη συνέχεια από μια άλλη πλάκα ίδιου πάχους και υλικού με δείκτη διάθλασης n_2. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τότε η διαφορά του χρόνου κίνησης στις δύο πλάκες είναι:

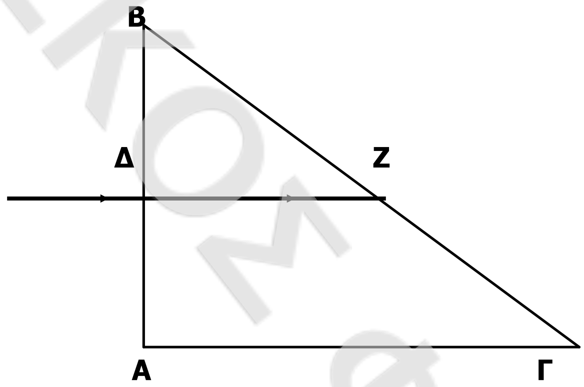


α) $\Delta t=\frac{d}{c}.(n_2-n_1)$ β) $\Delta t=\frac{2d}{c}.(n_2-n_1)$ γ) Δt=0

3. Δύο οπτικά μέσα έχουν για μια ακτινοβολία δείκτες διάθλασης $n_1=\sqrt{2}$ και $n_2=2$. Μια λεπτή δέσμη αυτής της ακτινοβολίας προερχόμενη από το οπτικά πυκνότερο μέσο, πέφτει με γωνία πρόσπτωσης 60^0 στη διαχωριστική επιφάνεια με το οπτικά αραιότερο. Τότε θα συμβεί:

α) διάθλαση
β) ολική ανάκλαση
γ) οριακά διάθλαση
δ) τίποτα από τα παραπάνω

4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εγκάρσια τομή ενός πρίσματος με δείκτη διάθλασης n το οποίο βρίσκεται στον αέρα. Η γωνία $\hat{B}$ ισούται με φ, η γωνία $\hat{\Gamma}$ ισούται με θ, ενώ η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. Μονοχρωματική ακτίνα πέφτει κάθετα στο πρίσμα στο σημείο Δ και στη συνέχεια πέφτει στην υποτείνουσα του πρίσματος στο σημείο Ζ.



1) Αν $φ=60^0$ τότε η μέγιστη τιμή του δείκτη διάθλασης ώστε να μη συμβαίνει ολική ανάκλαση στο σημείο Ζ είναι:

α) 2 **β)** $\sqrt{3}$ **γ)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) Αν n=2 τότε η μικρότερη τιμή της γωνίας θ για την οποία η ακτινοβολία δεν υφίσταται ολική ανάκλαση στο σημείο Ζ είναι:
α) 60^0 **β)** 45^0 **γ)** 30^0

5. Τα δύο πλακίδια του σχήματος αποτελούνται από δύο διαφανή υλικά Α, Β και έχουν το ίδιο πάχος d. Για την κρίσιμη γωνία του υλικού Β σε σχέση με τον αέρα ισχύει $\eta\mu\theta_{crit}^{(B)} = 5/8$, ενώ για τη κρίσιμη γωνία μεταξύ των δύο υλικών ισχύει $\eta\mu\theta_{crit}^{(AB)} = 8/9$. Τότε:

Α. α) $\upsilon_A<\upsilon_B$ και $\eta\mu\theta_{crit}^{(A)} = 5/9$

β) $\upsilon_A>\upsilon_B$ και $\boldsymbol{\eta\mu\theta_{crit}^{(A)} = 5/9}$

γ) $\upsilon_A>\upsilon_B$ και $\eta\mu\theta_{crit}^{(A)} = 5/7$

δ) $\upsilon_A<\upsilon_B$ και $\eta\mu\theta_{crit}^{(A)} = 5/7$

Β. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός πέφτει κάθετα στα δύο πλακίδια όπως στο σχήμα. Ο λόγος των χρόνων διέλευσης του φωτός από τα δύο πλακίδια είναι:

α) $t_A/t_B=64/65$ **β)** $t_A/t_B=8/9$ **γ)** $t_A/t_B=9/8$

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

6. Μονοχρωματική ακτινοβολία κατά τη μετάβασή τη από το μέσο (1) στο μέσο (2) διαθλάται. Η γωνία πρόσπτωσης θ_a είναι μεγαλύτερη από τη γωνία διάθλασης θ_b.

α) Η γωνία εκτροπής της ακτινοβολίας από την αρχική της διεύθυνση είναι $\theta_\varepsilon = \theta_a - \theta_b$.

β) Το μέσο (1) είναι οπτικά αραιότερο από το μέσο (2).

γ) Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο μέσο (2) είναι μεγαλύτερο από το μέσο (1).

δ) Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο μέσο (2) είναι μεγαλύτερη από το μέσο (1).

ε) Η ακτινοβολία παθαίνει ολική ανάκλαση.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια υγρού-αέρα προερχόμενη από τον αέρα. Η γωνία πρόσπτωσης είναι 60^o και η γωνία διάθλασης 30^o.

α) Να σχεδιάσετε την προσπίπτουσα και τη διαθλώμενη ακτίνα και να υπολογίσετε τη γωνία εκτροπής.

β) Να υπολογίσετε τον δείκτη διάθλασης του υγρού.

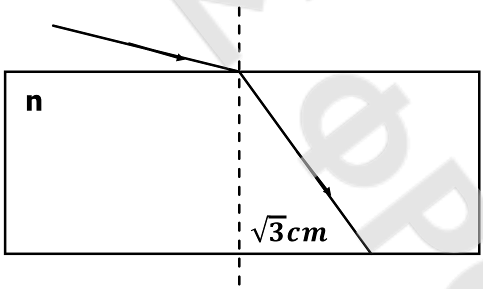
γ) Να βρείτε τη ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο υγρό.

δ) Αν η ίδια ακτινοβολία διαδίδεται από το υγρό στον αέρα να βρείτε τη γωνία πρόσπτωσης ώστε η ακτινοβολία να διέρχεται παράλληλα στη διαχωριστική επιφάνεια.

(Δίνονται: $c=3\cdot10^8 m/s$, $ημ35^o=\frac{\sqrt{3}}{3}$)

Απ: α) 30^o, β) $n=\sqrt{3}$, γ) $υ=\sqrt{3}\cdot10^8 m/s$, δ) $θ_α=35^o$

2. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός έχει στον αέρα μήκος κύματος $λ_0$=600nm και διαθλάται σε μια γυάλινη πλάκα με δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η γωνία διάθλασης είναι 30^0ν να βρείτε:



α) Τη γωνία πρόσπτωσης.

β) Τη γωνία εκτροπής.

γ) Το πάχος της πλάκας.

δ) Τη χρονική καθυστέρηση που προκαλεί η πλάκα στην ακτίνα.

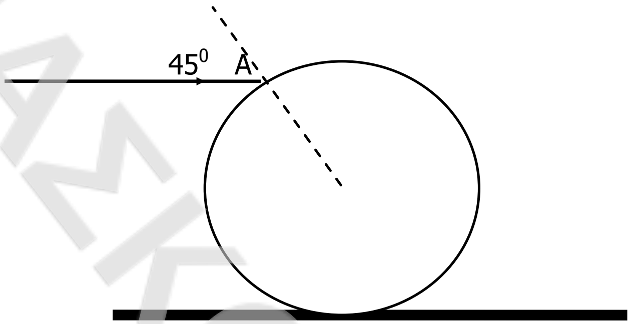
ε) Πόσα μήκη κύματος της ακτινοβολίας χωρέσανε μέσα στη πλάκα;

Δίνεται ότι $c=3.10^8 m/s$.

Απ. α) 60^0 β) 30^0 γ) 3cm

Όταν μια ακτίνα πέσει πάνω σε σφαιρική επιφάνεια, για τον προσδιορισμό των γωνιών πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης χρησιμοποιούμε την ακτίνα της σφαίρας στο σημείο πρόσπτωσης.

3. Οριζόντια μονοχρωματική ακτινοβολία φωτός προσπίπτει υπό γωνία 45^0 στο σημείο Α γυάλινης πλάκας με δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{2}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τη γωνία διάθλασης στο σημείο Α.
β) Η διαθλώμενη ακτίνα όταν συναντήσει την εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας στο σημείο Β, εξέρχεται και πάλι στον αέρα. Αφού σχεδιάσετε την πορεία της ακτίνας, να υπολογίσετε τη γωνία πρόσπτωσης και διάθλασης στο σημείο Β.
Απ. α) 30^0 β) 45^0, 60^0

4. Μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα προερχόμενη από το γυαλί. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο γυαλί ισούται με 500nm και όταν διέρχεται από το γυαλί στον αέρα μεταβάλλεται κατά 40%. Αν η γωνία διάθλασης ισούται με 45^o να υπολογίσετε:
α) τον δείκτη διάθλασης του γυαλιού
β) την ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο γυαλί
γ) τη γωνία πρόσπτωσης
(Δίνονται: $c=3{\cdot}10^8$m/s, $ημ45^o=0,7$)

Απ: α) $n=1,4$, β) $υ=\frac{15}{7}\cdot 10^8 m/s$, γ) 30^o

5. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός συχνότητας $f=5\cdot10^{14}Hz$, προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-γυαλιού. Το άθροισμα της γωνίας εκτροπής και της γωνίας διάθλασης είναι ίσο με τη γωνία πρόσπτωσης. Η γωνία εκτροπής είναι 30^o και ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $\sqrt{3}$.

α) Να εξετάσετε αν η ακτινοβολία διέρχεται από τον αέρα στο γυαλί ή αντίστροφα.
β) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο γυαλί.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία διάθλασης και τη γωνία ανάκλασης.
(Δίνεται: $c=3\cdot10^8 m/s$, ημ(α+β)=ημα.συνβ+συνα.ημβ)
Απ: α) αέρας $\rightarrow$ γυαλί, β) $\lambda=200\sqrt{3}$ nm, γ) $30^o, 60^o$

6. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στον αέρα έχει μήκος κύματος $\lambda=6\mu m$ και προσπίπτει στην επιφάνεια γυαλιού με δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{2}$. Η ανακλώμενη ακτίνα είναι κάθετη στην προσπίπτουσα ακτίνα. Να βρείτε:
α) το μήκος κύματος και τη ταχύτητα διάδοσης στο γυαλί
β) τη γωνία που σχηματίζει η διαθλώμενη με την ανακλώμενη ακτίνα
γ) τη μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο γυαλί αν η μέγιστη ένταση του μαγνητικού πεδίου στο ίδιο μέσο είναι $B_{max}=4\cdot10^{-11}T$.
Δίνεται: $c=3\cdot10^8 m/s$
Απ: (α) $\lambda=3\sqrt{2}\ \mu m$, $\upsilon=1,5\sqrt{2}\ 10^8 m/s$, (β) 105^o (γ) $E_{max}=6\sqrt{2}\ 10^{-3} V/m$

7. Λεπτή φωτεινή μονοχρωματική δέσμη προσπίπτει από τον αέρα σε γυάλινη πλάκα που έχει δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{3}$. Να υπολογιστεί η γωνία πρόσπτωσης ώστε η ανακλώμενη ακτίνα να είναι κάθετη στη διαθλώμενη.
Απ: 60^o

8. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με εξίσωση έντασης $E=0,12\eta\mu(\omega t-2\pi x)$ (SI) διαδίδεται στο κενό. Δύο σημεία Κ, Λ που βρίσκονται στην ευθεία διάδοσης του κύματος απέχουν μεταξύ τους 30m, με το σημείο Κ να βρίσκεται πιο κοντά στη πηγή του κύματος.

α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος.
β) Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το χρόνο.
γ) Κάποια χρονική στιγμή t_1 στο σημείο Κ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι E_1=+0,06V/m. Πόση είναι την ίδια στιγμή η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Λ.
δ) Παρεμβάλουμε μεταξύ των σημείων Κ και Λ μία χοντρή πλάκα πάχους 6m που αποτελείται από το υλικό με δείκτη διάθλασης n=2. Το κύμα πέφτει κάθετα πάνω στη πλάκα. Να υπολογίσετε:
i. τη χρονική καθυστέρηση που προκαλεί στη διέλευση του κύματος η τοποθέτηση της πλάκας
ii. τον αριθμό των μηκών κύματος που υπάρχουν μέσα στην πλάκα.
(Δίνεται: $c=3\cdot10^8$m/s)
Απ: α) λ=1m, β) $B=4\cdot10^{-10}ημ(6π10^8t-2πx)$, γ) $B=2\cdot10^{-10}T$, δ) (i) $2\cdot10^{-8}s$, (ii) 36

9. Στην ήρεμη επιφάνεια διαφανούς υγρού προσπίπτει από τον αέρα μονοχρωματική ακτίνα φωτός με γωνία πρόσπτωσης $θ_π$. Η γωνία ανάκλασης είναι 60^o και η γωνία μεταξύ ανακλώμενης και διαθλώμενης είναι 75^o. Να υπολογίσετε:
α) τον δείκτη διάθλασης του υγρού
β) την ταχύτητα διάδοση της ακτινοβολίας στο υγρό
Δίνεται: $c=3\cdot10^8$m/s
Απ: (α) $n=\sqrt{\frac{3}{2}}$, (β) $υ=\sqrt{6}\,10^8$m/s

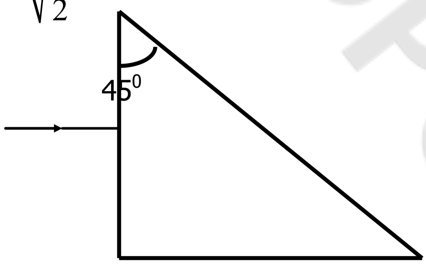
10. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει στην διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων (1) και (2) με δείκτες διάθλασης n_1=1,5 και n_2 αντίστοιχα, μεταβαίνοντας από το οπτικό μέσο (1) στο (2). Το μήκος κύματος στο μέσο (1) είναι $λ_1$=300nm, η γωνία πρόσπτωσης είναι 30^o ενώ η γωνία διάθλασης είναι 60^o. Η μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο (1) είναι E_{max}=0,02V/m. Να υπολογίσετε:
α) τη μέγιστη ένταση του μαγνητικού πεδίου κατά τη διάδοση του κύματος στο μέσο (1)
β) τον δείκτη διάθλασης του μέσου (2)

γ) την επί τις εκατό μεταβολή του μήκους κύματος κατά τη μετάβαση από το μέσο (1) στο μέσο (2). Στη συνέχεια να διερευνήσετε αν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα βρίσκεται στην περιοχή του ορατού φάσματος.
Δίνονται: $c=3\cdot10^8 m/s$, $\sqrt{3}=1,732$

Απ: α) $B_{max}=10^{-10}T$, *β) $n_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,* *γ) 73,2%, 450nm*

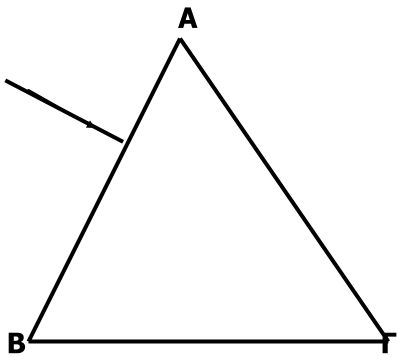
11. Μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $f=2.10^{10}$ Hz προσπίπτει από τον αέρα σε ορθογώνιο πλακίδιο πάχους $d=30\sqrt{3}$ cm και δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{2}$. Η γωνία πρόσπτωσης είναι 45^0.
α) Να σχεδιάσετε την πορεία της ακτίνας μέσα στο πλακίδιο και να υπολογίσετε τη γωνία διάθλασης. Θεωρείστε γνωστό ότι η ακτινοβολία εξέρχεται από την απέναντι πλευρά του πλακιδίου.
β) Πόσα μήκη κύματος της ακτινοβολίας υπάρχουν μέσα στο πλακίδιο;
Δίνεται $c=3.10^8$ m/s.
Απ: α) $θ=30^0$, *β) N=80*

12. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει στη μία έδρα ενός πρίσματος που η τομή του είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Αν ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $n=\sqrt{\frac{3}{2}}$ να υπολογίσετε:



α) τη γωνία διάθλασης και τη γωνία εκτροπής κατά την έξοδό της από το πρίσμα
β) την ελάχιστη τιμή του δείκτη διάθλασης που πρέπει να έχει το υλικό του πρίσματος ώστε η ακτίνα φωτός να διέρχεται εφαπτομενικά από την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου
Απ: α) 60^o, 15^o, *β) $\sqrt{2}$*

13. Η κύρια τομή ενός πρίσματος είναι ισόπλευρο τρίγωνο και ο δείκτης διάθλασής του είναι n=3/2. Μια μονοχρωματική δέσμη φωτός κινούμενη στον αέρα πέφτει κάθετα στην πλευρά ΑΒ του πρίσματος.



α) Να εξετάσετε αν η ακτίνα θα διαθλαστεί ή θα πάθει ολική ανάκλαση στη πλευρά ΑΓ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία εκτροπής της ακτίνας όταν βγαίνει από το πρίσμα.

Απ: α) ολική ανάκλαση *β) 60^0*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ,
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ,
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ,
ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ,
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ,
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ,
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ,
ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΤΣΙΑΡΔΑΚΛΗΣ ΘΕΟΛΟΓΟΣ - Φυσικός

ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στιγμιαία ταχύτητα

Θεωρούμε ένα σημειακό αντικείμενο που κινείται ευθύγραμμα πάνω στον άξονα x΄x και σε χρόνο dt έχει μετατοπιστεί κατά dx. Η στιγμιαία του ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα ίδιας κατεύθυνσης με τη μετατόπιση και έχει μέτρο:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας μας δείχνει το ρυθμό μεταβολής της θέσης. Η μονάδα μέτρησης στο S.I είναι το 1m/s.

Στιγμιαία επιτάχυνση

Έστω ότι σε χρόνο dt το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά dυ. Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι ένα διάνυσμα ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα αν το μέτρο της αυξάνεται ή αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα αν το μέτρο της μειώνεται (επιβράδυνση) και έχει μέτρο:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Δηλαδή το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης μας δείχνει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.
Η μονάδα μέτρησης στο S.I είναι το $1m/s^2$.

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό, οπότε η επιτάχυνση ισούται με μηδέν. Ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \Delta x = \upsilon . \Delta t$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό και ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα. Ισχύουν οι τύποι:

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \ , \ \ \Delta x = \upsilon_0 . t + \frac{1}{2} \alpha . t^2}$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

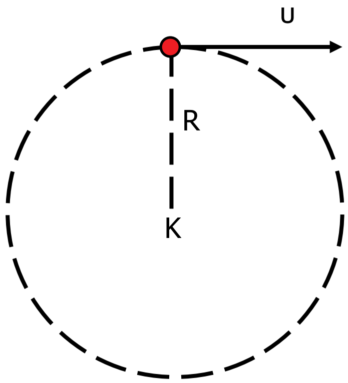
Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό και αντίθετης κατεύθυνσης από τη ταχύτητα. Ισχύουν οι τύποι:

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \ , \ \ \Delta x = \upsilon_0 . t - \frac{1}{2} \alpha . t^2}$$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Γραμμική ταχύτητα

Έστω υλικό σημείο το οποίο κινείται κυκλικά σε κύκλο ακτίνας R και σε χρόνο dt διαγράφει τόξο μήκους dS. Η γραμμική ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην κυκλική τροχιά που έχει τη φορά της κίνησης και μέτρο:



$$\boldsymbol{\upsilon = dS/dt}$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μήκους του τόξου.

Γραμμική επιτάχυνση

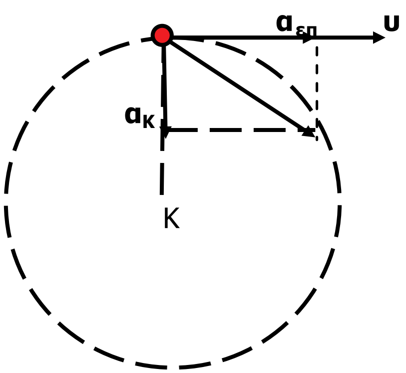
✓ **Γραμμική επιτάχυνση** ονομάζεται η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που κινείται κυκλικά και οφείλεται στην αλλαγή του μέτρου και της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η γραμμική επιτάχυνση κατευθύνεται προς το κοίλο μέρος της τροχιάς και αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. Στην **κεντρομόλο επιτάχυνση** και στην **επιτρόχια επιτάχυνση**.

✓ Η **κεντρομόλος (ακτινική) επιτάχυνση** οφείλεται στην αλλαγή της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας, έχει την διεύθυνση της ακτίνας, φορά προς το κέντρο της τροχιάς και μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \quad ή \quad \alpha_\kappa = \omega^2 . R$$

✓ Η **επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση** οφείλεται στην αλλαγή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, έχει την διεύθυνση της εφαπτομένης στη κυκλική τροχιά και το μέτρο της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, δηλαδή

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt}$$



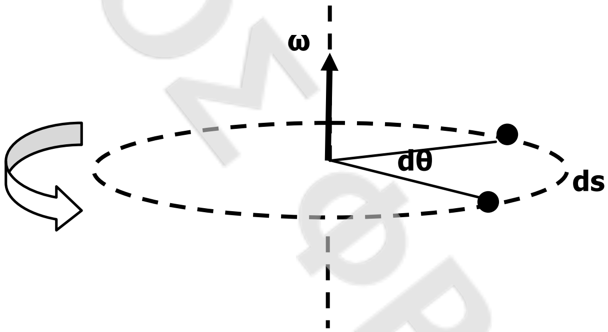
✓ Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\varepsilon\pi}^2}$$

Γωνιακή ταχύτητα

✓ **Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** είναι το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο της γωνιακής μετατόπισης dθ προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια dt , διεύθυνση πάνω στον άξονα περιστροφής και φορά που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή εξαρτάται από τη φορά περιστροφής.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



✓ Το μέτρο της εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που διαγράφει μια ακτίνα του στερεού σώματος

✓ Μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το 1 rad/s.

Σχέση τόξου και γωνίας στροφής

Αν dθ είναι η επίκεντρη γωνία (μετρημένη σε rad) που διαγράφει η επιβατική ακτίνα R η οποία παρακολουθεί το σημειακό αντικείμενο και dS είναι το τόξο στο οποίο αυτή βαίνει, τότε η σχέση που τα συνδέει είναι:

$$dS = d\theta . R$$

Σχέση μέτρου γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Έστω ένα σημειακό αντικείμενο κινείται κυκλικά σε κύκλο ακτίνας R και σε χρόνο dt διαγράφει τόξο ds ενώ η επιβατική του ακτίνα διαγράφει γωνία dθ. Όπως γνωρίζουμε ισχύει $\boldsymbol{ds = d\theta . R}$, επομένως

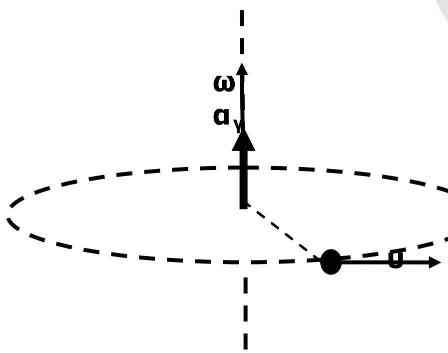
$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{d\theta . R}{dt} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{d\theta}{dt} . R \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon = \omega . R}$$

Γωνιακή επιτάχυνση

✓ **Η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση** είναι το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας dω προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια dt και κατεύθυνση ίδια με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας αν το μέτρο της αυξάνεται ή αντίθετη κατεύθυνση από τη γωνιακή ταχύτητα αν το μέτρο της μειώνεται (επιβράδυνση).

$$\boldsymbol{\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση.



✓ Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

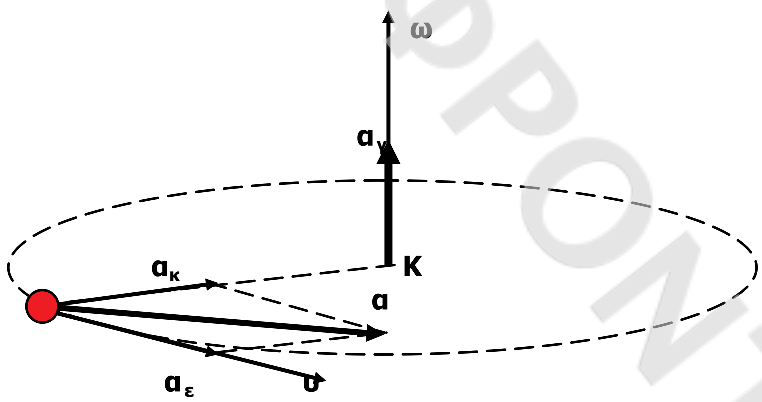
✓ Μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το 1 rad/s^2.

Σχέση μέτρου γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας αλλάζει, τότε αλλάζει και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, επομένως η επιτρόχια και η γωνιακή επιτάχυνση υπάρχουν ταυτόχρονα και η σχέση που τις συνδέει είναι η παρακάτω.

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega.R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.R \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma}.R}$$

✓ Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται όλα τα διανυσματικά μεγέθη που αφορούν την κυκλική κίνηση υλικού σημείου, στην περίπτωση της επιταχυνόμενης κίνησης. Αν η κίνηση είναι ομαλή κυκλική θα απουσιάζουν τα διανύσματα α_ε, α_γ και α.



Ομαλή κυκλική κίνηση

✓ Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό, οπότε υπάρχει μόνο η κεντρομόλος συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης.
✓ Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό οπότε η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν.
✓ Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{S}{t}}, \qquad \boldsymbol{S = \upsilon.t}$$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}\ , \quad \boldsymbol{\theta = \omega.t}$$

Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

✓ Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα και η επιτρόχια επιτάχυνση είναι επίσης σταθερή. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_{\varepsilon\pi}.t}\ , \qquad \boldsymbol{S = \upsilon_0.t \pm \frac{1}{2}.\alpha_{\varepsilon\pi}.t^2}$$

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 \pm \alpha_{\gamma}.t}\ , \qquad \boldsymbol{\theta = \omega_0.t \pm \frac{1}{2}.\alpha_{\gamma}.t^2}$$

ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Μεταφορική κίνηση

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα η οποία είναι και η ταχύτητα του στερεού σώματος.
Στη μεταφορική κίνηση:
✓ Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του στερεού σώματος μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτό του.

✓ Οι τροχιές των σημείων μπορεί να είναι ευθύγραμμες αλλά και καμπυλόγραμμες.

✓ Για την μελέτη της μεταφορικής κίνησης του στερεού σώματος χρησιμοποιούμε τους τύπους της κινηματικής για ένα τυχαίο σημείο του.

Παραδείγματα μεταφορικής κίνησης είναι ένα κιβώτιο που ολισθαίνει σε οριζόντιο και κεκλιμένο επίπεδο ή τα βαγονάκια του τροχού στο Λούνα Παρκ.

Στροφική κίνηση

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση:

✓ Υπάρχει ένα σύνολο σημείων τα οποία αποτελούν τον άξονα περιστροφής που παραμένουν διαρκώς ακίνητα. Όλα τα υπόλοιπα σημεία εκτελούν κυκλικές κινήσεις γύρω από τον άξονα περιστροφής με διαφορετικές ακτίνες.

✓ Όλα τα υλικά του σημεία ενός σώματος που περιστρέφεται έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση, οι οποίες ονομάζονται γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση του στερεού σώματος.

✓ Επειδή όμως οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών είναι διαφορετικές, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας καθώς και τα μέτρα της κεντρομόλου και της επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι διαφορετικά και ειδικότερα είναι ανάλογα με την απόσταση R των σημείων από τον άξονα περιστροφής.

$$\boldsymbol{\upsilon = \omega . R} \,, \qquad \boldsymbol{a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma} . R} \,, \qquad \boldsymbol{\alpha_{\kappa} = \omega^2 . R}$$

Παραδείγματα στροφικής κίνησης είναι η κίνηση του δίσκου του πικάπ ή του τροχού ενός αναποδογυρισμένου ποδηλάτου κ.τ.λ.

ΕΙΔΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Ομαλή στροφική κίνηση

- ✓ Η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, ω = σταθ.

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta\theta = \omega.\Delta t}$$

- ✓ Η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν, $\boldsymbol{\alpha_\gamma = 0}$.
- ✓ Επειδή είναι περιοδική κίνηση έχει συχνότητα και περίοδο και ισχύει:

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}\ ,\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\ ,\qquad \boldsymbol{\omega = 2\pi f}$$

Ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση

- ✓ Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, $\boldsymbol{\alpha_\gamma}$ **= σταθ.**
- ✓ Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta\omega = \alpha_\gamma.\Delta t \Leftrightarrow \omega - \omega_0 = \alpha_\gamma.\Delta t \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma.\Delta t}$$

ή

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma.(t - t_0)}$$

Συνήθως είναι: $t_0 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma.t} \quad (\mathbf{1})$

Εάν είναι $t_0 = 0\ \&\ \omega_0 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\omega = \alpha_\gamma.t}$

Στις παραπάνω σχέσεις, στα διανυσματικά μεγέθη ω, ω_0, α_γ δίνουμε τις αλγεβρικές τους τιμές ανάλογα με τη φορά τους.

✓ Η γωνία στροφής του σώματος για χρονική διάρκεια $\Delta t = t - t_0$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\Delta\theta = \omega_0 . \Delta t + \frac{1}{2} a_\gamma \Delta t^2}$$

Συνήθως είναι: $t_0 = 0 \;\; \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta\theta = \omega_0 . t + \frac{1}{2} a_\gamma t^2} \quad \mathbf{(2)}$

Εάν είναι $t_0 = 0$ & $\omega_0 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta\theta = \frac{1}{2} a_\gamma t^2}$

Στις παραπάνω σχέσεις, στα διανυσματικά μεγέθη ω, ω_0, a_γ δίνουμε τις αλγεβρικές τους τιμές ανάλογα με τη φορά τους.

✓ Αν έχουμε ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση με $\omega_0>0$ και $a_\gamma<0$ τότε στους τύπους (1) και (2) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $|\boldsymbol{a_\gamma}|$, οπότε η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας και η γωνιακή μετατόπιση υπολογίζονται ως εξής:

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 - |\alpha_\gamma| . t} \quad , \qquad \boldsymbol{\Delta\theta = \omega_0 . t - \frac{1}{2} |a_\gamma| t^2}$$

Σύνθετη κίνηση

Είναι η κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν μετακινείται και ταυτόχρονα αλλάζει προσανατολισμό.

✓ Κάθε σύνθετη κίνηση θεωρείται ως αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης , οι οποίες θεωρούμε ότι γίνονται ταυτόχρονα.

✓ Παράδειγμα σύνθετης κίνησης αποτελεί η κίνηση του τροχού ενός αυτοκινήτου όταν το αυτοκίνητο κινείται πάνω στο δρόμο.

✓ Για τη μελέτη της σύνθετης κίνησης εξετάζουμε ξεχωριστά την μεταφορική και την στροφική κίνηση.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

✓ Κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος μάζας Μ είναι ένα σημείο (συνήθως ανήκει πάνω στο στερεό σώμα) το οποίο κινείται με τον ίδιο τρόπο που θα κινούνταν ένα υποθετικό υλικό σημείο ίδιας μάζας με το στερεό σώμα, αν δεχόταν την συνισταμένη των δυνάμεων ΣF που δέχεται και το στερεό σώμα. Επομένως αν θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού σώματος εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{\Sigma F = M.a_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = \frac{\Sigma F}{m}}$$

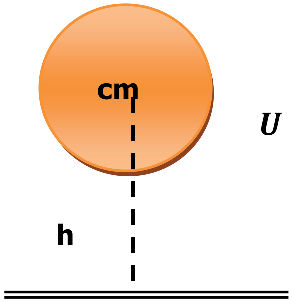
✓ Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση (μεταφορική και περιστροφική), τότε ο άξονας περιστροφής περνάει από το κέντρο μάζας. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας δεν συμμετέχει στην περιστροφική κίνηση παρά μόνο στη μεταφορική. Επομένως η κίνηση του κέντρου μάζας μας περιγράφει τη μεταφορική κίνηση του σώματος.

✓ Το κέντρο μάζας ενός ομογενούς και συμμετρικού σώματος ταυτίζεται με το κέντρο συμμετρίας του σώματος (π.χ. το κέντρο μάζας λεπτής ράβδου είναι το μέσο της).

✓ Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να μην ανήκει στο σώμα. Ως παράδειγμα, το κέντρο μάζας ενός ομογενούς δακτυλίου είναι το γεωμετρικό του κέντρο το οποίο προφανώς είναι εκτός του σώματος.

✓ Αν το στερεό σώμα βρίσκεται σε ομογενές βαρυτικό πεδίο (δηλ. κοντά στο έδαφος) το κέντρο μάζας του ταυτίζεται με το κέντρο βάρους του. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας θα είναι και το σημείο εφαρμογής του βάρους.

✓ Μια ακόμη χρησιμότητα του κέντρου μάζας είναι ότι μας βοηθάει στον υπολογισμό της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του στερεού σώματος. Συγκεκριμένα αυτή υπολογίζεται αν θεωρήσουμε ότι όλη η μάζα του σώματος βρίσκεται συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του.



$$U = M.g.h$$

(επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας)

Η ΚΥΛΙΣΗ ΤΟΥ ΤΡΟΧΟΥ

Γενικά

✓ Η κύλιση του τροχού (χωρίς ολίσθηση) είναι η απλούστερη από τις σύνθετες κινήσεις και μπορεί να θεωρηθεί ως η επαλληλία δύο κινήσεων οι οποίες γίνονται ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, δηλαδή μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής που γίνεται γύρω από το κέντρο μάζας του.

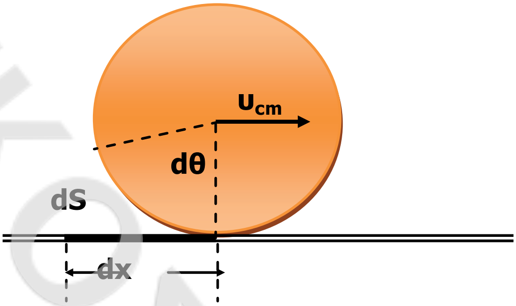
✓ Εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας $\boldsymbol{\upsilon_{\mu\varepsilon\tau.} = \upsilon_{cm}}$.

✓ Εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης κάθε σημείο του τροχού έχει γραμμική ταχύτητα που έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_{\pi\varepsilon\rho.} = \omega.r}$, όπου r είναι η απόσταση του σημείου από το κέντρο του τροχού. Ειδικά για τα σημεία της περιφέρειας του τροχού (r=R) ισχύει $\boldsymbol{\upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega.R}$

✓ Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας που ισχύει σε όλες τις σύνθετες κινήσεις, κάθε σημείο του τροχού κινείται με ταχύτητα που είναι η συνισταμένη των ταχυτήτων που έχει λόγω της συμμετοχής του στη μεταφορική και στη περιστροφική κίνηση.

$$\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\upsilon}_{\mu\varepsilon\tau.}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\upsilon}_{\pi\varepsilon\rho.}}$$

Να αποδείξετε ότι για το τροχό που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει η σχέση u_{cm}=ω.R



$$\upsilon_{cm} = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$d\theta = \frac{dS}{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{dS = d\theta.R} \quad (2)$$

Επειδή ο τροχός δεν ολισθαίνει ισχύει ότι dS=dx, οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\upsilon_{cm} = \frac{d\theta.R}{dt} \Longrightarrow \upsilon_{cm} = \frac{d\theta}{dt}.R \Longrightarrow \boldsymbol{\upsilon_{cm} = \omega.R}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει το ίδιο μέτρο με την γραμμική ταχύτητα που θα είχαν τα σημεία της περιφέρειας του τροχού αν ο τροχός έκανε μόνο στροφική κίνηση (**$\boldsymbol{u_{\pi\varepsilon\rho.}}$=$\boldsymbol{u_{cm}}$=ω.R**).

Να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης.

Έστω ότι η κύλιση του τροχού είναι επιταχυνόμενη. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του θα είναι:

$$\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega.R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.R \Leftrightarrow \boldsymbol{a_{cm} = \alpha_{\gamma}.R}$$

Συνθήκες κύλισης τροχού χωρίς ολίσθηση

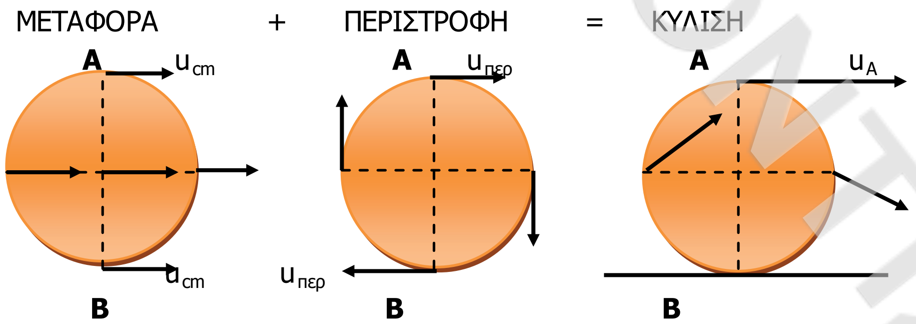
✓ Αν dS είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας και dθ είναι η γωνία στροφής του τροχού, ισχύει η σχέση: $\boldsymbol{dS = d\theta.R}$

✓ Αν u_{cm} είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας και ω η γωνιακή ταχύτητα του τροχού, ισχύει η σχέση: $\boldsymbol{\upsilon_{cm} = \omega.R}$

✓ Αν α_{cm} είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και α_γ η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, ισχύει η σχέση: $\boldsymbol{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma}.R}$

✓ Επειδή ο τροχός δεν ολισθαίνει το σημείο που κάθε φορά είναι σε επαφή με το δάπεδο είναι στιγμιαία ακίνητο, οπότε η τριβή θεωρείται στατική με αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση: $\boldsymbol{T_\sigma \leq \mu_{op}.N}$

Να αποδείξετε ότι το ανώτερο σημείο του τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχει ταχύτητα μέτρου $2u_{cm}$. Να αποδείξετε επίσης ότι το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα.



Είναι $υ_{cm}$=ω.R και $υ_{περ}$ =ω.R

Κάθε σημείο του τροχού κινείται με ταχύτητα που είναι η συνισταμένη των δύο παραπάνω ταχυτήτων.

$$\vec{u} = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{περ}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α είναι:
$υ_A = υ_{cm} + υ_{περ} \Rightarrow υ_A = ω.R + ω.R \Rightarrow υ_A = 2ω.R \Rightarrow \boldsymbol{υ_A = 2υ_{cm}}$ και η κατεύθυνση είναι ομόρροπη της $υ_{cm}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Β είναι:
$υ_B = υ_{cm} - υ_{περ} \Rightarrow υ_B = ω.R - ω.R \Rightarrow \boldsymbol{υ_B = 0}$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα οποιουδήποτε άλλου σημείου του τροχού.

Να αποδείξετε ότι το ανώτερο σημείο του τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχει εφαπτομενική επιτάχυνση μέτρου 2α$_{cm}$.

Όπως έχουμε αποδείξει προηγουμένως, το ανώτερο σημείο Α ενός τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχει ταχύτητα μέτρου $υ_A = 2υ_{cm}$

$$α_A = \frac{dυ_A}{dt} = \frac{d(2υ_{cm})}{dt} = 2\frac{dυ_{cm}}{dt} \Leftrightarrow \boldsymbol{α_A = 2α_{cm}}$$

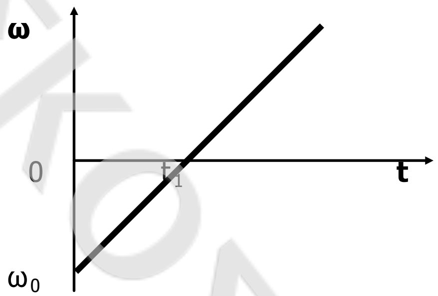
Εκτός από την εφαπτομενική επιτάχυνση το σημείο Α έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, εξαιτίας της συμμετοχής του στην περιστροφική κίνηση.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

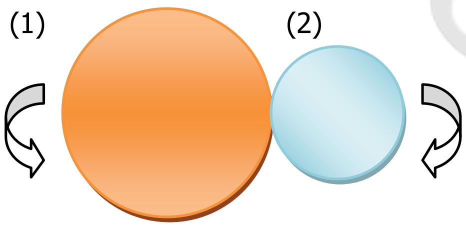
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας ενός δίσκου, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα σε συνάρτηση με το χρόνο. Τη χρονική στιγμή t_1:



α) η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου αλλάζει πρόσημο
β) η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι ίση με μηδέν
γ) αλλάζει η φορά της περιστροφής του δίσκου

2. Οι οδοντωτοί τροχοί (1) και (2) του σχήματος έχουν λόγο ακτίνων $R_1/R_2=2$ και περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες μέτρου ω_1 και ω_2 αντίστοιχα.



Το πηλίκο των μέτρων των γωνιακών ταχυτήτων ω_1/ω_2 είναι ίσο με:

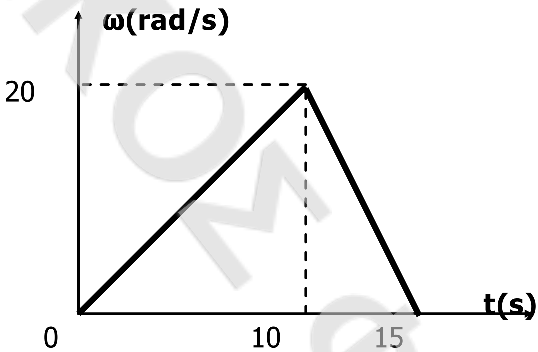
α) 1 **β)** 2 **γ)** 1/2

3. Οι δύο τροχοί ενός τρακτέρ το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα έχουν λόγο ακτίνων $R_1/R_2=2/5$. Αν οι τροχοί στον ίδιο χρόνο, εκτελούν N_1 και N_2 περιστροφές αντίστοιχα, τότε ο λόγος N_1/N_2 ισούται με:

α) 2/5 **β)** 5/2 **γ)** 1

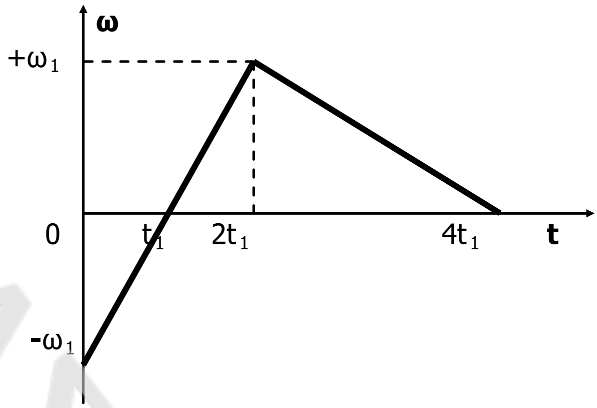
Ερωτήσεις σωστού-λάθους

4. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας ενός δίσκου, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου στη χρονική διάρκεια από 0 έως 10 s έχει συνεχώς την ίδια φορά.
β) Τη χρονική στιγμή t=10 s το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης αλλάζει φορά.
γ) Τη χρονική στιγμή t=10 s αντιστρέφεται η φορά περιστροφής του δίσκου.
δ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης είναι διπλάσιο από το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης.

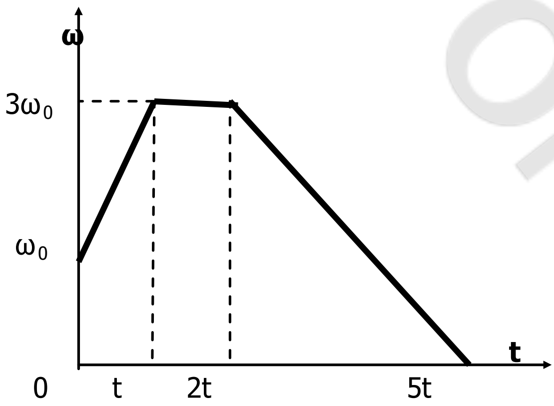
5. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας ενός δίσκου, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή $2t_1$ είναι σταθερή.
β) Η κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης αλλάζει τη στιγμή που αλλάζει και η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας.
γ) Η μεταβολή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή $2t_1$ ισούται με μηδέν.
δ) Από τη στιγμή $2t_1$ έως τη στιγμή $4t_1$ η γωνιακή επιτάχυνση έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη γωνιακή ταχύτητα.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

6. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού σώματος , που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα σε συνάρτηση με το χρόνο.



Να σχεδιάσετε ποιοτικά το αντίστοιχα διάγραμμα, της μεταβολής της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής επιτάχυνσης, σε συνάρτηση με το χρόνο.

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

7. Ένας αρχικά ακίνητος τροχός ακτίνας R αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου a_γ. Αν τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού είναι ω_1, τότε τη χρονική στιγμή $t_2=2t_1$ το ανώτατο σημείο του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου:

α) $\omega_1 R$ **β)** $2\omega_1 R$ **γ)** $4\omega_1 R$ **δ)** $8\omega_1 R$

8. Ένα ποδήλατο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο. Η ακτίνα της μπροστινής ρόδας του ποδηλάτου είναι $R_1=1m$ ενώ της πίσω ρόδας είναι $R_2=0,5m$.

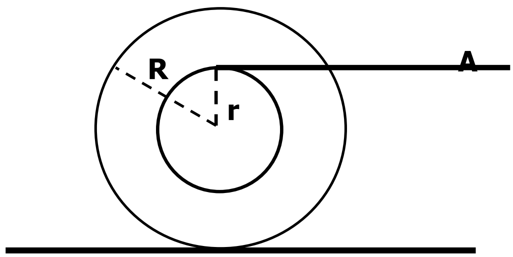
1) Αν το ποδήλατο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ=36Km/h τότε σε χρονική διάρκεια Δt=10s η μπροστινή του ρόδα έχει διαγράψει:

α) 50/π περιστροφές
β) 25/π περιστροφές
γ) 100/π περιστροφές

2) Αν το ποδήλατο κινείται με σταθερή επιτάχυνση και η γωνιακή ταχύτητα της πίσω ρόδας αυξάνεται με ρυθμό 5rad/s σε κάθε δευτερόλεπτο, τότε η γωνιακή ταχύτητα της μπροστινής ρόδας αυξάνεται με ρυθμό:

α) 10 rad/s σε κάθε δευτερόλεπτο
β) 2,5 rad/s σε κάθε δευτερόλεπτο
γ) 4 rad/s σε κάθε δευτερόλεπτο

9. Στον παρακάτω τροχό (καρούλι)του σχήματος έχουμε τυλίξει λεπτό νήμα. Αν τραβήξουμε το νήμα ώστε ο τροχός να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$ και το άκρο Α του σχοινιού μετατοπιστεί κατά S, το κέντρο μάζας του τροχού στον ίδιο χρόνο θα μετατοπιστεί κατά:



α) S **β)** R.S/r **γ)** r.S/R **δ)** 2S

Η ταχύτητα του σημείου Α του νήματος θα είναι:
α) $υ_{cm}$ **β)** 2.$υ_{cm}$ **γ)** $υ_{cm}$.r/R **δ)** $υ_{cm}$.(R+r)/R

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

10. Ένας τροχός ακτίνας R=0,5m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο και το κέντρο μάζας του διανύει απόσταση Δx=8m σε χρονική διάρκεια Δt=4s, κινούμενο συνεχώς με σταθερή ταχύτητα.
α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού ισούται με 4 rad/s.
β) Η ταχύτητα ενός σημείου του τροχού που βρίσκεται σε ύψος R από το δάπεδο έχει μέτρο $2\sqrt{2}$ m/s.
γ) Η γραμμική επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού ισούται με μηδέν.
δ) Τα σημεία της περιφέρειας του τροχού που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο (εξαιρείται η κατακόρυφη διάμετρος) έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου.

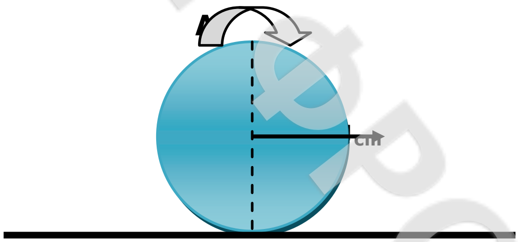
11. Ένας τροχός ακτίνας R=0,4 m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}=2rad/s^2$. Ο τροχός ξεκίνησε να κυλίεται από την ηρεμία τη στιγμή t=0.
α) Τη χρονική στιγμή t_1=1s η γωνιακή ταχύτητα του τροχού έχει μέτρο 2 rad/s.
β) Τη χρονική στιγμή t_2=2s η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του τροχού έχει μέτρο 3,2 m/s.
γ) Τη χρονική στιγμή t_3=3s το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού ισούται με 2,4 m/s.

δ) Τη χρονική στιγμή t_4=4s ο τροχός έχει διανύσει διάστημα s=16 m.

12. Ένα τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα u=10m/s. Οι τροχοί του έχουν ακτίνες R_1 και R_2 και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.
α) Όλα τα σημεία της περιφέρειας των δύο τροχών έχουν κάθε στιγμή ταχύτητα μέτρου u=10 m/s.
β) Τα ανώτερα σημεία των δύο τροχών έχουν κάθε στιγμή ίσες ταχύτητες.
γ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των περιφερειακών σημείων των δύο τροχών εξαιτίας της στροφικής κίνησης που εκτελούν είναι κάθε στιγμή ίσο με 10 m/s.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

13. Ο δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει ακτίνα R και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού είναι ίση με u_{cm}.



O

Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας u των διαφόρων σημείων της διαμέτρου ΟΑ, σε συνάρτηση με την απόσταση x από το σημείο Ο, την ίδια χρονική στιγμή.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1η Κατηγορία ασκήσεων

Ένα στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα

✓ **Όταν ένα στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα :**
i) Όλα τα σημεία του κινούνται κυκλικά (εκτός από τα σημεία του άξονα περιστροφής που είναι διαρκώς ακίνητα) και έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση $α_γ$.
ii) Σημεία που απέχουν άνισες αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής έχουν ομοίως άνισες γραμμικές ταχύτητες υ (υ=ω.r), κεντρομόλους επιταχύνσεις $α_κ$ ($α_κ=ω^2.r$) και επιτρόχιες επιταχύνσεις $α_{επ}$ ($α_{επ}=α_γ.r$)

✓ **Στην επιταχυνόμενη στροφική κίνηση είναι $\vec{\alpha_\gamma} \nearrow\nearrow \vec{\omega}$ ενώ στην επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση είναι $\vec{\alpha_\gamma} \nearrow\swarrow \vec{\omega}$.**

✓ **Ο αριθμός των περιστροφών που διαγράφει ένα στερεό σώμα σε χρόνο Δt αν έχει στραφεί κατά γωνία θ, δίνεται από την σχέση:**

$$N = \frac{\theta}{2\pi}$$

✓ **Στην ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση, για το συνολικό χρόνο καθώς και για τη γωνία στροφής μέχρι να σταματήσει, ισχύουν επιπλέον οι τύποι:**

$$t_{ΟΛ} = \frac{\omega_0}{|\alpha_\gamma|} \quad , \quad \theta_{ΟΛ} = \frac{\omega_0^2}{2.|\alpha_\gamma|}$$

1. Μια ράβδος ΑΒ είναι αρχικά ακίνητη και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος σ’ αυτή. Τη χρονική στιγμή t=0 η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}$=5 rad/s^2. Υλικό σημείο Ζ της ράβδου έχει μάζα m=10^{-4} Kg και απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση d. Η επιτρόχια συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης του υλικού σημείου Ζ έχει μέτρο $α_{επ}$=4m/s^2. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή t_1=4 s

β) το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του υλικού σημείου Ζ τη στιγμή t_1

γ) το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που δέχεται το υλικό σημείο Ζ τη στιγμή t_1

Απ. α) 20 rad/s β) 16 m/s γ) 32.10^{-3} N

2. Δακτύλιος περιστρέφεται με αρχική γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_0$=10 rad/s γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη στιγμή t=0 η γωνιακή ταχύτητα αρχίζει να μεταβάλλεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση που έχει μέτρο $α_{γων}$=5 rad/s^2 και αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική γωνιακή ταχύτητα.

α) Να γράψετε την χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου , θεωρώντας θετική φορά τη φορά της $ω_0$.

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά με την $ω_0$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t_1.

δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών του δακτυλίου από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα.

Απ. α) ω=10-5t (S.I) β) 4 s δ) 5/π rad

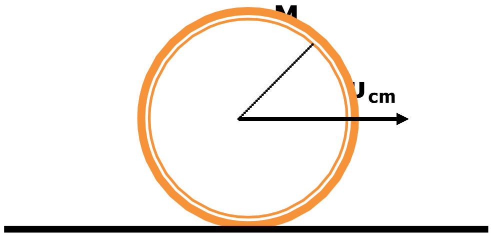
3. Ένα ρολόι είναι σταματημένο. Για να ρυθμίσουμε την ώρα περιστρέφουμε τον λεπτοδείκτη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_λ$=2,4rad/s^2. Να βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση με την οποία θα περιστρέφεται ο ωροδείκτης.

Απ: 0,2rad/s^2

2^η Κατηγορία ασκήσεων

Ένα στερεό σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση

4. Ένα ποδήλατο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα υ=10m/s. Ο τροχός του ποδηλάτου έχει ακτίνα R. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Μ, τη στιγμή που η ακτίνα ΟΜ σχηματίζει γωνία 30^o με τη ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού.



Απ: $\upsilon_M = 10\sqrt{3}$ m/s

✓ **Η κύλιση χωρίς ολίσθηση αντιμετωπίζεται ως μια σύνθετη κίνηση η οποία αποτελείται από μια μεταφορική κίνηση και από μια περιστροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας.**

✓ **Για την μεταφορική κίνηση γράφουμε τους τύπους:**

Αν είναι ευθύγραμμη ομαλή, δηλαδή αν υ_{cm}=σταθ.

$$\boldsymbol{\upsilon_{cm} = \frac{S}{t}}, \qquad \boldsymbol{S = \upsilon_{cm} . t},$$

Αν είναι ομαλά μεταβαλλόμενη, δηλαδή αν α_{cm}=σταθ.

$$\boldsymbol{\upsilon_{cm} = \upsilon_0 \pm |\alpha_{cm}| . t}, \qquad \boldsymbol{S = \upsilon_0 . t \pm \frac{1}{2} |\alpha_{cm}| . t^2}$$

✓ **Για την περιστροφική κίνηση γράφουμε τους τύπους:**

Αν είναι ομαλή περιστροφική, δηλαδή αν **ω=σταθ.**

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}, \qquad \boldsymbol{\theta = \omega . t}$$

Αν είναι ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση, δηλαδή αν **α_γ=σταθ.**

$$\omega = \omega_0 \pm |\alpha_\gamma| t \quad , \quad \theta = \omega_0 . t \pm \frac{1}{2} |\alpha_\gamma| t^2$$

✓ **Επίσης μπορεί να χρειαστούν και οι παρακάτω σχέσεις που συνδέουν μεταφορικά μεγέθη με περιστροφικά μεγέθη.**

$$S = \theta . R, \qquad \upsilon_{cm} = \omega . R, \qquad a_{cm} = \alpha_\gamma . R$$

✓ **Ο αριθμός των περιστροφών που διαγράφει ο τροχός συνδέεται με τη γωνία θ που διαγράφει μια ακτίνα του ,σύμφωνα με τον τύπο:**

$$N = \frac{\theta}{2\pi}$$

αλλά και με το διάστημα S που διανύει (εφόσον δεν ολισθαίνει), σύμφωνα με τον τύπο:

$$N = \frac{S}{2\pi R}$$

5. Το ανώτερο σημείο ενός τροχού ο οποίος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, έχει ταχύτητα υ=5m/s. Η ακτίνα του τροχού είναι R=0,25m.

α) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού;

β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του τροχού;

γ) Ποια είναι η μετατόπιση του τροχού και ποια η γωνία περιστροφής του σε χρόνο t=2s;

Απ: α) υ_{cm}=2,5m/s β) ω=10rad/s γ) S=5m, θ=20rad

6. Ένας κύλινδρος ακτίνας R=0,2m αφήνεται να κυλίσει χωρίς να ολισθαίνει από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου. Όταν ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχει διανύσει απόσταση S=5m και το κέντρο μάζας του έχει ταχύτητα υ_{cm}=8m/s.

α) Ποια είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου;

β) Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;

γ) Σε πόσο χρόνο φτάνει ο κύλινδρος στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και με ποια γωνιακή ταχύτητα;

δ) Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει ο κύλινδρος στον παραπάνω χρόνο;

Απ: α) $a_{cm}=6,4m/s^2$, β) $a_{γων}=32rad/s^2$, γ) $t=1,25s$, $ω=40rad/s$, δ) $N=12,5/π$

7. Λεπτός δακτύλιος ακτίνας R=0,5m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης $φ=30^o$. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δακτυλίου είναι σταθερή. Ο δακτύλιος ξεκίνησε να κυλίεται, χωρίς αρχική ταχύτητα, τη στιγμή t=0 και τη στιγμή $t_1=4s$ έχει μετακινηθεί κατακόρυφα από την αρχική του θέση κατά h=10m. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δακτυλίου

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη χρονική στιγμή t_1

γ) τη χρονική στιγμή που ο δακτύλιος έχει διαγράψει N=80/π περιστροφές.

Απ: α) $a_{γων}=5rad/s^2$ β) $ω=20rad/s$ γ) $t=8s$

8. Τροχός ακτίνας R=0,2m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο και το κέντρο μάζας του έχει σταθερή ταχύτητα $υ_{cm,0}=4m/s$. Τη στιγμή t=0 αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση και σταματά τελικά αφού έχει διαγράψει $N_{ολ}=25/π$ στροφές από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του τροχού

β) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού τη στιγμή που έχει διαγράψει $N_1=16/π$ στροφές

γ) την ταχύτητα του ανώτερου σημείου του τροχού ένα δευτερόλεπτο πριν σταματήσει.

Απ: α) $a_{γων}=4rad/s^2$ β) $υ_{cm}=2,4m/s$ γ) $υ=1,6m/s$

9. Ένας τροχός ακτίνας R=0,4m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο και το κέντρο μάζας του κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_{cm}=0,8m/s^2$. Τη χρονική στιγμή t=0 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού ισούται με $ω_o=5rad/s$. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος καθώς και τη ταχύτητα του ανώτερου σημείου του τροχού τη στιγμή t=0

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη στιγμή που ο τροχός έχει διαγράψει $N_1=3/π$ περιστροφές, μετά τη στιγμή t=0

γ) το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου Ζ της περιφέρειας του τροχού, το οποίο τη στιγμή t_1=2,5s απέχει από το έδαφος απόσταση d_1=R

Απ: α) υ=0, υ=4m/s β) ω_1=7rad/s γ) υ=$4\sqrt{2}$m/s

✓ Το καρούλι είναι ένας κύλινδρος ακτίνας r ενωμένος με δύο δίσκους ακτίνας R και όλο το σύστημα κινείται σαν ένα σώμα με άξονα περιστροφής τον άξονα του κυλίνδρου. Αν σε επαφή με το δάπεδο είναι οι δύο δίσκοι θα ισχύει ότι $\upsilon_{cm} = \omega . R$ ενώ αν σε επαφή με το δάπεδο είναι ο κύλινδρος τότε θα ισχύει $\upsilon_{cm} = \omega . r$.

10. Ένα καρούλι αποτελείται από ένα κύλινδρο ακτίνας r=0,1m και από δύο δίσκους με ακτίνα R=0,3m αντίστοιχα. Το καρούλι κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε στενό οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε ο κύλινδρος να είναι σε επαφή με το επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή ο άξονας περιστροφής έχει ταχύτητα υ=10m/s. Να βρείτε την ίδια χρονική στιγμή τις ταχύτητες του ανώτερου σημείου Α και του κατώτερου σημείου Β των δύο δίσκων.

Απ: 40m/s , 20m/s

✓ Στη περίπτωση του οχήματος με άνισες ρόδες, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα εξής. Επειδή τα κέντρα των τροχών είναι σταθερά τοποθετημένα πάνω στο όχημα, το διάστημα S που διανύουν, η ταχύτητά τους υ_{cm} καθώς και η επιτάχυνσή τους α_{cm}, είναι κοινά και για τους δύο τροχούς και ταυτίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη του οχήματος. Δηλαδή ισχύει:

$$S_{οχήματος} = S_1 = S_2$$

$$\upsilon_{οχήματος} = \upsilon_{cm,1} = \upsilon_{cm,2}$$

$$\alpha_{οχήματος} = \alpha_{cm,1} = \alpha_{cm,2}$$

Εξαιτίας όμως του γεγονότος ότι έχουν διαφορετικές ακτίνες, τα γωνιακά μεγέθη θ, ω, α_γ που περιγράφουν τη περιστροφή τους δεν ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$\left.\begin{matrix} S_1 = \theta_1 . R_1 \\ S_2 = \theta_2 . R_2 \\ S_1 = S_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_1 . R_1 = \theta_2 . R_2 \Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\left.\begin{matrix} \upsilon_{cm_1} = \omega_1 . R_1 \\ \upsilon_{cm_2} = \omega_2 . R_2 \\ \upsilon_{cm_1} = \upsilon_{cm_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega_1 . R_1 = \omega_2 . R_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_{cm_1} = \alpha_{\gamma_1} . R_1 \\ \alpha_{cm_2} = \alpha_{\gamma_2} . R_2 \\ \alpha_{cm_1} = \alpha_{cm_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_{\gamma_1} . R_1 = \alpha_{\gamma_2} . R_2 \Rightarrow \frac{\alpha_{\gamma_1}}{\alpha_{\gamma_2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

11. Ένα ποδήλατο έχει δύο ρόδες με διαφορετικές ακτίνες R_1=0,5m και R_2=0,2m. Αρχικά το ποδήλατο είναι ακίνητο και τη στιγμή t=0 ξεκινά με σταθερή επιτάχυνση και οι ρόδες του κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Τη στιγμή t_1=5s το ποδήλατο έχει διανύσει διάστημα S=25m από τη στιγμή που ξεκίνησε να κινείται.

α) Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης κάθε ρόδας

ii) το πηλίκο των μέτρων των γωνιακών ταχυτήτων των δύο τροχών ω_1/ω_2 τη στιγμή t_1

iii) τον αριθμό των περιστροφών κάθε ρόδας μέχρι τη στιγμή t_1

β) Τη στιγμή t_1 το ποδήλατο αποκτά σταθερή επιβράδυνση χωρίς να ολισθαίνουν οι ρόδες του στο δρόμο και σταματά τη στιγμή που η ρόδα με τη μεγαλύτερη ακτίνα έχει διαγράψει 12,5/π περιστροφές από την στιγμή που άρχισε η επιβραδυνόμενη κίνηση. Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της επιβράδυνσης του ποδηλάτου

ii) τον αριθμό των περιστροφών που διέγραψε η μικρή ρόδα από την στιγμή που άρχισε η επιβραδυνόμενη κίνηση και μέχρι να σταματήσει το ποδήλατο.

Απ. α) i) 4 rad/s^2-10 rad/s^2 ii) 0,4 iii) 25/π – 62,5/π β) i) 4 m/s^2 ii) 31,25/π

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

$\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\Delta\theta=\omega\Delta t$	Τύποι υπολογισμού της γωνιακής ταχύτητας και της γωνίας στροφής στην ομαλή στροφική κίνηση.
$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{\omega_{\tau\varepsilon\lambda}-\omega_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\varepsilon\lambda}-t_{\alpha\rho\chi}}$ $\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ $\Delta\theta=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$	Τύποι υπολογισμού της γωνιακής επιτάχυνσης, της γωνιακής ταχύτητας και της γωνίας στροφής στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση. Στους τύπους αυτούς αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές και όχι τα μέτρα των διανυσματικών μεγεθών.
$\upsilon=\omega r$ $\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\omega\nu}r$ $\alpha_\kappa=\dfrac{\upsilon^2}{r}$, $\alpha_\kappa=\omega^2 r$ $\alpha=\sqrt{\alpha_\varepsilon^2+\alpha_\kappa^2}$ $S=\theta r$	Τύποι υπολογισμού της γραμμικής ταχύτητας υ, της επιτρόχιας επιτάχυνσης α_ε, της κεντρομόλου επιτάχυνσης α_κ, της γραμμικής επιτάχυνσης α και του τόξου που διανύθηκε S, ενός υλικού σημείου που ανήκει σε στρεφόμενο στερεό σώμα και απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής.

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ

$\upsilon_{cm}=\omega R$ $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ $S=R\theta$	Τύποι υπολογισμού της ταχύτητας του κέντρου μάζας υ_{cm}, της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας α_{cm} και της απόστασης που διανύει το κέντρο μάζας S, όταν το στερεό σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Όταν ένας τροχός εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση η ταχύτητα που έχουν τα σημεία της περιφέρειας του λόγω στροφικής κίνησης $υ_{στροφ}$ ισούται με την ταχύτητά τους λόγω μεταφορικής κίνησης $υ_{cm}$. Δηλαδή $υ_{cm}=υ_{στροφ}=ωR$. Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της επαλληλίας για το ανώτερο σημείο του τροχού θα ισχύει $υ=2υ_{cm}$ και για το κατώτερο σημείο θα ισχύει $υ=0$.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

$\boldsymbol{\tau_F=Fl}$	Μέτρο της ροπής δύναμης ως προς άξονα ή ως προς σημείο, όπου l είναι ο μοχλοβραχίονας της δύναμης
$\boldsymbol{\tau=Fd}$	Μέτρο της ροπής ζεύγους δυνάμεων ως προς σημείο, όπου d είναι η απόσταση των φορέων των δυνάμεων του ζεύγους.
$\boldsymbol{\Sigma F=0}$ **ή** $\boldsymbol{\Sigma F_x=0}$ **και** $\boldsymbol{\Sigma F_y=0}$ $\boldsymbol{\Sigma\tau=0}$	Συνθήκη ισορροπίας ενός αρχικά ακίνητου στερεού σώματος
$\boldsymbol{I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots}$	Τύπος ορισμού της ροπής αδράνειας στερεού σώματος ως προς κάποιον άξονα.
$\boldsymbol{I=I_{cm}+Md^2}$	Ροπή αδράνειας στερεού σώματος ως προς άξονα ο οποίος είναι παράλληλος στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος (Θεώρημα Steiner).

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

$L = m\upsilon r$, $L = pr$	Μέτρο της στροφορμής υλικού σημείου που εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από σημείο Ο.
$L = I\omega$	Μέτρο στροφορμής στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του.
$L_{O\Lambda} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	Στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων. Αν τα διανύσματα των στροφορμών είναι συγραμμικά τότε η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά.

$\Sigma\tau = \dfrac{dL}{dt}$	Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης ενός σώματος.
$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \dfrac{dL_{O\Lambda}}{dt}$	Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης ενός συστήματος σωμάτων.
$\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow L = \sigma\tau\alpha\theta.$	Διατήρηση της στροφορμής για ένα σώμα.

$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0 \Leftrightarrow L_{o\lambda}=\sigma\tau\alpha\theta.$	Διατήρηση της στροφορμής για ένα σύστημα σωμάτων.
$I_1\omega_1=I_2\omega_2$	Διατήρηση της στροφορμής για ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο έχουμε ανακατανομή της μάζας εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$K_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{1}{2}I\omega^2$	Κινητική ενέργεια στερεού σώματος λόγω περιστροφής.
$K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}=\frac{1}{2}Mu_{cm}^{2}$	Κινητική ενέργεια στερεού σώματος λόγω μεταφορικής κίνησης.
$K= K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}+K_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{1}{2}Mu_{cm}^{2}+\frac{1}{2}I\omega^2$	Κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση.
$W=\pm\tau\theta$	Έργο μιας δύναμης που έχει σταθερή ροπή.
$P=\pm\tau\omega$	Ισχύς μιας δύναμης που προκαλεί ροπή.
$\overline{P}=\frac{W}{t}$	Μέση ισχύς δύναμης σε μια χρονική διάρκεια t.

$\frac{1}{2}\text{I}\omega_2{}^2 - \frac{1}{2}\text{I}\omega_1{}^2 = \Sigma W$	Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην στροφική κίνηση.
$\frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} = \Sigma\tau.\omega$	Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης.
$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = \Sigma F.\upsilon$	Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης.
$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} + \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = \Sigma\tau.\omega + \Sigma F.\upsilon$	Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Γενικά

✓ Η **ροπή δύναμης τ** είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που εκφράζει την ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέφει ένα σώμα.

✓ Μονάδα μέτρησης στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το 1 N.m.

Ροπή δύναμης ως προς άξονα

✓ Έστω ένα σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα περιστροφής και σε κάποιο σημείο του ασκείται μια δύναμη η οποία είναι ασύμβατα κάθετη με τον άξονα περιστροφής. Η **ροπή** αυτής της δύναμης $\vec{F}$ **ως προς τον άξονα περιστροφής** ονομάζεται το **διανυσματικό μέγεθος** $\vec{\tau}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l (μοχλοβραχίονας) του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

$$\tau = F.l$$

Διεύθυνση πάνω στον άξονα περιστροφής

Φορά που βρίσκεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού.

Ροπή δύναμης ως προς σημείο

✓ Έστω ότι ένα στερεό σώμα είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από οποιοδήποτε σημείο του. Σ' αυτή τη περίπτωση ορίζουμε τη **ροπή δύναμης** ως προς κάποιο σημείο του, το **διανυσματικό μέγεθος** $\vec{\tau}$ που έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l (μοχλοβραχίονας) του φορέα της δύναμης από το σημείο.

$$\tau = F.l$$

Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο και τον φορέα της δύναμης.
Φορά που βρίσκεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού.

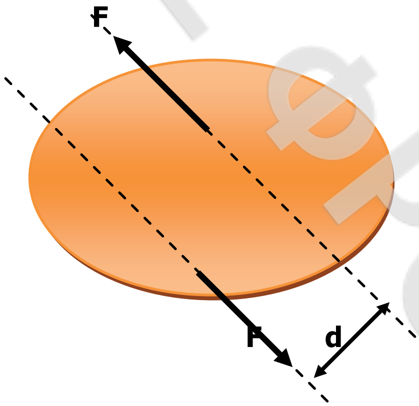
✓ Όταν θέλουμε να προσθέσουμε πολλές ροπές για να βρούμε τη συνολική ροπή, προσθέτουμε τις αλγεβρικές τους τιμές. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή που τείνει να περιστρέψει το σώμα σύμφωνα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού

Ροπή ζεύγους δυνάμεων

✓ Ζεύγος δυνάμεων ονομάζονται δύο δυνάμεις που έχουν ίδιο μέτρο αντίθετη φορά και βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες. Η ροπή του ζεύγους δύο δυνάμεων έχει μέτρο που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\tau = F.d$$

όπου d είναι η απόσταση των δύο ευθειών.



✓ Το μέτρο της ροπής του ζεύγους δυνάμεων δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου του στερεού σώματος.

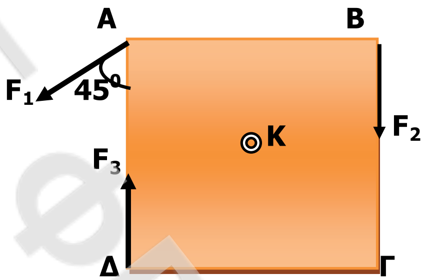
Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Σ' ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει πως η συνισταμένη ροπή είναι υποχρεωτικά ίση με μηδέν;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας δίνοντας ένα παράδειγμα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Η τετράγωνη πλάκα του σχήματος έχει πλευρά $\alpha=0,2m$ και μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Κ.



α) Να υπολογιστεί η συνολική ροπή που δέχεται η πλάκα ως προς τον άξονα περιστροφής της εξαιτίας των δυνάμεων $F_1=10\sqrt{2}$ N, $F_2=10N$ και $F_3=20N$.
β) Ποια συνολική ροπή θα δεχόταν η πλάκα αν ο άξονας περιστροφής περνούσε από την κορυφή Α;

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

✓ **Όταν ένα στερεό σώμα ισορροπεί ακίνητο και σε αυτό ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, τότε:**

α) Η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν.

$$\Sigma F = 0 \;\; (\alpha\nu\ o\iota\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau o\upsilon\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma)$$

ή

$$\Sigma F_x = 0 \;\; \kappa\alpha\iota\ \Sigma F_y = 0 \; (\alpha\nu\ o\iota\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma)$$

β) Η συνισταμένη ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων είναι μηδέν.

$$\Sigma\tau = 0$$

Στη παραπάνω σχέση ως καταλληλότερο σημείο για να υπολογιστούν οι ροπές, επιλέγουμε το σημείο εκείνο για το οποίο γνωρίζουμε τα λιγότερα για τις δυνάμεις που διέρχονται από αυτό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ροπές των δυνάμεων αυτών να είναι μηδενικές και έτσι η παραπάνω σχέση να έχει τους λιγότερους δυνατόν αγνώστους.

✓ **Όταν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών μη παράλληλων και ομοεπίπεδων δυνάμεων, οι φορείς τους θα διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

✓ **Όταν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση ν μη παράλληλων και ομοεπίπεδων δυνάμεων και οι φορείς των ν-1 δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε και ο φορέας της ν-οστής δύναμης θα διέρχεται από το ίδιο σημείο.**

✓ **Όταν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση ν ομοεπίπεδων δυνάμεων και οι ν-1 δυνάμεις είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε και η ν-οστή δύναμη θα είναι παράλληλη σε αυτές.**

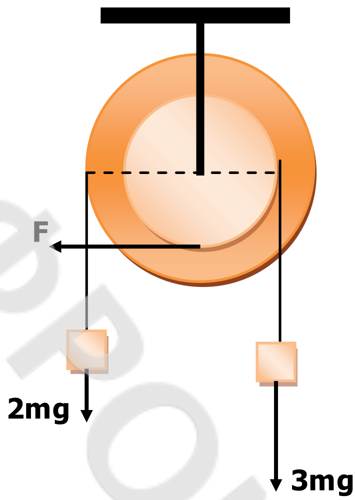
Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα ελεύθερο στερεό σώμα που ισορροπεί ακίνητο δέχεται από κάποια στιγμή και μετά την δράση ενός ζεύγους δυνάμεων. Το στερεό σώμα:

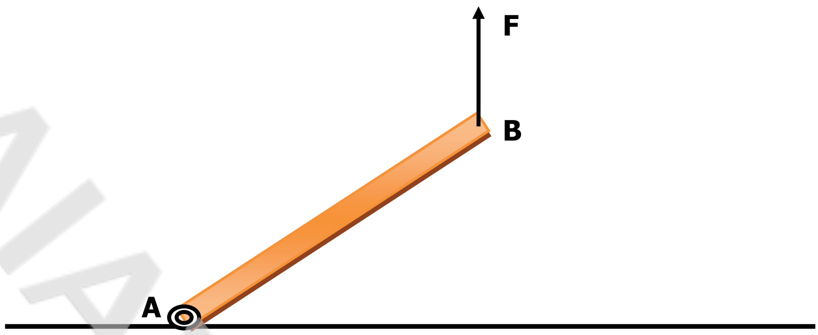
α) συνεχίζει να ισορροπεί
β) αρχίζει να περιστρέφεται
γ) αρχίζει να εκτελεί μεταφορική κίνηση
δ) αρχίζει να εκτελεί σύνθετη κίνηση

2. Διπλή τροχαλία ισορροπεί με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμης μέτρου F=2mg η οποία ασκείται όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πηλίκο των ακτίνων R_1/R_2 των δύο τροχαλιών ($R_1>R_2$) είναι ίσο με:



α) 2,5
β) 4
γ) 5
δ) 4,5

3. Η ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει βάρος w, στηρίζεται στην άρθρωση Α και παραμένει ακίνητη με τη δράση της κατακόρυφης δύναμης F.



A) Η δύναμη F′ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση:
α) είναι πλάγια
β) είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω
γ) είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω

B) Ισχύει:
α) $F=2w$ **β)** $F=w/2$ **γ)** $\Sigma\tau_{(A)}>\Sigma\tau_{(B)}$

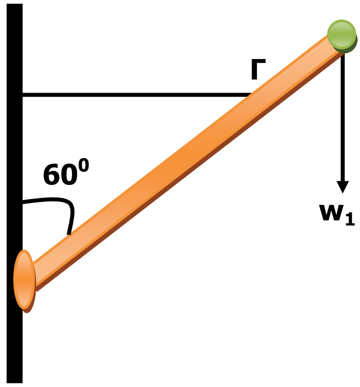
Ερωτήσεις ανάπτυξης

4. Ένα ελεύθερο στερεό σώμα δέχεται τη δράση δύο ομοεπίπεδων δυνάμεων.
α) Να αποδείξετε ότι για να ισορροπεί αυτό το σώμα θα πρέπει οι δύο αυτές δυνάμεις να έχουν τον ίδιο φορέα, ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.
β) Είναι δυνατό να ισορροπεί αυτό το στερεό αν οι δυνάμεις έχουν παράλληλους φορείς, ίσα μέτρα και αντίθετες φορές;

5. Ένα στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών ομοεπίπεδων και μη παράλληλων δυνάμεων. Να αποδείξετε ότι οι φορείς και των τριών δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Μία ομογενής δοκός βάρους w=100N και μήκους l=2m είναι στερεωμένη από το ένα άκρο της με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Ένα οριζόντιο αβαρές σκοινί δένεται στον τοίχο και σε σημείο Γ της ράβδου που απέχει 1,5m από την άρθρωση έτσι ώστε η ράβδος να σχηματίζει γωνία 60^o με τον τοίχο. Από το άλλο άκρο της ράβδου κρέμεται σώμα βάρους w_1=50N. Να υπολογίσετε:



α) τη τάση του σκοινιού

β) την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

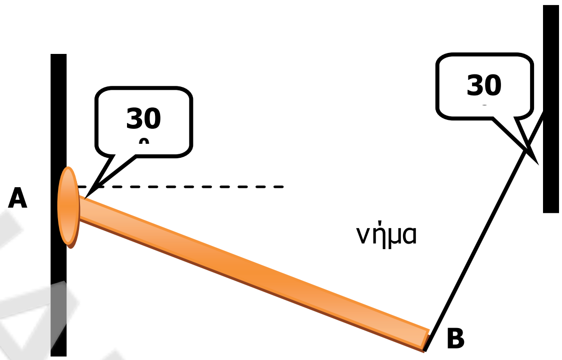
Απ: *α)* $T=\dfrac{400\sqrt{3}}{3}N$, *β)* $F_x=\dfrac{400\sqrt{3}}{3}N$, $F_y=150N$

2. Μια ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μήκος 2m και βάρος 200N. Η ράβδος στηρίζεται σε τοίχο μέσω άρθρωσης στο σημείο Α. Σε απόσταση 0,2m από το άλλο άκρο της Γ κρέμεται μέσω νήματος ένα σώμα βάρους 100N. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση μέσω κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m το οποίο κρέμεται από την οροφή και είναι συνδεδεμένο στο άκρο της Γ. Να υπολογιστούν:

α) η παραμόρφωση του ελατηρίου,

β) η δύναμη από την άρθρωση.

3. Η ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει βάρος w=8N και ισορροπεί με την βοήθεια της άρθρωσης Α και του αβαρούς νήματος . Το μέτρο της ροπής του βάρους w ως προς το σημείο Α ισούται με $4\sqrt{3}$ N.m. Να υπολογίσετε:



α) τη ροπή της τάσης του νήματος ως προς το σημείο Α
β) το μέτρο της τάσης του νήματος
γ) το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.
Απ. α) $+4\sqrt{3}$ *N.m* *β)* $2\sqrt{3}$ *N* *γ)* $\sqrt{28}$ *N*

✓ **Στη περίπτωση που το σώμα που ισορροπεί είναι σφαίρα, κύλινδρος ή τροχός ένα βολικό σημείο υπολογισμού των ροπών είναι το κέντρο του σώματος.**

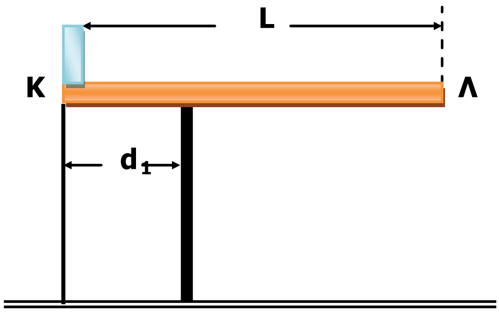
4. Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει βάρος w=100N και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=60^0$ με την βοήθεια του οριζόντιου νήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο.

β) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό από το σχοινί και από το κεκλιμένο επίπεδο.

Απ: $T=\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ *N* , $F=\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ *N*

5. Άκαμπτη ομογενής σανίδα μήκους L=6m και βάρους w=400N στηρίζεται σε ένα υποστήριγμα και ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που το ένα άκρο του είναι δεμένο στο άκρο Κ της σανίδας και το άλλο στο δάπεδο. Πάνω στη σανίδα και στο άκρο της Κ έχει στερεωθεί ένα μικρό σώμα βάρους w_1=200N , οπότε η τάση του νήματος είναι ίση με μηδέν.



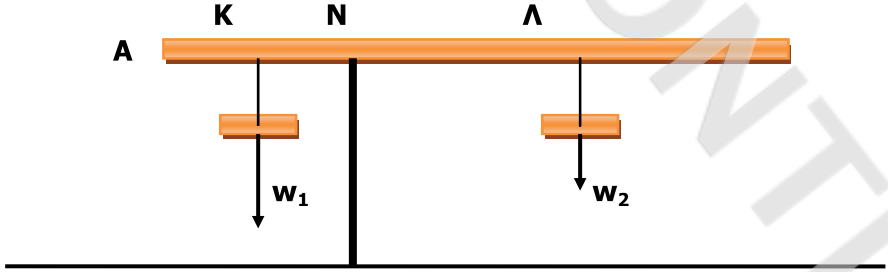
α) Να υπολογίσετε την απόσταση d_1 του σημείου επαφής της σανίδας με το υποστήριγμα από το άκρο Κ

β) Στη σανίδα ανεβαίνει ένα μικρό παιδί μάζας m_2=30Kg και στέκεται ακίνητο στο άκρο Λ της σανίδας. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από το υποστήριγμα.

γ) Το μικρό παιδί αρχίζει να κινείται προς το άκρο Κ και φτάνει σε τέτοιο σημείο ώστε μόλις η σανίδα να μην ανατρέπεται. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της τάσης του νήματος με την απόσταση χ του παιδιού από το άκρο Λ για τη μετακίνησή του αυτή.

Απ. α) 2 m β) 1500 N γ) T=600-150x (S.I) , 0≤χ<4m

6. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια ομογενής ράβδος που έχει μήκος L=2m και βάρος w=8N και στηρίζεται σε ένα υποστήριγμα. Δύο μικρά βάρη w_1=20N και w_2=12N είναι κρεμασμένα από τα σημεία Κ και Λ της ράβδου που απέχουν από το άκρο της Α αποστάσεις d_1=0,2m και d_2=1,5m αντίστοιχα. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.



α) Να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα.
β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Ν από το άκρο Α της ράβδου.
γ) Μετακινούμε το υποστήριγμα κατά Δx=0,25m προς το άκρο Β της ράβδου. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το σημείο Α πρέπει να κρεμάσουμε ένα σώμα βάρους w_3=12,5N, ώστε η ράβδος να συνεχίσει να ισορροπεί οριζόντια.
Απ. α) 40 N β) 0,75m γ) 1,8m

✓ **Όταν ένα στερεό σώμα ισορροπεί και τείνει να ολισθήσει πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια, τότε δέχεται από την επιφάνεια αυτή δύναμη στατικής τριβής. Η τιμή της δύναμης αυτής εξαρτάται και από τις άλλες δυνάμεις που ασκούνται και κυμαίνεται από:**

$$0 \leq T_{\sigma} \leq T_{\sigma,max} = T_{o\rho}$$

όπου $T_{\sigma,max} = T_{o\rho} = \mu_{o\rho}.N$ **είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η στατική τριβή και** $\mu_{o\rho}$ **είναι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής. Θα καταλαβαίνουμε ότι η στατική τριβή είναι οριακή (μέγιστη) αν η εκφώνηση αναφέρει ότι το σώμα μόλις που δεν ολισθαίνει.**

7. Μία σκάλα βάρους w=300N στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και δαπέδου είναι $\mu_{o\rho}$=0,4. Να βρείτε τη μικρότερη γωνία που μπορεί να σχηματίζει η σκάλα με το δάπεδο ώστε να μη γλιστρήσει όταν:
α) ο τοίχος είναι λείος
β) ο τοίχος παρουσιάζει με τη σκάλα συντελεστή οριακής στατικής τριβής $\mu_{o\rho}$=0,5
Απ: α) εφθ=1,25, β) εφθ=1

8. Μια ομογενής σανίδα μήκους L=4m και βάρους w=60N ισορροπεί ακίνητη στηριζόμενη σε λείο κατακόρυφο τοίχο και στο μη λείο έδαφος. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής ανάμεσα στη σανίδα και στο έδαφος είναι $\mu_{ορ}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ και η γωνία που σχηματίζει η σανίδα με το δάπεδο είναι $\varphi=60^0$.

α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο.

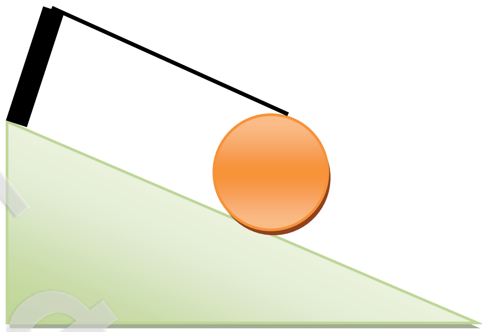
β) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από το δάπεδο.

γ) Να βρείτε μέχρι ποιο σημείο της σανίδας μπορεί να σταθεί ένας άνθρωπος μάζας m=40Kg, χωρίς να γλιστρήσει η σανίδα.

Δίνεται $g=10\ m/s^2$.

Απ: α) $10\sqrt{3}\,N$ β) $10\sqrt{39}\,N$ γ) 2m

9. Ο τροχός του διπλανού σχήματος ισορροπεί πάνω σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με την βοήθεια του νήματος το οποίο είναι παράλληλο με το επίπεδο. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής ανάμεσα στο κεκλιμένο επίπεδο και τον τροχό είναι $\mu_{ορ}=0,5$.

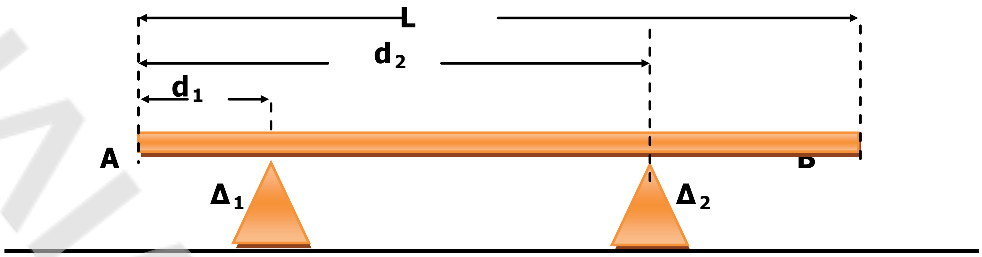


Να υπολογίσετε για ποιες τιμές της γωνίας κλίσης φ του κεκλιμένου επιπέδου, ο τροχός δεν γλιστρά.

Απ: $\varphi \leq 45^0$

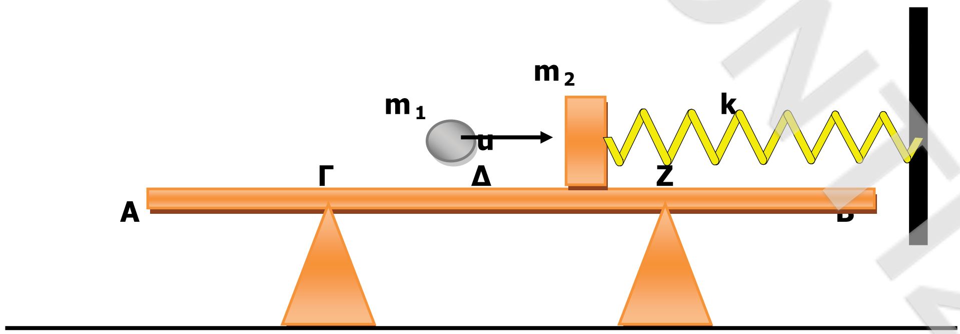
Όταν ένα στερεό σώμα ισορροπεί στηριζόμενο σε δύο σημεία Α και Β και είναι έτοιμο να ανατραπεί στρεφόμενο γύρω από το ένα σημείο (π.χ το Β), τότε η δύναμη που δέχεται από το άλλο σημείο (π.χ το Α) μηδενίζεται.

10. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια ομογενής ράβδος που έχει μήκος L=20m και βάρος w=450N και στηρίζεται σε δύο υποστηρίγματα $Δ_1$ και $Δ_2$,τα οποία απέχουν από το άκρο της Α αποστάσεις d_1=2m και d_2=17m αντίστοιχα. Ένας άνθρωπος βάρους w_1=600N στέκεται αρχικά ακίνητος στο άκρο της Α.



α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων N_1 και N_2 που δέχεται η δοκός από τα δύο υποστηρίγματα.
β) Ο άνθρωπος αρχίζει να μετακινείται κατά μήκος της δοκού από το άκρο Α προς το άκρο Β. Να γράψετε τις συναρτήσεις των μέτρων των δυνάμεων που δέχεται η ράβδος από τα δύο υποστηρίγματα σε σχέση με την απόσταση x του ανθρώπου από το άκρο Α της ράβδου, $N_1=f(x)$ και $N_2=f(x)$ και να τις παραστήσετε γραφικά σε κοινό σύστημα αξόνων**.** Με βάση το διάγραμμα που κατασκευάσατε να δικαιολογήσετε γιατί η ράβδος δεν ανατρέπεται.
γ) Να βρείτε τη θέση του ανθρώπου πάνω στη ράβδο για την οποία οι δύο δυνάμεις N_1 και N_2 έχουν ίσα μέτρα.
Απ. α) 890 N , 160 N β) $N_1=890-40x$, $N_2=160+40x$ γ) 9,125 m από το Α

11. Βλήμα μάζας $m_1=0{,}2Kg$ κινούμενο με ταχύτητα $u=50m/s$ συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=3{,}8Kg$ το οποίο ισορροπεί πάνω σε λεία οριζόντια και ομογενή δοκό ΑΒ μάζας $M=2Kg$. Το σώμα είναι στερεωμένο στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=100$ N/m του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο.



Η δοκός που έχει μήκος L=2m στηρίζεται σε δύο τριγωνικές βάσεις. Να βρεθούν:

α) Οι δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη δοκό όταν το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί στο μέσο της απόστασης ΔΖ. Τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΖ, ΖΒ είναι ίσα μεταξύ τους.(Το σημείο Δ είναι το μέσο της δοκού).

β) Η θέση του συσσωματώματος στην οποία η ράβδος θα είναι έτοιμη να ανατραπεί.

γ) Η χρονική στιγμή που θα συμβεί η κατάσταση του ερωτήματος (β) αν η κρούση συνέβη τη χρονική στιγμή t=0.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή του ερωτήματος (γ).

Απ: α) N_1=19,5N N_2=38,5N β) 0,25m δεξιά του Ζ γ) t=π/10s
δ) dp/dt=-50N dK/dt=0

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

✓ Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός **στερεού σώματος** ως προς έναν άξονα , το άθροισμα των γινομένων όλων των στοιχειωδών μαζών m_1 , m_2 ,…….,m_n από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από αυτό τον άξονα.

$$I = m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2 + \cdots$$

✓ Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός **υλικού σημείου** μάζας m ως προς έναν άξονα από τον οποίο απέχει απόσταση r, το γινόμενο

$$I = m . r^2$$

✓ Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και η μονάδα μέτρησής της στο S.I. είναι το 1 $Kg.m^2$

✓ Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τα εξής:

α) την θέση του άξονα περιστροφής

β) την μάζα του σώματος
γ) την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής
Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι το ίδιο στερεό σώμα μπορεί να έχει πολλές ροπές αδράνειας ,ενώ έχει μόνο μια μάζα.

✓ Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια του σώματος στην περιστροφική κίνηση. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας τόσο δυσκολότερα μπορούμε να αλλάξουμε την στροφική του κατάσταση (να του αλλάξουμε τη γωνιακή του ταχύτητα ή ισοδύναμα να του δώσουμε γωνιακή επιτάχυνση).

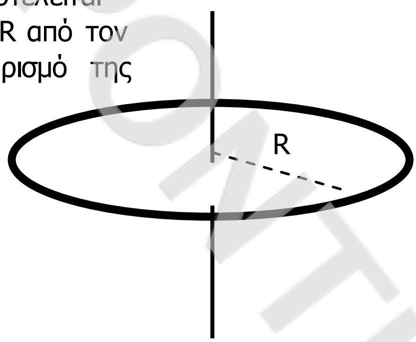
✓ Η ροπή αδράνειας στερεού σώματος ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και εφόσον το στερεό έχει σφαιρική συμμετρία (π.χ σφαίρα) ή κυλινδρική συμμετρία (π.χ δίσκος, δακτύλιος, κύλινδρος) δίνεται από το γενικό τύπο

$$\boldsymbol{I = \lambda . M R^2}$$

όπου λ είναι ένας αριθμητικός συντελεστής.

Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας αμελητέου πάχους ομογενούς δακτυλίου μάζας Μ και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Όλες οι στοιχειώδεις μάζες από τις οποίες αποτελείται ο δακτύλιος απέχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας θα είναι:



$I=m_1.R^2+m_2.R^2+$………………….. ή

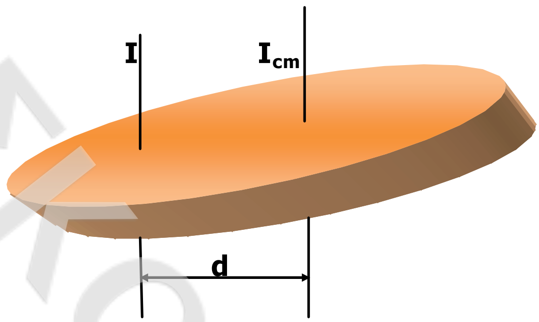
$I=(m_1+m_2+$…………………..$).R^2$ ή

$$\boldsymbol{I = M.R^2}$$

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα του Steiner.

Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς οποιοδήποτε άλλο παράλληλο άξονα που απέχει απόσταση d από τον προηγούμενο άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_{cm} + M.d^2$$



✓ Το θεώρημα του Steiner εφαρμόζεται όταν γνωρίζω την I_{cm} και ο άξονας περιστροφής δε διέρχεται από το κέντρο μάζας αλλά είναι κάποιος άλλος παράλληλος άξονας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Ένα βιβλίο βρίσκεται πάνω στο τραπέζι. Να διαλέξετε δύο άξονες κάθετους στο επίπεδο του βιβλίου ως προς τους οποίους το βιβλίο παρουσιάζει

α) ελάχιστη ροπή αδράνειας.

β) μέγιστη ροπή αδράνειας.

Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

2. Σε οριζόντιο δίσκο μάζας M και ακτίνας R που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, είναι στερεωμένο ένα σημειακό αντικείμενο μάζας m=M/8, σε απόσταση d από τον άξονα περιστροφής. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα αυτό δίνεται από τον τύπο $I=(1/2)MR^2$. Αν το αντικείμενο αυτό μεταφερθεί από το σημείο που βρισκόταν αρχικά στο κέντρο του δίσκου τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται κατά 20%. Η απόσταση d είναι ίση με:

α) R **β)** R/2 **γ)** R/4 **δ)** R/8

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας συστήματος σωμάτων ως προς έναν άξονα, τότε υπολογίζουμε ξεχωριστά τις ροπές αδράνειας του κάθε σώματος I_1, I_2,.... και στη συνέχεια τις προσθέτουμε.

$$\boldsymbol{I_{o\lambda} = I_1 + I_2 + \cdots}$$

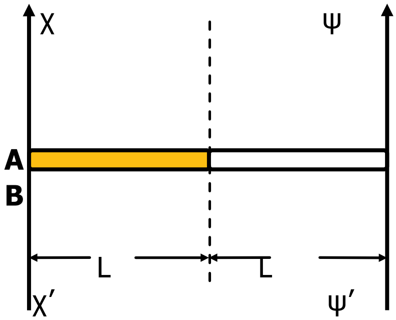
1. Ομογενής δίσκος έχει μάζα M=8Kg και ακτίνα R. Σημείο Κ του δίσκου απέχει από το κέντρο Ο απόσταση d=0,5m. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα y΄y που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι I_1=18kg·m^2.

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του δίσκου.

β) Στερεώνουμε σε σημείο Ζ πάνω στο δίσκο μια σημειακή μάζα m=2Kg και παρατηρούμε ότι η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα ως προς τον άξονα y΄y διαφέρει από τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το ίδιο άξονα κατά 25%. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση της σημειακής μάζας m από το κέντρο Ο. Δίνεται για τον δίσκο: $I_{cm} = {}^1/_2 . MR^2$

Απ: α) R=2m, β) r=1m

2. Η λεπτή ράβδος του διπλανού σχήματος είναι κατασκευασμένη η μισή από ένα υλικό πυκνότητας d_1 και η άλλη μισή από άλλο υλικό πυκνότητας d_2. Για τις πυκνότητες των δύο υλικών ισχύει η σχέση $d_1=30d_2$. Να βρείτε το λόγο των ροπών αδράνειας της ράβδου ως προς τους δύο άξονες χ΄χ και ψ΄ψ.

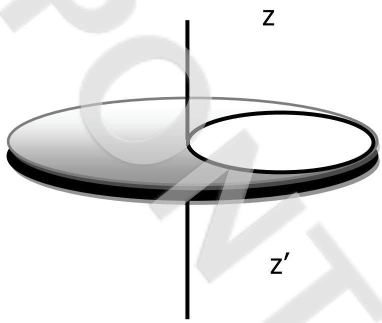


Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας λεπτής και ομογενούς ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτή ισούται με $I_{cm} = {}^1/_{12}.M.l^2$

Απ: 37/211

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος ως προς έναν άξονα, το οποίο προκύπτει αν από κάποιο αρχικό σώμα αφαιρέσουμε ένα κομμάτι, τότε υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του αρχικού σώματος και του κομματιού ως προς τον ίδια άξονα και στη συνέχεια τις αφαιρούμε.

3. Ένας ομογενής δίσκος έχει μάζα Μ και ακτίνα R. Από το δίσκο αφαιρούμε ένα κυκλικό κομμάτι μάζας Μ΄=Μ/4 και ακτίνας R΄=R/2 όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του σώματος που απομένει, ως προς άξονα zz΄ που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Δίνεται για τον δίσκο: $I_{cm} = {}^1/_2.MR^2$



Απ. $I = {}^{13}/_{32}.MR^2$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

✓ Έστω ότι ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα **σταθερό άξονα**. Για να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα (αποτέλεσμα) θα πρέπει να του ασκηθεί συνισταμένη ροπή (αιτία).

✓ Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης συνδέει την **αιτία (Στ)** με το **αποτέλεσμα (Δω/Δt)**, και διατυπώνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma}$$

α_γ: είναι η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος
I: είναι η ροπή αδράνειας του σώματος **ως προς τον άξονα περιστροφής.**
Στ: το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση αυτού του τύπου <u>θετική θεωρείται μια ροπή αν βοηθάει την περιστροφή (δηλαδή είναι ομόρροπη με την γωνιακή ταχύτητα) και αρνητική αν δυσκολεύει την περιστροφή (δηλαδή είναι αντίρροπη με την γωνιακή ταχύτητα).</u>

✓ Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι αν Στ=0 τότε και α_γ=0 δηλαδή Δω=0 ή ω=σταθερή. <u>Άρα αν το σώμα αρχικά δεν στρεφότανε θα συνεχίσει να μην στρέφεται, ενώ αν στρεφότανε θα διατηρήσει την ίδια γωνιακή ταχύτητα (ομαλή στροφική κίνηση).</u> Επίσης αν Στ=σταθ. τότε και α_γ=σταθ. επομένως το σώμα θα εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση.

✓ Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και σε περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται αρκεί να συντρέχουν οι παρακάτω προϋποθέσεις.
i) να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.
ii) να είναι άξονας συμμετρίας
iii) να μένει διαρκώς παράλληλος με τον εαυτό του.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Μια συμπαγής και μια κοίλη σφαίρα ίδιας μάζας και ίδιας ακτίνας περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, γύρω από παράλληλους σταθερούς άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των δύο σφαιρών. Αν εφαρμόσουμε ροπή ίσου μέτρου σε κάθε σφαίρα:

α) η συμπαγής σφαίρα ακινητοποιείται σε μικρότερο χρόνο
β) η κοίλη σφαίρα ακινητοποιείται σε μικρότερο χρόνο
γ) οι δύο σφαίρες ακινητοποιούνται σε ίσους χρόνους

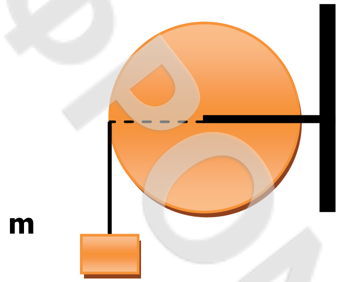
2. Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M και ακτίνα R και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της. Το μικρό σώμα που είναι δεμένο στο αβαρές νήμα έχει μάζα $m=M/4$ και ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τον τύπο $I=(1/2)MR^2$. Αρχικά κρατάμε το σύστημα ακίνητο με το νήμα τεντωμένο και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της έχει μέτρο:

α) 5/4 Mg

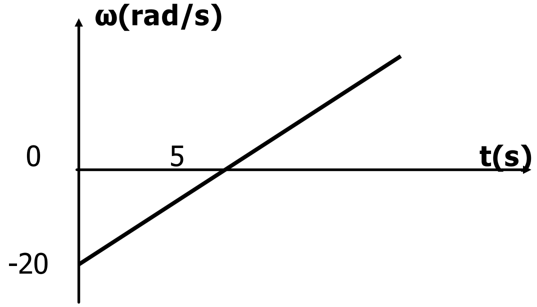
β) 4/3 Mg

γ) 8/7 Mg

δ) 7/6 Mg



3. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της γωνιακής ταχύτητας ενός δίσκου, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα σε συνάρτηση με το χρόνο.



Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=4Kg.m^2$, τότε η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης ροπής είναι:

α) -4 N.m **β)** -16 N.m **γ)** +16 N.m **δ)** +4 N.m

4. Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος που έχουν ίσες ακτίνες αφήνονται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

Α) Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων των δύο σωμάτων ισχύει:

i) $\alpha_{γων,(σφ)} > \alpha_{γων,(κυλ)}$

ii) $\alpha_{γων,(σφ)} < \alpha_{γων,(κυλ)}$

iii) $\alpha_{γων,(σφ)} = \alpha_{γων,(κυλ)}$

Β) Ποιο από τα δύο σώματα φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου πιο γρήγορα;

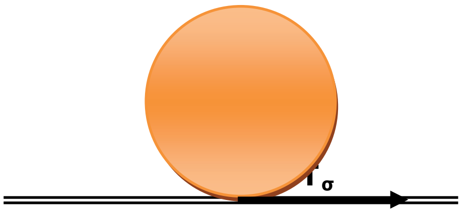
Δίνεται ότι: $I_{cm,σφ}=(2/5)MR^2$ και $I_{cm,κυλ}=(1/2)MR^2$

5. Ένας κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί από κάποιο σημείο κεκλιμένου επιπέδου που έχει γωνία κλίσης φ. Σε ποια από τις επόμενες περιπτώσεις το κέντρο μάζας του κυλίνδρου αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση;

α) Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται.

β) Το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

6. Μια σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται προς τα δεξιά χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με τη βοήθεια οριζόντιας σταθερής δύναμης F η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας της. Η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά και η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της δίνεται από τον τύπο $I=\lambda MR^2$. Στο σχήμα φαίνεται η φορά της στατικής τριβής T_σ που ασκείται στο σώμα.



1) Η δύναμη F έχει:

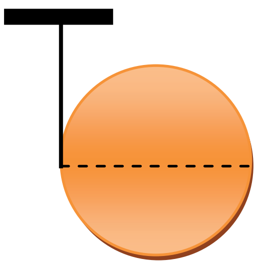
α) ίδια φορά με την T_σ **β)** αντίθετη φορά από την T_σ

2) Το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα ικανοποιεί τη σχέση:

α) $T_\sigma=(\lambda/\lambda+1).F$ **β)** $T_\sigma=(\lambda+1).F$ **γ)** $T_\sigma=(\lambda+1/\lambda).F$

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

7. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας δίσκος στο αυλάκι του οποίου έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο να κινηθεί. Δίνεται: $I=1/2(MR^2)$



α) Ο ρυθμός αύξησης της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι σταθερός και ανεξάρτητος της μάζας του.

β) Ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου είναι σταθερός και ίσος με g.
γ) Η ροπή του βάρους του δίσκου καθορίζει την γωνιακή επιτάχυνση.
δ) Ο δίσκος εκτελεί μεταφορική κίνηση.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

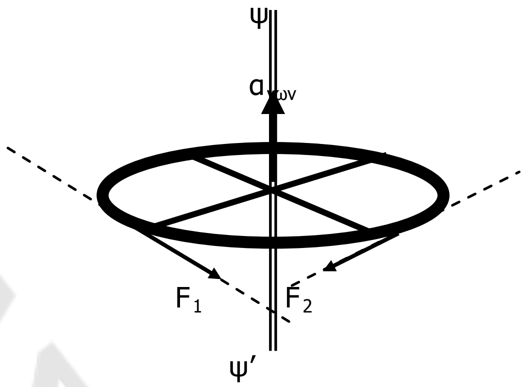
1η Κατηγορία ασκήσεων

Ένα στερεό σώμα στρέφεται επιταχυνόμενα γύρω από ένα σταθερό άξονα.

Α) Με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση

Στα προβλήματα αυτά χρησιμοποιούμε:
i) Τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$
ii) Τις σχέσεις $\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma.t$ **και** $\Delta\theta = \omega_0.t + {}^1\!/_2 \,.\, \alpha_\gamma.t^2$**, εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, δηλαδή εφόσον** $\Sigma\tau = \sigma\tau\alpha\theta.$

1. Ο τροχός του σχήματος είναι αρχικά ακίνητος , έχει μάζα M=5Kg ακτίνα R=0,2m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Από τη στιγμή t=0 και μετά ασκούμε στο τροχό δύο δυνάμεις F_1 και F_2 σταθερού μέτρου που εφάπτονται συνεχώς σ’ αυτόν. Η ροπή της δύναμης F_1 ως προς τον άξονα ψ’ψ έχει μέτρο ίσο με 10N.m και η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά ο τροχός έχει μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=2 rad/s^2 και τη κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:



α) τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη στιγμή t_1=10 s
β) τα μέτρα των δύο δυνάμεων.
Θεωρήστε ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.
Απ. α) 20 rad/s β) 50N , 48 N

2. Ένας τροχός μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,2m μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα y΄y που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Αρχικά ο τροχός είναι ακίνητος και τη χρονική στιγμή t=0 δέχεται τη δράση των ροπών των δύο δυνάμεων:
i. μιας δύναμης F_1 που δημιουργεί σταθερή ροπή $τ_1$ ως προς σταθερό άξονα y΄y και
ii. μιας δύναμης τριβής Τ που δημιουργεί σταθερή ροπή μέτρου 0,4N·m ως προς τον άξονα y΄y, αντίθετης φοράς από τη φορά της ροπής που δημιουργεί η δύναμη F_1
Τη χρονική στιγμή t_1=10s καταργείται η δύναμη F_1 και ο τροχός δέχεται μόνο την επίδραση της τριβής, με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t_2=14s να σταματήσει να κινείται.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του τροχού κατά τη διάρκεια που σ′ αυτόν επιδρά μόνο η δύναμη της τριβής.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής $τ_1$ που δημιουργεί η δύναμη F_1
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του
τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα y΄y, υπολογίζεται από τη σχέση: $I=MR^2$

Απ. α) 5 rad/s^2 β) 0,56 N.m

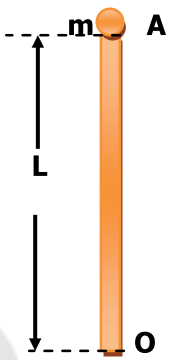
Β) Με μεταβαλλόμενη γωνιακή επιτάχυνση

Στα προβλήματα αυτά χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

$$\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$$

και αφού $\Sigma\tau \neq \sigma\tau\alpha\theta$ βρίσκουμε τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση. Είναι προφανές πως στη περίπτωση αυτή δεν ισχύουν οι τύποι της ομαλά μεταβαλλόμενης στροφικής κίνησης.

3. Λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους L=2m και μάζας M=6Kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σ΄ αυτή. Στο άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένη σημειακή μάζα m=0,5Kg. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνουμε μια μικρή ώθηση στη ράβδο οπότε αυτή αρχίζει να περιστρέφεται. Να υπολογίσετε:



α) τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακή μάζα, ως προς τον άξονα περιστροφής

β) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από θέση στην οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 30^0

γ) το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης της μάζας m τη στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I=(1/3)ML^2$ και $g=10$ m/s^2.

Απ. α) 10 Kg.m^2 β) 3,5 rad/s^2 γ) 14 m/s^2

$2^{η}$ Κατηγορία ασκήσεων

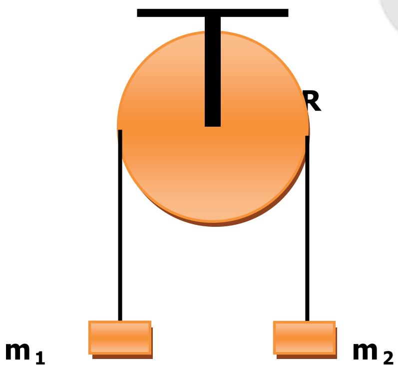
Α) Τροχαλία που εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση σε συνδυασμό με ένα ή δύο σώματα που εκτελούν επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση.

Στα προβλήματα αυτά ασχολούμαστε με την κίνηση του κάθε σώματος ξεχωριστά.

i) Για το σώμα που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση (τροχαλία) χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $Στ = I.α_γ$ **και τις σχέσεις** $ω = ω_0 + α_γ.t$ **και** $Δθ = ω_0.t + {}^1/_2.α_γ.t^2$ **, εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.**

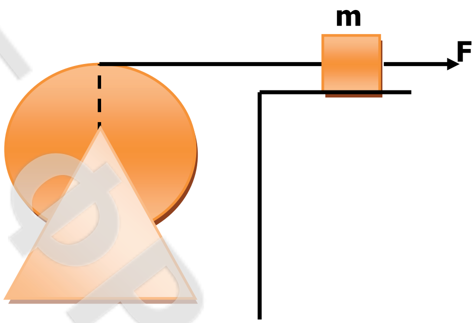
ii) Για το κάθε σώμα που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $ΣF = m.α$ **και τους τύπους** $υ = υ_0 + α.t$ **και** $= υ_0.t + {}^1/_2.α.t^2$ **, εφόσον η γραμμική επιτάχυνση είναι σταθερή.**

4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία τροχαλία μάζας M=2Kg και ακτίνας R=0,1m, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Δύο σώματα με μάζες m_1=3Kg και m_2=1Kg είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό λεπτό νήμα μεγάλου μήκους που περνά από το αυλάκι της τροχαλίας. Αρχικά το σύστημα συγκρατείται ακίνητο με τα σώματα να βρίσκονται στο ίδιο ύψος και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης της μεταφορικής κίνησης που εκτελούν τα δύο σώματα καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος που δέχεται το καθένα από τα δύο σώματα.
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
δ) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας όταν τα σώματα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $h=36m$.
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τη σχέση $I=(1/2)MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$. Θεωρήστε ότι το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας.
Απ. α) 4 m/s² , 40 rad/s²   β)18 N , 14 N   γ) 8 m/s   δ) 120 rad/s

5. Στο διπλανό σχήμα η τροχαλία έχει μάζα $M=4kg$, ακτίνα $R=0,2m$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Στην τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές, μη εκτατό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο με σώμα μάζας $m=2kg$ που μπορεί να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο.

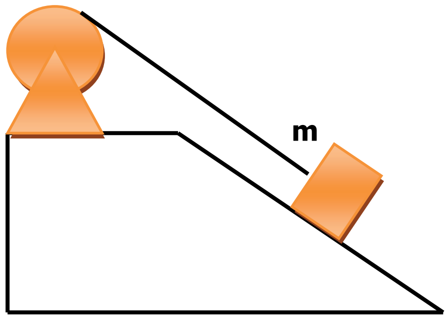


Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου και του σώματος ισούται με $\mu=0,2$. Αρχικά το σύστημα τροχαλία-σώμα κρατείται ακίνητο με το νήμα τεντωμένο όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκούμε στο σώμα μάζας m οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F=20N$.
Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας
β) το μήκος που έχει διανύσει το σώμα μάζας m στο οριζόντιο δάπεδο από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας έχει αποκτήσει την τιμή $\omega=100rad/s$
γ) τον αριθμό των περιστροφών που έχει διαγράψει η τροχαλία από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σώματος έχει αποκτήσει την τιμή $u_1=8m/s$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τη σχέση $I=1/2MR^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$.

Απ. α) 20 rad/s²   β) 50 m   γ) 20/π στροφές.

6. Στο επόμενο σχήμα το σώμα μάζας m=2kg μπορεί να κινείται χωρίς τριβές στο κεκλιμένο επίπεδο που έχει γωνία κλίσης φ= 30°. Η τροχαλία έχει μάζα Μ, ακτίνα R=0,2m και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές, μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει



το σώμα με μάζα m. Αρχικά το σύστημα τροχαλία-σώμα κρατείται ακίνητο με το νήμα τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $υ_1=8m/s$, η τροχαλία έχει διαγράψει γωνία $θ_1=80rad$. Να υπολογιστούν:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας
β) το μέτρο της τάσης του νήματος που δέχεται το σώμα
γ) η ροπή αδράνειας της τροχαλίας

Δίνεται: $g=10m/s^2$

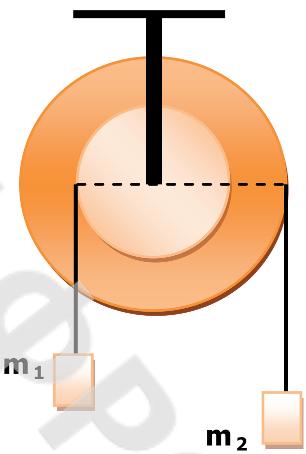
Απ. α) 10 rad/s²   β) 6 N   γ) 0,12 Kg.m²

Β) Διπλή τροχαλία που εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση σε συνδυασμό με ένα ή δύο σώματα που εκτελούν επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση.

Στη διπλή τροχαλία εργαζόμαστε όπως και στη απλή τροχαλία λαμβάνοντας υπόψη μας τα εξής.
i) Τα στροφικά μεγέθη $\Delta\theta, \omega, \alpha_\gamma$ είναι κοινά και για τις δύο τροχαλίες αφού στρέφονται σαν ένα στερεό σώμα.
ii) Τα μεταφορικά μεγέθη $\Delta S, \upsilon, \alpha$ δεν είναι κοινά και για τα δύο σώματα αφού οι τροχαλίες έχουν διαφορετικές ακτίνες και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boldsymbol{\Delta S = \Delta\theta.R, \quad \upsilon = \omega.R, \quad \alpha = \alpha_\gamma.R}$$

7. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια διπλή τροχαλία που αποτελείται από δύο ομόκεντρους ομογενείς δίσκους με ακτίνες R_1=0,2m και R_2=0,4m και μάζες M_1=M_2=12Kg. Οι δύο δίσκοι συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να περιστρέφονται σαν ένα σώμα χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους. Στα δύο αυλάκια των δίσκων της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρή νήματα στα άκρα των οποίων έχουμε δέσει δύο σώματα με μάζες m_1=1Kg και m_2=6Kg.



Αρχικά το σύστημα τροχαλία– σώματα συγκρατείται ακίνητο και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

β) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης κάθε σώματος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 τη στιγμή t_1, αν δίνεται ότι μέχρι τη στιγμή t_1 έχει ξετυλιχθεί από το μεγάλο δίσκο σχοινί μήκους L=18m.

δ) Να βρείτε τον αριθμό των περιστροφών της τροχαλίας από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αποκτά τιμή u_2=16m/s.

Δίνεται για κάθε δίσκο: I=(1/2)MR^2 και g=10m/s^2.

Απ. α) 10 rad/s² β) 2 m/s² , 4 m/s² γ) 6 m/ δ) 40/π στροφές

3η Κατηγορία ασκήσεων

Ένα στερεό σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κίνηση και περιστροφική κίνηση γύρω από νοητό άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του.

Α) Ένας τροχός (κύλινδρος, σφαίρα) κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο ή κεκλιμένο δάπεδο.

Στα προβλήματα αυτά ασχολούμαστε με την κάθε κίνηση ξεχωριστά.

i) Για την περιστροφική κίνηση χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$ **και τις σχέσεις** $\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma.t$ **και** $\Delta\theta = \omega_0.t \pm {}^1/_2.\alpha_\gamma.t^2$ **, εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.**

ii) Για την μεταφορική κίνηση χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\Sigma F = m.\alpha_{cm}$ **και τους τύπους** $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_{cm}.t$ **και** $x = \upsilon_0.t \pm {}^1/_2.\alpha_{cm}.t^2$ **, εφόσον η γραμμική επιτάχυνση είναι σταθερή.**

iii) Επίσης ισχύουν οι σχέσεις $S = \theta.R,\ \upsilon_{cm} = \omega.R,\ \alpha_{cm} = \alpha_\gamma.R$

8. Μία ομογενής σφαίρα, ένας λεπτός δακτύλιος και ένας ομογενής κύλινδρος βρίσκονται στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t=0 αφήνονται, από το ίδιο ύψος, ελεύθερα να κινηθούν χωρίς να ολισθαίνουν και μετατοπίζονται κατακόρυφα κατά h από την αρχική τους θέση. Να διερευνήσετε ποιο από τα τρία σώματα εκτελεί πιο γρήγορα τη μετακίνηση αυτή.

Δίνονται για τη σφαίρα: $I_{σφ}=(2/5)M_{σφ}R^2$, για τον δακτύλιο: $I_{δακ}=M_{δακ}\ R^2$ και για τον κύλινδρο: $I_{κυλ}=(1/2)M_{κυλ}\ R^2$

Απ. Η σφαίρα.

9. Μία ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R=0,2m αφήνεται τη χρονική στιγμή t=0 ελεύθερη να κινηθεί από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης $φ=30^o$. Η σφαίρα κυλίεται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.

α) Να σχεδιάσετε τη δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της σφαίρας καθώς και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της.

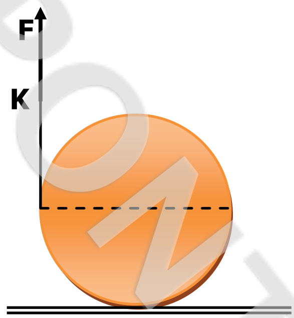
γ) Να υπολογίσετε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής $μ_{ορ}$ μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της σφαίρας, ώστε η σφαίρα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

δ) Την ίδια σφαίρα την εκτοξεύουμε από κάποιο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με φορά προς τα πάνω, έτσι ώστε να αρχίσει αμέσως να κυλίεται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης που αυτή αποκτά.

Δίνεται για τη σφαίρα: $I=(2/5)MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απ. β) $25/7\ m/s^2$, $125/7\ rad/s^2$ γ) $2\sqrt{3}/21$ δ) $125/7 rad/s^2$

10. Ομογενής κύλινδρος μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,4m, είναι αρχικά ακίνητος και βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή οριακής στατικής τριβής $μ_{ορ}=1/3$. Τη χρονική στιγμή t=0 ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του σκοινιού κατακόρυφη δύναμη μέτρου F=6N, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει αμέσως να κυλίεται προς τα δεξιά χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.



α) Να σχεδιάσετε τη δύναμη στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του.

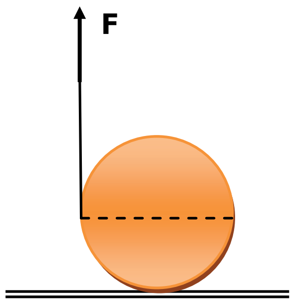
γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή που το άκρο Κ του σκοινιού έχει ανέβει κατά h=2,25m.

δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στο άκρο Κ του σκοινιού, ώστε ο κύλινδρος μόλις που να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.

Δίνεται για τον κύλινδρο: $I=(1/2)MR^2$ και $g=10m/s^2$

Απ. β) 5rad/s² , 2m/s²   γ) 3m/s   δ) 20/3 N

11. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,5m στον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη σταθερή δύναμη F οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu}=4\ rad/s^2$. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος

β) το μέτρο της δύναμης F

γ) το μέτρο της κάθετης αντίδρασης που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο

δ) το συντελεστή οριακής στατικής τριβής ανάμεσα στον κύλινδρο και στο δάπεδο, αν δίνεται ότι η τιμή της δύναμης F που υπολογίσατε στο α) ερώτημα είναι η μέγιστη δυνατή, ώστε ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

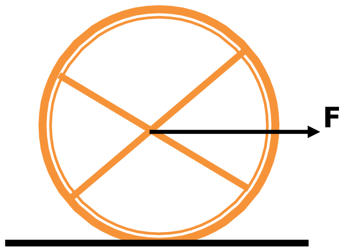
Δίνεται για τον κύλινδρο: $I=(1/2)MR^2$ και $g=10\ m/s^2$.

Απ: α) T=8N   β) F=12N   γ) N=28N   δ) $\mu_{o\rho}=2/7$

12. Ένας δίσκος μάζας M=5Kg και ακτίνας R=0,8m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0=20rad/s$ και τη χρονική στιγμή t=0 δέχεται οριζόντια σταθερή δύναμη F , που ασκείται στο κέντρο μάζας του, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αρχίσει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό και τελικά σταματά τη χρονική στιγμή $t_1=10$ s.

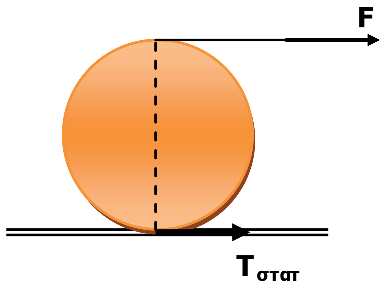
α) Να σχεδιάσετε τη δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται ο δίσκος δικαιολογώντας τη φορά της.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.
γ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F καθώς και το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο.
Δίνεται για το δίσκο: $I=(1/2)MR^2$.
Απ. β) 1,6m/s^2 γ) 12 N , 4N

13. Ένας τροχός μάζας M=0,4Kg και ακτίνας R=0,2m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα u_0=2m/s και τη χρονική στιγμή t=0 δέχεται οριζόντια σταθερή δύναμη F=6N, που ασκείται στο κέντρο μάζας του όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



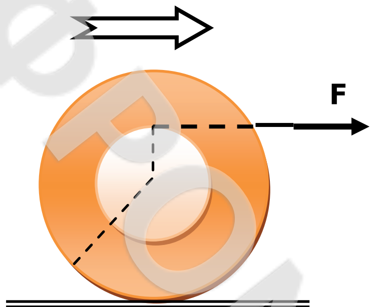
Ο τροχός συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά την άσκηση της δύναμης F.
α) Να σχεδιάσετε την στατική τριβή και να δικαιολογήσετε την φορά της.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του τροχού καθώς και το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης.
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1=2 s.
δ) Να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται ο τροχός από το οριζόντιο δάπεδο μετά την άσκηση της δύναμης F.
Δίνεται ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στη περιφέρειά του καθώς και ότι g=10 m/s^2
Απ. β) 7,5m/s^2 , 37,5rad/s^2 γ) 85rad/s δ) 5N

14. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=0,2m στον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Αρχικά ο κύλινδρος είναι ακίνητος και τη στιγμή t=0 ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος οριζόντια σταθερή δύναμη F=12N οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης ροπής καθώς και το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος.
γ) Καθώς ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο εισέρχεται σε μια περιοχή στην οποία ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $μ_σ$=0,2. Να εξετάσετε αν ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και στη περιοχή αυτή.
Δίνεται για τον κύλινδρο: $I=MR^2/2$ και g=10 m/s^2.
Απ. α) 20rad/s^2 β) 1,6N.m , 4N γ) Ναι

15. Το καρούλι του διπλανού σχήματος αποτελείται από ένα κύλινδρο μάζας m=2Kg και ακτίνας r=0,1m και από δύο ίδιους δίσκους μάζας M=0,5Kg και ακτίνας R=0,2m ο καθένας. Στον κύλινδρο έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα στο ελεύθερο άκρο του οποίου ασκούμε τη χρονική στιγμή t=0 οριζόντια σταθερή δύναμη F. Το καρούλι

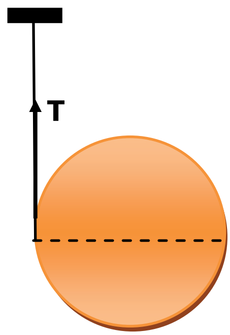


που είναι αρχικά ακίνητο ξεκινά να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και τη χρονική στιγμή t_1=2s έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_1$=40rad/s. Να υπολογίσετε:
α) τη ροπή αδράνειας του καρουλιού ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων
β) το μέτρο της συνισταμένης ροπής που δέχεται το καρούλι
γ) το μέτρο της στατικής τριβής που ασκείται σε κάθε δίσκο, καθώς και το μέτρο της δύναμης F.

Δίνεται για τον κύλινδρο και τους δίσκους: $I=MR^2/2$.
Απ. α) 0,03Kg.m² β) 0,6N.m γ) 1N , 10N

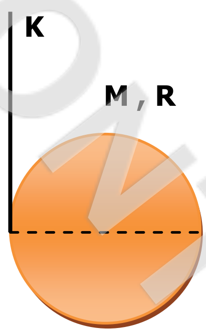
Β) Γιο-γιο.

16. Ο δίσκος του σχήματος είναι ομογενής, έχει μάζα M=0,6kg και ακτίνα R=0,2m. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο. Να υπολογιστούν:



α) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου, καθώς και το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης
β) το μέτρο της τάσης του νήματος που δέχεται ο δίσκος
γ) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή που έχει εκτελέσει N=12/π περιστροφές
δ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους l=1,2m
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του υπολογίζεται από τον τύπο: $I=(1/2)MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$.
Απ. α) 20/3 m/s², 100/3 rad/s² β) 2 N γ) 8 m/s δ) 20 rad/s

17. Σε κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



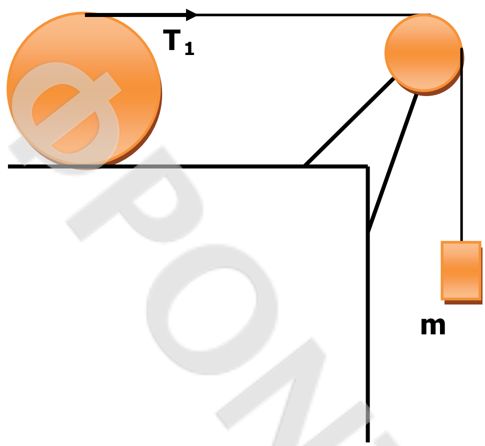
α) Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο κρατώντας ακίνητο το ελεύθερο άκρο του Κ, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}=200/3\ rad/s^2$. Σ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του ο κύλινδρος δέχεται συνισταμένη ροπή που έχει μέτρο ίσο με Στ=2N.m.

i) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου καθώς και την ακτίνα R.
ii) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο κύλινδρος καθώς και το μέτρο της δύναμης που δέχεται το χέρι μας από το νήμα.

β) Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο και ταυτόχρονα μετακινούμε το χέρι μας προς τα πάνω , έτσι ώστε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου να παραμένει ακίνητο. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή t_1=0,5 s.
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=MR^2/2$ και $g=10m/s^2$.
Απ. α) ι) 20/3 m/s^2 , 0,1 m ii) 40 N , 20 N β) 100 rad/s

Γ) Κίνηση κυλίνδρου με τη βοήθεια νήματος το οποίο συνδέεται μέσω τροχαλίας με σώμα που κάνει μεταφορική κίνηση.

18. Στο σχήμα φαίνεται ένας ακίνητος ομογενής κύλινδρος μάζας M=4kg και ακτίνας R=0,2m. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο, οπότε αυτός αρχίζει να κυλίεται στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Κατά τη διάρκεια της κύλισής του ο κύλινδρος δέχεται από το νήμα σταθερή δύναμη μέτρου T_1=6N. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος καθώς και το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης



β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1=0,5s.
γ) το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος με μάζα m καθώς και τη μάζα του m.

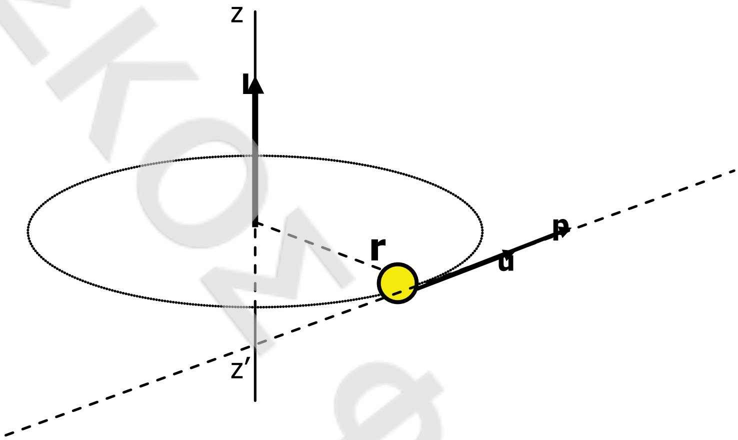
δ) το ύψος h που κατέβηκε το σώμα με μάζα m από τη χρονική στιγμή t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 που το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου ισούται με ω_2=20rad/s

Δίνεται για τον κύλινδρο: $I=MR^2/2$ και $g=10m/s^2$, επίσης η τροχαλία θεωρείται αβαρής.

Απ. α) 2 N , 10 rad/s^2 β) 5 rad/s γ) 4 m/s^2 , 1 Kg δ) 8 m

Στροφορμή υλικού σημείου

✓ Έστω ότι ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r γύρω από έναν άξονα z′z που είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς , με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ. Ονομάζουμε **στροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα z′z** το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο $\boldsymbol{L = m.u.r}$,τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο διεθνές σύστημα μονάδων S.I. είναι το 1 $Kg.m^2/s$.



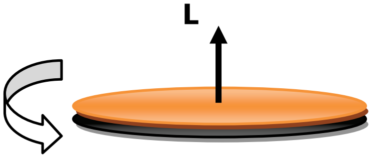
✓ Η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα περιστροφής ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και στην περίπτωση που το σώμα κινείται ευθύγραμμα, με την διαφορά ότι με το γράμμα r συμβολίζουμε τώρα την κάθετη απόσταση του φορέα της ταχύτητας από τον άξονα περιστροφής (βλ. σχήμα)

Στροφορμή στερεού σώματος

✓ Έστω ότι ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα. Η στροφορμή του θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών όλων των υλικών του σημείων. Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της στροφορμής του στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{L = I.\omega}$$

Η διεύθυνση είναι αυτή του άξονα περιστροφής και φορά βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων

✓ Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών όλων των σωμάτων του συστήματος. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{L_{O\Lambda}} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \cdots$$

Αν όλες οι στροφορμές είναι συγραμμικά διανύσματα τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με την βοήθεια των αλγεβρικών τιμών των στροφορμών, δηλαδή

$$L_{O\Lambda} = L_1 + L_2 + \cdots$$

✓ Αν όλα τα σώματα του συστήματος στρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα και με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\overrightarrow{L_{O\Lambda}} = I_{O\Lambda}\vec{\omega}$$

ή χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων γράφουμε

$$L_{O\Lambda} = I_{O\Lambda}.\omega$$

όπου $I_{O\Lambda} = I_1 + I_2 + \cdots$, δηλαδή θεωρούμε το σύστημα των σωμάτων σαν ένα ενιαίο στερεό σώμα.

Μεταβολή της στροφορμής

✓ Η μεταβολή της στροφορμής είναι ένα διάνυσμα που προκύπτει ως εξής:

$$\overrightarrow{\Delta L} = \overrightarrow{L_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{L_{\alpha\rho\chi}} \text{ ή } \overrightarrow{\Delta L} = \overrightarrow{L_{\tau\varepsilon\lambda}} + (-\overrightarrow{L_{\alpha\rho\chi}})$$

Στη περίπτωση που τα διανύσματα είναι συγραμμικά χρησιμοποιούμε και πάλι τις αλγεβρικές τους τιμές.

$$\Delta L = L_{\tau\varepsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi}$$

Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης

✓ Η γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης στην περίπτωση **ενός σώματος** δίνεται από την εξής σχέση.

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$$

dL/dt: είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος.

✓ Η παραπάνω σχέση ισχύει και για **σύστημα σωμάτων** ως εξής:

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} + \Sigma\tau_{\varepsilon\sigma} = \frac{dL_{O\Lambda}}{dt}$$

όπου $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος , $\Sigma\tau_{\varepsilon\sigma}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος και **$dL_{O\Lambda}/dt$** είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος. Επειδή $\Sigma\tau_{\varepsilon\sigma}=0$ η προηγούμενη σχέση γράφεται τελικά

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL_{O\Lambda}}{dt}$$

και αποτελεί τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για σύστημα σωμάτων.

✓ Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μόνο οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων μπορούν να αλλάξουν την στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων.

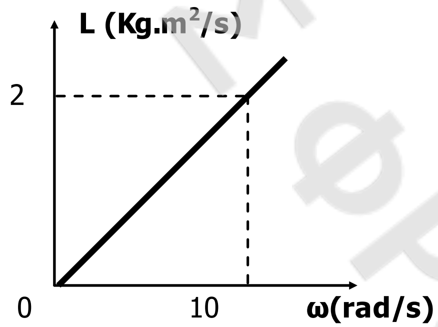
Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα ποδήλατο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου u=5m/s. Οι τροχοί του ποδηλάτου έχουν μάζα m=4Kg και ακτίνα R=0,5m ο καθένας. Αν θεωρήσουμε ότι η μάζα κάθε τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, τότε το μέτρο της ολικής στροφορμής των τροχών είναι ίσο με:

α) 10 Kg.m^2/s **β)** 20 Kg.m^2/s **γ)** 16 Kg.m^2/s **δ)** 50 Kg.m^2/s

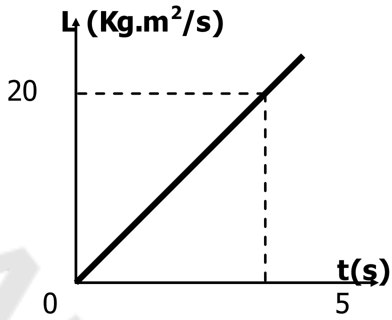
2. Ένας δίσκος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στο διάγραμμα παριστάνεται η μεταβολή της στροφορμής του δίσκου σε συνάρτηση με τη γωνιακή του ταχύτητα. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του ισούται με:



α) 40 Kg.m^2 **β)** 20 Kg.m^2 **γ)** 5 Kg.m^2 **δ)** 0,2 Kg.m^2

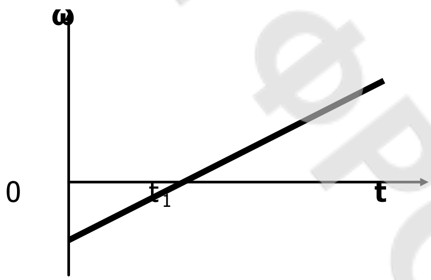
Ερωτήσεις σωστού-λάθους

3. Ένας δίσκος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στο διάγραμμα παριστάνεται η μεταβολή της στροφορμής του δίσκου σε συνάρτηση με τη γωνιακή του ταχύτητα.



α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι μηδέν.
β) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι σταθερός και ίσος με 4 N.m
δ) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στη σφαίρα είναι ίσο με μηδέν.

4. Οριζόντιος δίσκος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής του ταχύτητας μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



α) Στο δίσκο ασκείται σταθερή εξωτερική ροπή.
β) Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της στροφορμής του δίσκου αλλάζει φορά.
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.
δ) Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο.

5. Μια ακίνητη σφαίρα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και εμφανίζει ως προς αυτόν ροπή αδράνειας $I=2Kg.m^2$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκούμε στη σφαίρα συνισταμένη ροπή μέτρου $\Sigma\tau=4N.m$ και διεύθυνσης παράλληλης προς τον άξονα περιστροφής.

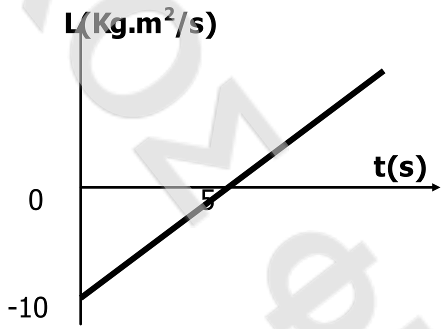
α) Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας έχει μέτρο $2rad/s^2$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας έχει μέτρο $4Kg.m^2/s^2$.

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ η στροφορμή της σφαίρας έχει μέτρο $4Kg.m^2/s$.

δ) Η στροφορμή της σφαίρας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.

6. Μια σφαίρα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και εμφανίζει ως προς αυτόν ροπή αδράνειας $I=2Kg.m^2$. Η αλγεβρική τιμή της στροφορμής της σφαίρας μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας έχει μέτρο $2Kg.m^2/s^2$.

β) Τη χρονική στιγμή $t=5s$ η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας είναι μηδέν.

γ) Η συνισταμένη ροπή που δέχεται η σφαίρα είναι συνεχώς σταθερή και το μέτρο της ισούται με $2N.m$

δ) Τη χρονική στιγμή $t=8s$ η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας έχει μέτρο $3rad/s$.

7. Δύο ίδιοι οριζόντιοι δίσκοι , μάζας M και ακτίνας R ο καθένας , περιστρέφονται με αντίθετη φορά και με σταθερές γωνιακές ταχύτητες μέτρου $\omega_1=\omega$ και $\omega_2=2\omega$, γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από τα κέντρα τους. Αν η ροπή αδράνειας του κάθε δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση $I=MR^2/2$, να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των δύο δίσκων σε συνάρτηση με τα μεγέθη M,R και ω.

8. Ένας δίσκος μάζας M=2 Kg και ακτίνας R=0,5m περιστρέφεται γύρω από άξονα ψψ′ που διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος στο επίπεδό του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_δ=20rad/s. Μια μικρή μπίλια μάζας m=0,5Kg περιστρέφεται σ′ ένα μικρό αυλάκι του δίσκου γύρω από τον άξονα περιστροφής ψψ′ (με αντίθετη φορά από τη φορά περιστροφής του δίσκου) με γραμμική ταχύτητα μέτρου u_1=25m/s ως προς τον άξονα περιστροφής και ακτίνα r=0,4m. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση $I=MR^2/2$, να αποδείξετε ότι η στροφορμή του συστήματος δίσκος μπίλια είναι μηδέν.

9. Δύο κύλινδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι συμπαγής και ο άλλος κούφιος έχουν την ίδια μάζα, την ίδια ακτίνα και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεών τους. Τη χρονική στιγμή t=0 ασκούμε στον κάθε κύλινδρο δύναμη F σταθερού μέτρου, που εφάπτεται συνεχώς στην επιφάνεια του κάθε κυλίνδρου.

α) Για ποιόν από τους δύο κυλίνδρους ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι μεγαλύτερος;

β) Ποιος κύλινδρος έχει μεγαλύτερη στροφορμή τη στιγμή t_1;

1η Κατηγορία ασκήσεων

Ολική στροφορμή — Μεταβολή στροφορμής — Ρυθμός μεταβολής στροφορμής γύρω από σταθερό άξονα.

1. Η λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ του διπλανού σχήματος έχει μήκος $l=2m$, μάζα $M=3kg$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο άκρο Α της ράβδου έχουμε στερεώσει σημειακό αντικείμενο μάζας $m=0,5Kg$.

Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο από την οριζόντια θέση.

α) Να υπολογιστεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τη χρονική στιγμή:

i. που η ράβδος βρίσκεται στην αρχική οριζόντια θέση

ii. που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία $φ=30^o$

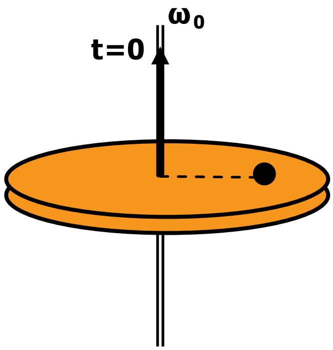
iii. που το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου ισούται με $α_{γων}=5rad/s^2$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, της σημειακής μάζας m καθώς και του συστήματος ράβδος-σημειακή μάζα τη χρονική στιγμή που η σημειακή μάζα έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου $υ=4m/s$.

Δίνεται για τη ράβδο: $I_{cm}=(1/12)Ml^2$ και $g=10m/s^2$.

Απ: α) 40N.m, 20N.m, 30N.m β) 8Kg.m²/s, 4Kg.m²/s, 12Kg.m²/s

2. Ομογενής δίσκος μάζας M=2Kg και ακτίνας R=0,5m περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στο δίσκο είναι κολλημένη σημειακή μάζα m=0,5Kg που απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση r=0,4m.



Τη χρονική στιγμή t=0 η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα είναι ω_0=10rad/s με κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Από τη στιγμή t=0 και μετά ασκούμε στο δίσκο δύναμη F σταθερού μέτρου που εφάπτεται συνεχώς στην περιφέρεια του δίσκου. Τη χρονική στιγμή t_1=2s το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σημειακής μάζας έχει αυξηθεί κατά 50% σε σχέση με το αρχικό.

α) Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της στροφορμής του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα τη στιγμή t=0

ii) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα

iii) το μέτρο της δύναμης F

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της στροφορμής του συστήματος δίσκος-σημειακή μάζα με το χρόνο και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης αυτής σε βαθμολογημένους άξονες , για τη χρονική διάρκεια από 0 έως t_1.

Δίνεται για το δίσκο: $I=(1/2)MR^2$.

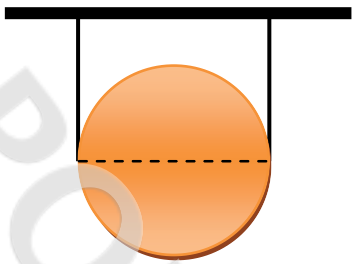
Απ. α) ι) 3,3 $Kg.m^2/s$, ii) 0,825 $Kg.m^2/s^2$, iii) 1,65 N β) L=3,3+0,825t

3. Ένας δίσκος μάζας M=4Kg και ακτίνας R=1m περιστρέφεται χωρίς τριβές, με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0=20rad/s, γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος δέχεται συνισταμένη ροπή που έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της αρχικής γωνιακής ταχύτητας. Τη χρονική στιγμή t_1=5s το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ισούται με $L_1=10Kg.m^2/s$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή t_1
β) το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δίσκου
γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου
δ) τη χρονική στιγμή t_2 που μηδενίζεται η στροφορμή του δίσκου.
Δίνεται για τον δίσκο: $I=(1/2)MR^2$.
Απ. α) 5rad/s β) 3rad/s^2 γ) 6N.m δ) 20/3s

4. Η έλικα ενός ανεμιστήρα οροφής αποτελείται από τρία πτερύγια μήκους d=0,8m, το καθένα από τα οποία έχει ροπή αδράνειας $I=1{,}5Kg.m^2$ ως προς τον άξονα περιστροφής της έλικας. Η έλικα περιστρέφεται αρχικά με συχνότητα $f_0=10/\pi$ Hz. Κάποια χρονική στιγμή (t=0) γυρίζουμε τον διακόπτη που ρυθμίζει την ταχύτητα περιστροφής της έλικας, οπότε αυτή επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό και τελικά σταματά. Τη χρονική στιγμή t_1=5s το άκρο του ενός από τα πτερύγια έχει γραμμική ταχύτητα u=4m/s. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της αρχικής στροφορμής της έλικας
β) τη μεταβολή της στροφορμής της έλικας στη διάρκεια από 0 έως t_1
γ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της έλικας.
Απ. α) 90Kg.m^2/s β) –67,5Kg.m^2/s γ) 13,5Kg.m^2/s^2

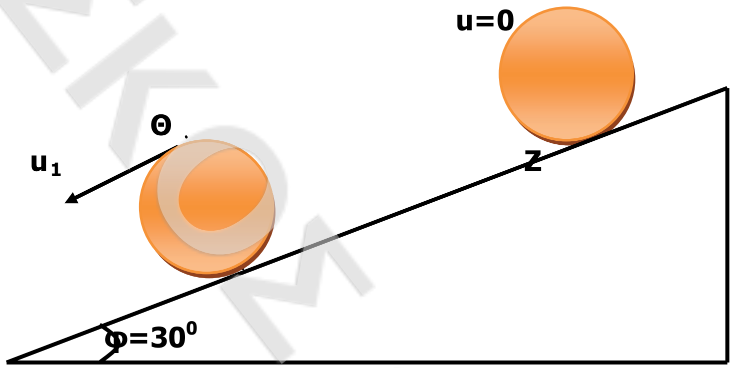
5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια τροχαλία μάζας M=2Kg και ακτίνας R=0,1m στην οποία έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα τα άκρα του οποίου είναι δεμένα στο ταβάνι. Το μήκος του νήματος που είναι τυλιγμένο στην τροχαλία είναι L=1,2m. Η τροχαλία ισορροπεί ακίνητη.



α) Να υπολογίσετε την τάση του καθενός άκρου του νήματος που έχουμε τυλίξει στην τροχαλία.
β) Κάποια χρονική στιγμή (t=0) κόβουμε το ένα άκρο του νήματος με αποτέλεσμα η τροχαλία να αρχίσει να πέφτει, χωρίς να γλιστρά το νήμα στο αυλάκι της. Να υπολογίσετε:
i) την τάση του νήματος κατά τη διάρκεια της πτώσης της τροχαλίας
ii) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας
iii) τη μέγιστη τιμή του μέτρου της στροφορμής της τροχαλίας.
Δίνεται για την τροχαλία: $I=(1/2)MR^2$ και $g=10\ m/s^2$.

Απ.   α) 10N   β) i) 20/3N , ii) 2/3N.m , iii) 0,4Kg.m^2/s

6. Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί τη χρονική στιγμή t=0 από σημείο Ζ του κεκλιμένου επιπέδου που έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^0$ και μεγάλο μήκος. Ο κύλινδρος κυλίεται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει και τη χρονική στιγμή $t_1=6s$ το κέντρο μάζας του έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά h από την αρχική του θέση, ενώ το μέτρο της στροφορμής του ισούται με L=24Kg.m^2/s. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής ισούται με I=2Kg.m^2 . Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου
β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου
γ) το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου Θ του κυλίνδρου, τη στιγμή t_1
δ) την κατακόρυφη μετατόπιση h
Δίνεται για τον κύλινδρο: I=(1/2)MR^2 και g=10 m/s^2.
Απ.   α) 2 rad/s^2 β) 4 Kg.m^2/s^2 γ) 40 m/s   δ) 30 m

7. Ο τροχός ενός ποδηλάτου έχει μάζα M=1Kg, ακτίνα R=0,4m και η μάζα του είναι κατανεμημένη στη περιφέρειά του. Αναποδογυρίζουμε το ποδήλατο και θέτουμε σε περιστροφή το τροχό μέχρι να αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_0=20rad/s.
Α) Πατώντας απαλά το φρένο προκαλούμε σταθερή επιβράδυνση και ο τροχός σταματά μετά από Δt=10s. Να υπολογίσετε:
i) την αρχική στροφορμή του τροχού.

ii) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής.
iii) το μέτρο της τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο φρένο και στο τροχό.
Β) Ενώ ο τροχός στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0=20rad/s περιστρέφουμε τον άξονα του τροχού κατά 60^0 μέσα σε χρόνο 2s. Να υπολογίσετε:
i) τη μεταβολή της στροφορμής του τροχού.
ii) τη μέση ροπή που δέχθηκε ο τροχός.
Απ. Α) i) L_0=3,2 Kg.m/s ii) dL/dt=-0,32 N.m iii) T=0,8N
Β) i) ΔL′=3,2 Kg.m/s ii) Στ=1,6 N.m

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Α) Διατήρηση της στροφορμής ενός σώματος

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι ίσο με μηδέν, τότε η στροφορμή του σώματος αυτού διατηρείται σταθερή.

Σε αρκετές περιπτώσεις για παράδειγμα καθώς στρέφεται ένα στερεό σώμα, συμβαίνει ανακατανομή της μάζας του γύρω από τον άξονα περιστροφής (π.χ όπως συμβαίνει σε ένα άστρο στα τελευταία στάδια της ζωής του), με αποτέλεσμα να αλλάξει η ροπή αδράνειάς του. Επειδή όμως δεν παρεμβαίνουν εξωτερικοί παράγοντες η στροφορμή του σώματος διατηρείται και μπορούμε να γράψουμε:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Leftrightarrow I_{αρχ}.\omega_{αρχ} = I_{τελ}.\omega_{τελ}$$

Β) Διατήρηση της στροφορμής συστήματος σωμάτων

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίσο με μηδέν ($Στ_{εξ}=0$), τότε η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. (Αρχή διατήρησης της στροφορμής).

Αυτό σημαίνει ότι οι ροπές των εσωτερικών δυνάμεων δεν μπορούν να αλλάξουν την στροφορμή του συστήματος.

Όταν σε ένα σύστημα ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ τότε το σύστημα λέγεται **μονωμένο**. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν:

- **i)** δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή
- **ii)** ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις των οποίων οι φορείς διέρχονται από τον άξονα περιστροφής ή
- **iii)** ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις των οποίων οι φορείς είναι παράλληλοι με τον άξονα περιστροφής

Πολλές φορές ένα σύστημα ενώ δεν είναι μονωμένο μπορεί να θεωρηθεί ως μονωμένο και έτσι να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Αυτό συμβαίνει όταν ο χρόνος δράσης των εξωτερικών ροπών είναι απειροελάχιστος (π.χ. κατά τη διάρκεια μιας κρούσης ή έκρηξης).

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

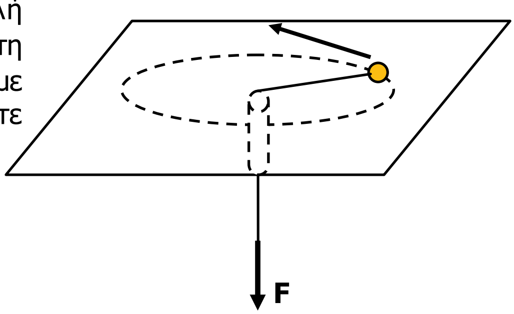
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται πάνω σε πάγο με τα χέρια της απλωμένα. Στη συνέχεια φέρνοντας τα χέρια της στο στήθος της , η ροπή αδράνειάς της μεταβάλλεται κατά 20% σε σχέση με την αρχική. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της αθλήτριας:
α) αυξάνεται κατά 20%
β) αυξάνεται κατά 25%
γ) μειώνεται κατά 20%
δ) δε μεταβάλλεται

2. Ένας καταδύτης πέφτει από εξέδρα μεγάλου ύψους και αρχικά δίνει στο σώμα του γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 έχοντας αρχική ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του I_0. Κάποια στιγμή πλησιάζει τα χέρια και τα πόδια του στον άξονα περιστροφής του μεταβάλλοντας την ροπή αδράνειας του κατά $I_0/4$. Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο καταδύτης έχει μέτρο:

α) $\omega_0/4$ β) $4\omega_0/5$ γ) $4\omega_0/3$ δ) $4\omega_0$

3. Το σημειακό αντικείμενο του διπλανού σχήματος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R. Αν με τη βοήθεια μιας δύναμης F μειώσουμε την ακτίνα της τροχιάς στο μισό, τότε η συχνότητα περιστροφής:



α) παραμένει η ίδια
β) διπλασιάζεται
γ) υποδιπλασιάζεται
δ) τετραπλασιάζεται

4. Η συνισταμένη των ροπών που δρουν σε ένα στερεό σώμα ισούται με μηδέν. Το σώμα:

α) Δεν περιστρέφεται
β) Περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα
γ) Δεν περιστρέφεται ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα
δ) Περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση

5. Ορισμένα αστέρια στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους συρρικνώνονται αφού εξαντλήσουν τα αποθέματα ενέργειας που διαθέτουν.

α) Εξαιτίας της συρρίκνωσης η στροφορμή του αστεριού μειώνεται.
β) Εξαιτίας της συρρίκνωσης μειώνεται η ροπή αδράνειας του αστεριού και αυξάνεται η συχνότητα περιστροφής του.
γ) Η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις γι’ αυτό και η στροφορμή του παραμένει σταθερή.
δ) Εξαιτίας της συρρίκνωσης αυξάνεται η ροπή αδράνειας του αστεριού και μειώνεται η συχνότητα περιστροφής του.

6. Ένας δίσκος και ένας δακτύλιος έχουν ίσες μάζες, ίσες ακτίνες και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος στα επίπεδά τους και διέρχεται από τα κέντρο τους.

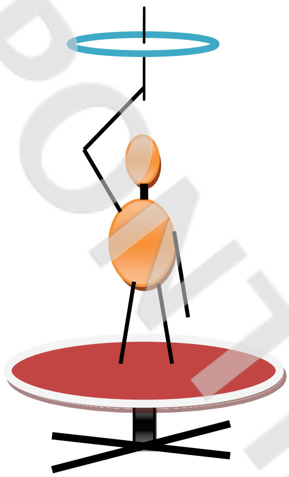
α) Τα δύο σώματα έχουν ίσες ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής.
β) Ο δακτύλιος έχει μεγαλύτερη στροφορμή από το δίσκο.
γ) Αν ασκήσουμε την ίδια ροπή στο δακτύλιο και στο δίσκο, τότε ο δίσκος ακινητοποιείται πιο γρήγορα από το δακτύλιο.
δ) Αν αφήσουμε το δακτύλιο να πέσει πάνω στο δίσκο τότε τα δύο σώματα θα αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα που έχει μέτρο ίσο με ω/2.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

7. Ένας αστέρας που θεωρείται ότι είναι συμπαγής και ομογενής σφαίρα στρέφεται με συχνότητα f και σε κάποιο στάδιο της ζωής του θα οχταπλασιάσει τον όγκο του. Αν θεωρήσουμε την μάζα του σταθερή να βρεθεί η % μεταβολή της συχνότητάς του.
Δίνεται για τον αστέρα $I_{cm}=(1/5)mR^2$ και ο όγκος του $V=(4/3)\pi R^3$.

8. Με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής να εξηγήσετε:
α) Γιατί μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ που περιστρέφεται συμπτύσσοντας τα χέρια της αυξάνει την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.
β) Γιατί οι ακροβάτες που θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους.

9. Ο άνθρωπος του διπλανού σχήματος στέκεται όρθιος πάνω σε αβαρή βάση που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές και κρατά στα χέρια του ένα τροχό με τον άξονά του κατακόρυφο. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος θέτει τον τροχό σε περιστροφή.
α) Ο άνθρωπος θα αρχίσει να περιστρέφεται; Αν ναι, ποια θα είναι η φορά της περιστροφής του;
β) Τι θα συμβεί αν ο άνθρωπος αναγκάσει τον τροχό να στρέφεται ανάποδα με γωνιακή ταχύτητα ίδιου μέτρου;



10. α) Είναι δυνατόν ένα σώμα να έχει γωνιακή επιτάχυνση χωρίς να ασκούνται πάνω του ροπές;
β) Ένας κολυμβητής των καταδύσεων εκτινάσσεται από την εξέδρα και αρχίζει να εκτελεί κατάδυση. Για όσο χρόνο βρίσκεται στον αέρα τι θα πάθουν η ορμή του και η στροφορμή του;
γ) Σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα ασκείται ζεύγος δυνάμεων. Θα αλλάξει η ορμή του και η στροφορμή του;
Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

$1^η$ Κατηγορία ασκήσεων

Καθώς ένα υλικό σημείο ή στερεό σώμα ή ένα σύστημα σωμάτων στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, συμβαίνει αλλαγή στη κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής (δηλαδή αλλάζει η ροπή αδράνειας) χωρίς να μεσολαβήσουν εξωτερικές ροπές.

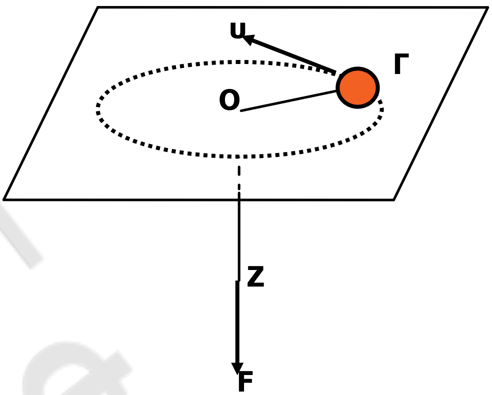
1. Ένας άνθρωπος στέκεται πάνω σε αβαρή δίσκο, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ο άνθρωπος κρατά σε κάθε του χέρι ένα βαράκι μάζας m=5kg, σε τέτοια θέση, ώστε να απέχουν από τον άξονα περιστροφής απόσταση d_1=20cm το καθένα. Το σύστημα δίσκος-άνθρωπος-βαράκια περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1=14rad/s. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου μαζί με τα βαράκια ως προς τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής ισούται με $I_1=4kg{\cdot}m^2$. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος εκτείνει τα χέρια του με τα βαράκια, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος άνθρωπος-βαράκια μεταβάλλεται κατά 75%. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος αμέσως μετά την έκταση των χεριών του ανθρώπου

β) τη μεταβολή της στροφορμής του ανθρώπου, αν δίνεται ότι το κάθε βαράκι μετά την έκταση των χεριών του απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση ίση με d_2=0,5m

γ) τη συνισταμένη μέση ροπή που δέχτηκαν τα δύο βαράκια, αν δίνεται ότι η χρονική διάρκεια που χρειάστηκε ο άνθρωπος για την έκταση των χεριών του ισούται με Δt=2s

Απ. α) 8 rad/s β) -14,4 Kg.m²/s γ) 7,2 N.m

2. Το μικρό σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα m=2kg και περιστρέφεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με τη βοήθεια μη εκτατού νήματος. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι r_1=0,5m και η συχνότητα f_1=8/π Hz. Το νήμα περνάει από μια τρύπα Ο του επιπέδου και μεταβάλλοντας την κατακόρυφη δύναμη που ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του Ζ μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα ΟΓ της κυκλικής τροχιάς του σώματος.



Η μέγιστη τιμή της τάσης που μπορεί να αντέξει το νήμα ισούται με T_{max}=4000N.

α) Να υπολογίσετε τη στροφορμή του μικρού σώματος.

β) Ελαττώνουμε το μήκος ΟΓ του νήματος κατά Δx=0,1m. Να υπολογίσετε το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας που θα αποκτήσει το σώμα.

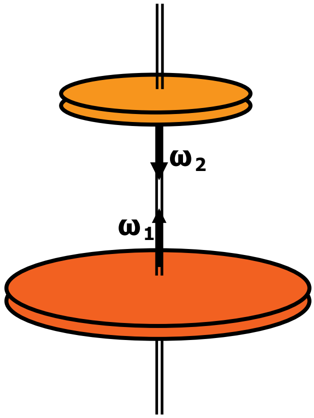
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ελάττωση που μπορεί να υποστεί το μήκος του νήματος ΟΓ.

Απ. α) 8 Kg.m²/s β) 25 rad/s γ) 0,3 m

$2^η$ Κατηγορία ασκήσεων

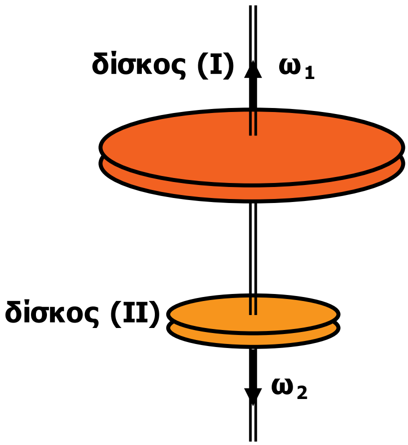
Μια σημειακή μάζα ή ένας δίσκος πέφτει πάνω σε έναν άλλο στρεφόμενο δίσκο με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός στρεφόμενου συσσωματώματος.

3. Οι ομογενείς δίσκοι του διπλανού σχήματος έχουν μάζες m_1=5Kg, m_2=2Kg και ακτίνες R_1=1m, R_2=0,5m αντίστοιχα και περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Ο κάτω δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_1$=10rad/s και ο πάνω δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω_2$=56rad/s. Κάποια στιγμή ο πάνω δίσκος πέφτει από μικρό ύψος πάνω στον κάτω δίσκο, οπότε από μια στιγμή και μετά οι δύο δίσκοι περιστρέφονται σαν ένα σώμα με γωνιακή ταχύτητα ω. Να υπολογίσετε:



α) την αρχική στροφορμή του κάθε δίσκου
β) τη γωνιακή ταχύτητα ω
γ) τη μεταβολή της στροφορμής του κάθε δίσκου
δ) το μέτρο της μέσης ροπής που δέχθηκε ο κάθε δίσκος αν δίνεται ότι από τη στιγμή που οι δύο δίσκοι ήρθαν σε επαφή μέχρι τη στιγμή που άρχισαν να περιστρέφονται σαν ένα σώμα πέρασε χρόνος Δt=0,2 s.
Δίνεται για κάθε δίσκο: $I=(1/2)mR^2$.
Απ. α) 25Kg.m²/s,14Kg.m²/s β) 4rad/s γ) -15Kg.m²/s , 15Kg.m²/s δ) 75N.m

4. Οι ομογενείς δίσκοι του διπλανού σχήματος έχουν μάζες $m_1=4Kg$, $m_2=1Kg$ και ακτίνες $R_1=1m$, $R_2=0,5m$ αντίστοιχα και περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες και η στροφορμή του συστήματός τους έχει μέτρο $L_{ΟΛ}=37,5\ Kg.m^2/s$.



α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων περιστροφής των δύο δίσκων.

β) Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε ως t=0 ο δίσκος (ΙΙ) αρχίζει να δέχεται σταθερού μέτρου δύναμη F, που είναι συνεχώς εφαπτόμενη στη περιφέρειά του, με αποτέλεσμα η στροφορμή του να αρχίσει να μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό μέτρου $dL_2/dt=2,5$ N.m και κατεύθυνσης ίδιας με αυτή της αρχικής του γωνιακής ταχύτητας. Ο δίσκος (Ι) συνεχίζει να κινείται με την αρχική γωνιακή του ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της δύναμης F

ii) τη στροφορμή του συστήματος των δύο δίσκων τη στιγμή $t_1=2$ s

iii) τη χρονική στιγμή που η στροφορμή του συστήματος των δύο δίσκων γίνεται ίση με μηδέν.

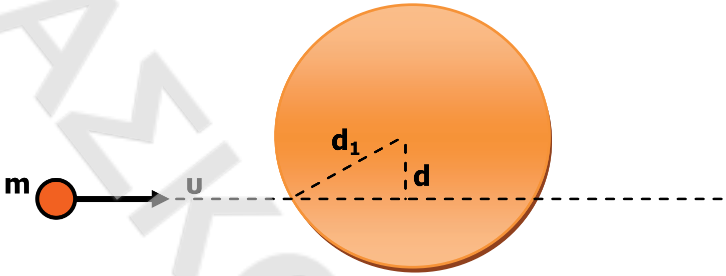
Δίνεται για κάθε δίσκο: $I=(1/2)mR^2$.

Απ. α) 20rad/s β) i) 5N , ii) 32,5Kg.m²/s , iii) 15s

$3^η$ Κατηγορία ασκήσεων

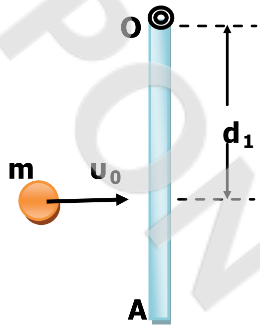
Κρούση μεταξύ μιας σημειακής μάζας και ενός στερεού σώματος που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.

5. Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας M=2Kg και ακτίνας R=0,5m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ένα βλήμα μάζας m=0,1Kg που κινείται οριζόντια σφηνώνεται στο δίσκο και σταματά μέσα σ' αυτόν σε απόσταση d_1=0,2m από τον άξονα περιστροφής. Η απόσταση της ευθείας κίνησης του βλήματος από τον άξονα περιστροφής είναι d. Ο δίσκος μετά τη κρούση αρχίζει να περιστρέφεται με ρυθμό N=50/π περιστροφές σε χρόνο Δt=5s. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της στροφορμής του βλήματος ως προς τον άξονα περιστροφής ελάχιστα πριν συμβεί η κρούση του με τον δίσκο
β) την απόσταση d αν δίνεται ότι η αρχική ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο υ=508m/s.
Δίνεται για τον δίσκο: $I=(1/2)MR^2$.
Απ. α) 5,08 Kg.m²/s β) 0,1 m

6. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται μια λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ, μάζας Μ=6kg και μήκους l=2m, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί ακίνητη σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας m=10g κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ=800m/s, συγκρούεται με τη ράβδο σε



απόσταση d_1=1,5m από τον άξονα περιστροφής της και εξέρχεται από αυτή με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=(800/3)m/s. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της στροφορμής του βλήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή της με αυτό

β)το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά η ράβδος αμέσως μετά την κρούση

γ) το μέτρο της μέσης τιμής της ροπής που δέχτηκε το βλήμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, αν αυτή ισούται με $\Delta t=0{,}01s$

Δίνεται για τη ράβδο: $I=(1/12)Ml^2$ και $g=10m/s^2$

Απ. α) 12Kg.m²/s β) 1rad/s γ) 800N.m

4η Κατηγορία ασκήσεων

Ένα σημειακό αντικείμενο κινείται πάνω σε μια κυκλική εξέδρα που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα.

7. Μια οριζόντια κυκλική εξέδρα έχει μάζα M=80Kg ακτίνα R=1m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της και είναι αρχικά ακίνητη. Ένα άνθρωπος μάζας m=60Kg βρίσκεται στη περιφέρεια της εξέδρας και κρατά στο χέρι του σώμα μάζας m′=4Kg. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος εκτοξεύει το σώμα που κρατά στα χέρια του με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_0=20m/s$ κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της εξέδρας.

α) Να βρείτε με ποια γωνιακή ταχύτητα και προς ποια φορά θα αρχίσει να στρέφεται η εξέδρα.

β) Αν στη συνέχεια ο άνθρωπος περπατήσει στη διεύθυνση μιας ακτίνας της εξέδρας και φτάσει στο κέντρο της , να βρείτε την τελική γωνιακή ταχύτητα της εξέδρας.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της εξέδρας ως προς τον άξονα περιστροφής της ισούται με: $I=(1/2)MR^2$.

Απ. α) $\omega_1=0{,}8$ rad/s β) $\omega_2=2$ rad/s.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Κινητική ενέργεια υλικού σημείου

✓ Έστω ότι έχουμε ένα υλικό σημείο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα υ. Η κίνησή του είναι προφανώς μεταφορική και η κινητική ενέργειά του δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

✓ Έστω ότι ένα στερεό σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σταθερό άξονα ως προς τον οποίο έχει ροπή αδράνειας I. Τότε αποδεικνύεται ότι η κινητική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

✓ Αν απαλείψουμε τη γωνιακή ταχύτητα από τους τύπους

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \;\; \kappa\alpha\iota \; L = I\omega$$

προκύπτει η χρήσιμη σχέση

$$\boldsymbol{K = \frac{L^2}{2I}}$$

✓ Έστω ότι ένα στερεό σώμα μάζας M εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση οπότε όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας. Τότε αποδεικνύεται ότι η κινητική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2}$$

✓ Αν το στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση (μεταφορική και στροφική ταυτόχρονα) τότε η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης και λόγω στροφικής κίνησης.

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

ΕΡΓΟ – ΙΣΧΥΣ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Έργο ροπής για στοιχειώδη γωνιακή μετατόπιση

✓ Θεωρούμε ότι ένα στερεό σώμα (π.χ. ένας τροχός) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα και ότι πάνω του ασκείται μια ροπή τ η οποία προκαλεί μια απειροελάχιστη γωνιακή μετατόπιση dθ. Αποδεικνύεται ότι το απειροελάχιστο (στοιχειώδες) έργο αυτής της ροπής δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{dW = \tau . d\theta}$$

Έργο σταθερής ροπής

✓ Στη περίπτωση που στο στερεό σώμα εφαρμόζεται μια **σταθερή ροπή τ**, η οποία προκαλεί μια γωνιακή μετατόπιση θ που δεν είναι απειροελάχιστη, αποδεικνύεται ότι το έργο της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{W = \tau . \theta}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο έργο μπαίνει πρόσημο (+,-) ανάλογα με το αν η ροπή βοηθάει ή δυσκολεύει τη περιστροφή.

Ισχύς μιας δύναμης που προκαλεί ροπή

✓ Η ισχύς μιας δύναμης όπως γνωρίζουμε εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη παράγει ή καταναλώνει έργο και ταυτόχρονα προσφέρει ή απορροφά ενέργεια από το σώμα.

✓ Η **στιγμιαία ισχύς** μιας δύναμης που προκαλεί ροπή τ τη στιγμή t που το σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{P = \tau . \omega}$$

✓ Έστω ότι μια δύναμη που προκαλεί ροπή τ παράγει έργο W σε μια χρονική διάρκεια Δt. Η **μέση ισχύς** αυτής της δύναμης στη χρονική διάρκεια Δt δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}}$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας (ή Θ.Μ.Κ.Ε.)

✓ Στη περίπτωση που ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του σώματος.

$$\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_{\rho o\pi\acute{\omega}\nu}$$

✓ Στη περίπτωση που ένα στερεό σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}M\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_{\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\nu}$$

✓ Στη περίπτωση που ένα στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών και των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

$$\left(\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2+\frac{1}{2}M\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2\right)-\left(\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2+\frac{1}{2}M\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2\right)=\Sigma W_{\rho o\pi\acute{\omega}\nu}+\Sigma W_{\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\nu}$$

Χρήσιμες πληροφορίες

Έργο του βάρους

Το έργο του βάρους είτε πρόκειται για υλικό σημείο είτε πρόκειται για στερεό σώμα και ανεξάρτητα από το είδος της κίνησης, δίνεται από τη σχέση:

$$W_w=\pm mgh$$

- όπου h είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του υλικού σημείου ή του κέντρου μάζας του στερεού σώματος
- (+) όταν έχουμε κάθοδο
- (-) όταν έχουμε άνοδο
- επειδή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της διαδρομής του σώματος και εξαρτάται μόνο από την υψομετρική διαφορά h μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης.

Συντηρητικές δυνάμεις

Συντηρητικές λέγονται οι δυνάμεις , το έργο των οποίων κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

- Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση

- Συντηρητικές δυνάμεις που θα συναντήσουμε σε αυτό το βιβλίο είναι το βάρος και η δύναμη που ασκείται από ελαστικά παραμορφωμένο ελατήριο.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Βαρυτική δυναμική ενέργεια λέγεται η ενέργεια που έχει ένα υλικό σημείο ή ένα στερεό σώμα εξαιτίας της θέσης του μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης.

- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια υπολογίζεται πάντα ως προς ένα οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θεωρούμε αυθαίρετα ότι ισούται με μηδέν. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται και επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και το επιλέγουμε αυθαίρετα. Συνήθως το επιλέγουμε αρκετά χαμηλά ώστε να μην υπάρχει κάτω από αυτό ούτε σημειακή μάζα ούτε κέντρο μάζας στερεού σώματος.

- Ο τύπος της βαρυτικής δυναμική ενέργειας είναι $\boldsymbol{U = mgh}$ όπου h είναι το ύψος του υλικού σημείου ή του κέντρου μάζας του στερεού σώματος από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

- Λόγω μεταφορικής κίνησης: $\boldsymbol{dK}/_{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\Sigma F.\upsilon_{cm}}$
- Λόγω στροφικής κίνησης: $\boldsymbol{dK}/_{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\Sigma\tau.\omega}$
- Λόγω σύνθετης κίνησης: $\boldsymbol{dK}/_{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\Sigma F.\upsilon_{cm} + \Sigma\tau.\omega}$

Μηχανική ενέργεια

Είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας που έχει ένα σώμα ή ένα σύστημα σωμάτων.

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας

- **Ένα σώμα**

Όταν ένα σώμα κινείται και παράγεται έργο μόνο από συντηρητικές δυνάμεις, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται σταθερή.

- **Σύστημα σωμάτων**

Όταν ένα σύστημα σωμάτων κινείται και οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Μια σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο $I_{cm}=(2/5)mR^2$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της είναι σταθερή και ίση με u_{cm}. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας ισούται με:

α) $(2/5)mu_{cm}{}^2$ **β)** $(5/2)mu_{cm}{}^2$ **γ)** $(7/10)mu_{cm}{}^2$ **δ)** $(1/5)mu_{cm}{}^2$

2. Ένας πλανήτης ο οποίος θεωρείται υλικό σημείο κινείται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά και η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η βαρυτική έλξη του ήλιου, ο οποίος βρίσκεται σε μια εστία της έλλειψης. Η μεγαλύτερη απόσταση r_{max} από τον ήλιο (αφήλιο) και η μικρότερη απόσταση r_{min} από τον ήλιο (περιήλιο), ικανοποιούν την σχέση $r_{max}=4\ r_{min}$. Αν $K_α$ και $K_π$ είναι οι κινητικές ενέργειες του πλανήτη στο αφήλιο και στο περιήλιο αντίστοιχα, τότε ικανοποιούν την σχέση:

α) $K_π=16K_α$ **β)** $K_π=8K_α$ **γ)** $K_π=4K_α$

3. Μια σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο $I_{cm}=(2/5)mR^2$. Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας της σφαίρας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης ($K_{μετ}/K_{περ}$) είναι ίσο με:

α) 1 **β)** 2/5 **γ)** 5/2 **δ)** 1/2

4. Μια σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της δίνεται από τον τύπο $I=(2/5)MR^2$. Το ποσοστό (%) της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που εμφανίζεται με τη μορφή κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ισούται με:

α) 40% **β)** 400/3% **γ)** 200/7% **δ)** 500/3%

5. Μια ακίνητη ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω της άκρο. Δίνεται για την ράβδο ότι $I_{cm}=(1/12)Ml^2$. Η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να προσδώσουμε στην ράβδο για να κάνει ανακύκλωση είναι:

α) $\sqrt{2g/l}$ **β)** $\sqrt{6g/l}$ **γ)** $\sqrt{9g/l}$

6. Μια λεπτή ράβδος μήκους L και μάζας m περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σ' αυτή. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τον τύπο $I_{cm}=(1/12)mL^2$. Αν η γραμμική ταχύτητα των άκρων της ράβδου έχει μέτρο ίσο με u τότε η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι ίση με:
α) $(1/2)mu^2$ **β)** $(1/6)mu^2$ **γ)** $(1/12)mu^2$ **δ)** $(1/4)mu^2$

7. Δύο σφαίρες (1) και (2) περιστρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που διέρχονται από τα κέντρα τους. Οι δύο σφαίρες έχουν ίσες κινητικές ενέργειες και ροπές αδράνειας I_1 και I_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα περιστροφής τους για τις οποίες ισχύει $I_1/I_2=4$. Τα μέτρα των στροφορμών των δύο σφαιρών έχουν λόγο L_1/L_2:
α) 1/2 **β)** 2 **γ)** 4

8. Μια ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της και είναι κάθετος σ' αυτή. Αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί από την οριζόντια θέση και το μέτρο της αρχικής γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά ισούται με 4 rad/s^2. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με 2 $Kg.m^2$. Η κινητική ενέργεια της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση είναι:
α) 4 J **β)** 2 J **γ)** 8 J **δ)** 1,5 J

9. Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται πάνω σε πάγο με τα χέρια της απλωμένα. Στη συνέχεια φέρνοντας τα χέρια της στο στήθος της , η ροπή αδράνειάς της μεταβάλλεται κατά 20% σε σχέση με την αρχική. Η κινητική ενέργεια της αθλήτριας:
α) αυξάνεται κατά 20%
β) αυξάνεται κατά 25%
γ) μειώνεται κατά 20%
δ) μειώνεται κατά 25%

10. Στερεό σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1=10 rad/s γύρω από ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο εμφανίζει ροπή αδράνειας I=2 Kg.m^2. Κάποια χρονική στιγμή ασκείται στο σώμα συνισταμένη ροπή για χρόνο Δt με αποτέλεσμα το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος να αυξηθεί κατά 10 rad/s. Το έργο της συνισταμένης ροπής που ασκήθηκε στο σώμα είναι:

α) +300 J **β)** -100 J **γ)** +100 J **δ)** -200 J

11. ια ομογενής ράβδος ΟΖ μήκους l και μάζας Μ, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη και κατακόρυφη, με το άκρο Ο να είναι το κατώτερο σημείο της. Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να κινηθεί. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τον τύπο I=(1/3)Ml^2. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου της Ζ, όταν ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της μηδενίζεται για πρώτη φορά ισούται με:

α) $\sqrt{2gl}$ **β)** $\sqrt{3gl}$ **γ)** $\sqrt{5gl}$ **δ)** $\sqrt{6gl}$

12. Ένας κύλινδρος και ένας σφαιρικός φλοιός (ίσης μάζας και ακτίνας) κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν έχοντας ίσες ταχύτητες κέντρου μάζας. Δίνεται για τον κύλινδρο I_{cm}=(1/2)mR^2 και για τον σφαιρικό φλοιό I_{cm}=(2/3)mR^2.

α) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει ο δίσκος

β) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει ο σφαιρικός φλοιός

γ) Ο δίσκος και ο σφαιρικός φλοιός έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

13. Ένας δακτύλιος και ένας δίσκος ίδιας μάζας και ίδιας ακτίνας είναι οριζόντιοι και περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους. Τα δύο σώματα έχουν την ίδια στροφορμή.

α) Ο δίσκος και ο δακτύλιος περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

β) Ο δίσκος έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από τον δακτύλιο.

γ) Για να ακινητοποιηθούν σε ίσους χρόνους τα δύο σώματα πρέπει να εφαρμόσουμε την ίδια εφαπτομενική δύναμη.

δ) Αν τα δύο σώματα ακινητοποιούνται σε ίσους χρόνους τότε οι δυνάμεις που εφαρμόζουμε έχουν την ίδια μέση ισχύ.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

14. Ένα απομονωμένο ομογενές άστρο σφαιρικού σχήματος περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό του με γωνιακή ταχύτητα ω_0 και έχει κινητική ενέργεια K_0. Στα τελευταία στάδια της ζωής του το άστρο συρρικνώνεται λόγω βαρυτικών δυνάμεων.

1) Να εξηγήσετε γιατί η μείωση της ακτίνας του οδηγεί σε αύξηση της κινητικής του ενέργειας.

2) Αν η ακτίνα του άστρου μειωθεί κατά 50% σε σχέση με την αρχική της τιμή, τότε η κινητική ενέργεια του άστρου μετά τη συρρίκνωση θα είναι:

α) $2K_0$ **β)** $3K_0$ γ) $4K_0$.

Δίνεται για το άστρο $I_{cm}=(2/5)MR^2$

15. Έχουμε δύο κυλίνδρους ίδιας μάζας και ίδιας ακτίνας. Ο ένας είναι συμπαγής και ο άλλος είναι κοίλος με λεπτά τοιχώματα. Περιγράψτε ένα πείραμα κύλισης με το οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε ποιος είναι ο κοίλος κύλινδρος, δικαιολογώντας αναλυτικά την άποψή σας.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

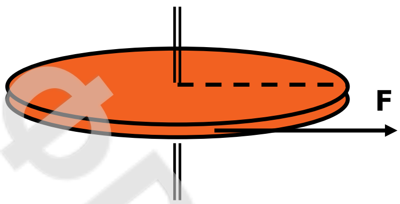
16. Τροχός μάζας M και ακτίνας R αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από ένα σημείο A κεκλιμένου επιπέδου και αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει οπότε διέρχεται από τις θέσεις B και Γ αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αν ην ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{cm}=(1/2)mR^2$. Θεωρήστε ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας διέρχεται από το κέντρο του τροχού όταν αυτός βρίσκεται στη θέση Γ.

Θέσεις	Μηχανική ενέργεια	Δυναμική ενέργεια	Κινητική ενέργεια (μεταφορικής κίνησης)	Κινητική ενέργεια (στροφικής κίνησης)
Α	120J			
Β		60J		
Γ				40J

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1. Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα $M=4kg$ και ακτίνα $R=0,5m$. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Από τη χρονική στιγμή $t=0$ και μετά ασκούμε στο δίσκο οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=10N$, που εφάπτεται συνεχώς στην περιφέρειά του.



α) Να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου

ii. το μέτρο της στροφορμής του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1=3s$

iii. το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη F παρέχει ενέργεια στο δίσκο τη χρονική στιγμή t_1

β) Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά ασκείται εφαπτομενικά στο δίσκο μια ακόμη οριζόντια δύναμη F_1 σταθερού μέτρου, οπότε ο δίσκος σταματά τελικά τη χρονική στιγμή $t_2=9s$. Να υπολογίσετε:

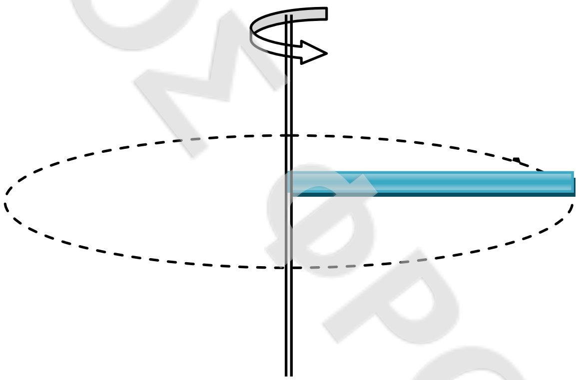
i. το μέτρο της δύναμης F_1

ii το έργο της δύναμης F_1 από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τον τύπο $I=(1/2)MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$.

Απ. α) 10 rad/s² , 5 N.m , 15 Kg.m²/s, 150 W β) 15 N , - 675 J

2. Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους L=2m και μάζας M=3Kg περιστρέφεται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0=10rad/s$, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σ' αυτήν. Ασκώντας στην περιστρεφόμενη ράβδο ροπή τ για χρόνο Δt το μέτρο της γωνιακής της ταχύτητας μειώνεται κατά 20% χωρίς να αλλάξει η φορά της. Να υπολογίσετε:



α) το έργο της ροπής τ

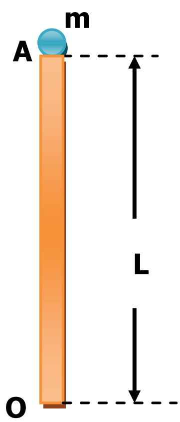
β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου αν δίνεται ότι η ροπή τ είναι σταθερή και το άκρο Α της ράβδου στη χρονική διάρκεια Δt, διάνυσε μήκος S=18 m.

γ) την ισχύ της ροπής τ τη χρονική στιγμή που η γραμμική ταχύτητα του άκρου Α της ράβδου έχει μέτρο ίσο με $u_A=18$ m/s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I=(1/3)ML^2$.

Απ. α) -72 J β) 8 N.m γ) 72 W

3. Λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ, μήκους $L=0{,}75m$ και μάζας $M=4Kg$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο άκρο Α της ράβδου έχουμε κολλήσει ένα μικρό σώμα μάζας $m=2Kg$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη στη πάνω κατακόρυφη θέση όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή δίνουμε μια πολύ μικρή ώθηση στη ράβδο.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-σώμα γίνεται για πρώτη φορά μέγιστος.

β) Να υπολογίσετε τη στροφορμή της ράβδου τη στιγμή που διέρχεται από την κάτω κατακόρυφη θέση της

γ) Τη χρονική στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την κάτω κατακόρυφη θέση της το σώμα αποκολλάται από τη ράβδο.

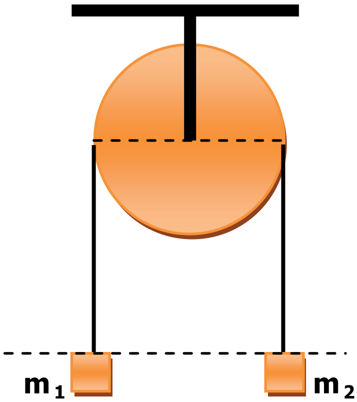
i) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή που διέρχεται από την οριζόντια θέση ανεβαίνοντας.

ii) Να διερευνήσετε αν η ράβδος φτάνει τελικά στην αρχική κατακόρυφη θέση της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I=(1/3)ML^2$ και $g=10\ m/s^2$.

Απ. α) $4\sqrt{2}$ rad/s β) 6 Kg.m^2/s γ) i) 9 J ii) Όχι

4. Η τροχαλία του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M=10Kg$, ακτίνα $R=0,2m$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα και στα άκρα του έχουμε δέσει δύο σώματα με μάζες $m_1=3Kg$ και $m_2=2$ Kg. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο με τα δύο σώματα να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας,

β) το μέτρο της δύναμης που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής,

γ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας,

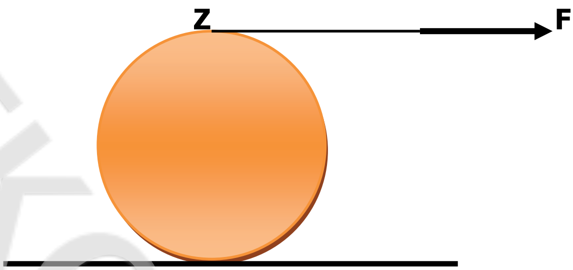
δ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος,

ε) τη κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή που τα δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση $h=0,4$ m.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του υπολογίζεται από τον τύπο $I=(1/2)MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$.

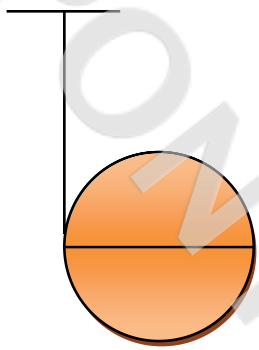
Απ. α) 5 rad/s² β) 149N γ) 1 Kg.m²/s² δ) 2 Kg.m²/s² ε) 1 J

5. Στο σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μάζας $M=2Kg$ και ακτίνας $R=0,5m$ γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα. Από τη χρονική στιγμή $t=0$ και μετά ασκούμε στο άκρο Ζ του νήματος οριζόντια σταθερή δύναμη F οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_1=4s$ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω περιστροφής ισούται με $dK_{περ}/dt=16J/s$. Να υπολογίσετε:



α) τη κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή t_1
β) το έργο της δύναμης F από τη στιγμή $t=0$ μέχρι τη στιγμή t_1
γ) το ποσοστό (%) του έργου της δύναμης F που έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης τη στιγμή t_1.
Δίνεται για τον κύλινδρο: $I=(1/2)MR^2$.
Απ. α) 96 J β) 96 J γ) 200/3 %

6. Στο δίσκο του διπλανού σχήματος, που έχει μάζα $M=4kg$ και ακτίνα $R=0,5m$, έχουμε τυλίξει αβαρές, μη εκτατό νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου το έχουμε δέσει στην οροφή. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο να κινηθεί προς τα κάτω. Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του δίσκου ισούται με $K_1=75J$. Να υπολογίσετε:



α) το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε από το δίσκο στη χρονική διάρκεια από $t=0$ έως t_1

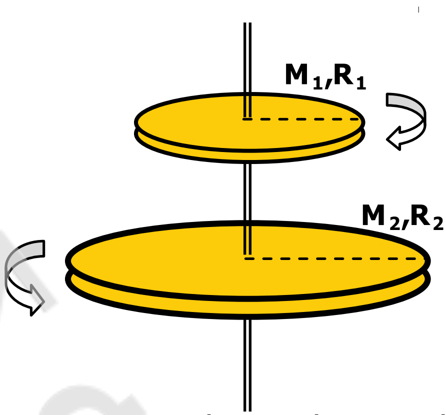
β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1

γ) τη στροφορμή του δίσκου τη χρονική στιγμή που έχει εκτελέσει 15/π περιστροφές.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του υπολογίζεται από τον τύπο $I=(1/2)MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με $g=10m/s^2$.

Απ. α) 1,875 m β) 200/3 J/s γ) $10\sqrt{2}$ Kg.m²/s

7. Δύο οριζόντιοι δίσκοι με μάζες $M_1=M_2=5Kg$ και ακτίνες $R_1=0,2m$ και $R_2=0,4m$ αντίστοιχα μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κοινό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους. Οι δύο δίσκοι είναι αρχικά ακίνητοι. Τη χρονική στιγμή t=0 ο κάθε δίσκος αρχίζει να δέχεται στη περιφέρειά του οριζόντια εφαπτομενική δύναμη που τον εξαναγκάζει σε περιστροφή.



Οι δύο δυνάμεις έχουν μέτρα $F_1=F_2=10N$ και οι ροπές τους έχουν αντίθετη φορά. Τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ οι δύο δυνάμεις καταργούνται ταυτόχρονα και ο πάνω δίσκος στρέφεται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής κάθε δίσκου από τη στιγμή t=0 έως τη στιγμή t_1.

β) Να υπολογίσετε τη κινητική ενέργεια κάθε δίσκου τη στιγμή t_1.

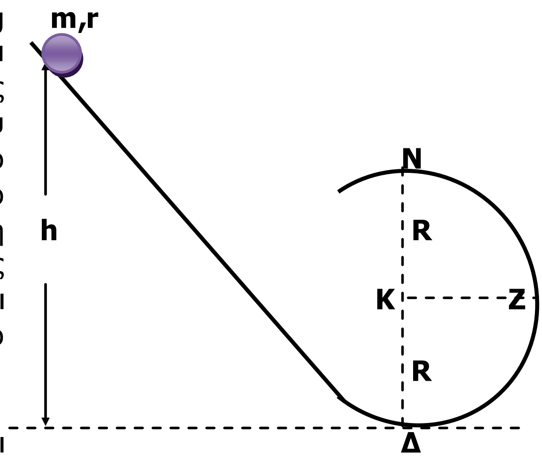
γ) Μετά τη κατάργηση των δύο δυνάμεων ο πάνω δίσκος πέφτει στον κάτω δίσκο και μετά από λίγο το σύστημά τους αποκτά κοινή γωνιακή ταχύτητα.

1) Να υπολογίσετε τη κοινή γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων.
2) Να βρείτε τη θερμότητα που εκλύθηκε από τη στιγμή της επαφής των δύο δίσκων μέχρι τη στιγμή που αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

Δίνεται για κάθε δίσκο: $I=(1/2)MR^2$

Απ. α) 2 Kg.m²/s² , 4 Kg.m²/s² β) 80J , 80J γ) 8rad/s , 144J

8. Μία σφαίρα μάζας m=0,7kg και ακτίνας r αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από το σημείο Κ της σιδηροτροχιάς του διπλανού σχήματος. Στο σημείο Κ το κέντρο μάζας της σφαίρας απέχει από το οριζόντιο δάπεδο απόσταση h=2,7m. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στη σιδηροτροχιά και μόλις που εκτελεί ανακύκλωση στο κυκλικό της τμήμα.



α) Αν η ακτίνα r της σφαίρας είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα R του κυκλικού τμήματος της σιδηροτροχιάς, να υπολογίσετε:

i. την ακτίνα R του κυκλικού τμήματος της σιδηροτροχιάς

ii. το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης που δέχεται η σφαίρα από τη σιδηροτροχιά τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της Δ

β) Αν η ακτίνα της σφαίρας ισούται με r=0,7m και η ακτίνα R ισούται με 1m, να υπολογίσετε:

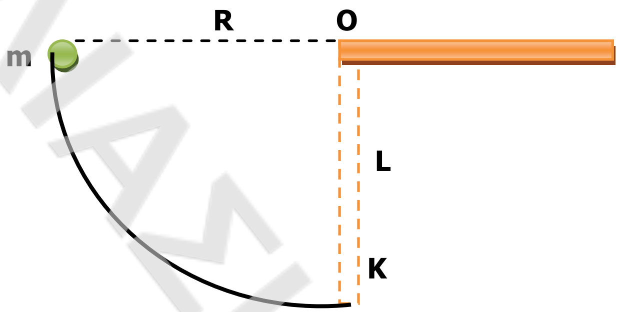
i. την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το ανώτερο σημείο Ν της σιδηροτροχιάς

ii. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο Ζ

Δίνεται για τη σφαίρα: $I=(2/5)MR^2$ και $g=10m/s^2$

Απ. α) 1 m , 34 N β) $2\sqrt{5}$ m/s γ) 1,4 N.m

9. Από την κορυφή λείου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R=1,2m αφήνουμε ελεύθερη μικρή σφαίρα – η οποία θεωρείται σημειακή – μάζας m=0,5Kg. Όταν η σφαίρα φτάσει στη βάση του τεταρτοκυκλίου συγκρούεται πλαστικά με το ελεύθερο άκρο κατακόρυφης ομογενούς ράβδου μήκους L=1,2m και μάζας M=3,5Kg, η οποία κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο έχοντας αφεθεί από την οριζόντια θέση μια προγενέστερη χρονική στιγμή. Η περιστροφή της ράβδου γίνεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου K της ράβδου λίγο πριν σφηνωθεί σε αυτό η μικρή σφαίρα.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της μικρής σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου ελάχιστα πριν η σφαίρα σφηνωθεί στη ράβδο.

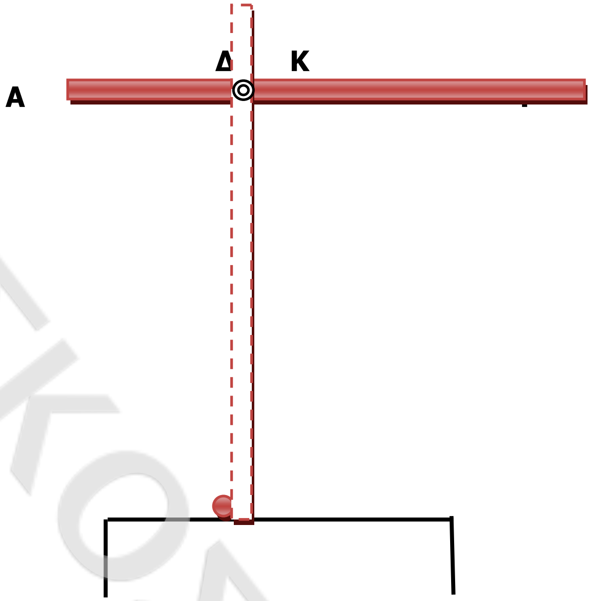
γ) Να βρείτε τη μεταβολή της στροφορμής της μικρής σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου εξαιτίας της κρούσης της με τη ράβδο.

δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό (%) της απώλειας κινητικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης των δύο σωμάτων.

Δίνονται: $I_{cm}=(1/12)ML^2$, $g=10\ m/s^2$, $\sqrt{24}=4,9$

Απ. α) 6 m/s β) 2,94 Kg.m²/s γ) +4,578 Kg.m²/s δ) 77%

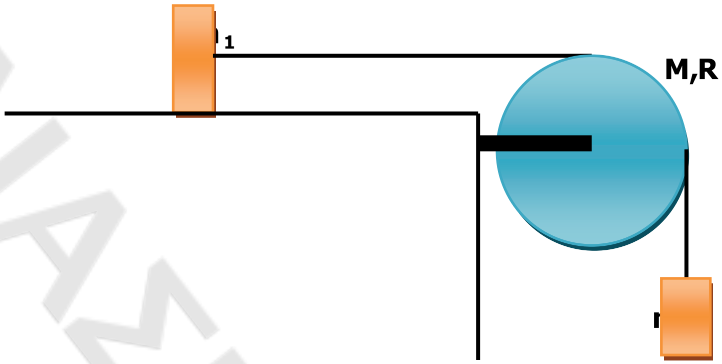
10. Η ράβδος ΑΓ του παρακάτω σχήματος είναι ομογενής έχει μάζα M=1Kg και μήκος L=4m. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Δ της ράβδου με ΚΔ=1m, όπου Κ είναι το κέντρο μάζας της ράβδου. Η ράβδος βρίσκεται σε ύψος h=3m πάνω από οριζόντιο τραπέζι στο οποίο υπάρχει κομμάτι πλαστελίνης μάζας m=1/9 Kg. Αν αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη να υπολογίσετε:



α) Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
β) Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη.
γ) Τη γραμμική ταχύτητα των άκρων Α και Γ της ράβδου τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη.
δ) Τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη συγκρούεται με το κομμάτι της πλαστελίνης το οποίο κολλάει στη ράβδο. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση. Δίνεται ότι $I_{cm}=(1/12)ML^2$.

Απ: α) 7/3 Kg.m² *β) 30/7 rad/s²* *γ)* $\sqrt{60/7}$ *m/s,* $3\sqrt{60/7}$ *m/s*
δ) $0,7\sqrt{60/7}$ *rad/s.*

11. Δύο μικρά σώματα με μάζες m_1=1Kg και m_2=4Kg είναι δεμένα στα δύο άκρα αβαρούς νήματος το οποίο περνά από το αυλάκι μιας τροχαλίας μάζας M=2Kg και ακτίνας R=(1/3)m , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα μάζας m_1 μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο οπότε το σώμα μάζας m_1 τη χρονική στιγμή t_1 αποκτά κινητική ενέργεια K_1=8J. Αν δίνεται ότι το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας να υπολογίσετε:



α) την κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώματα τη στιγμή t_1
β) το μήκος που διένυσε το σώμα μάζας m_1 από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t_1
γ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη στιγμή t_1
δ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_2 από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t_2 , αν δίνεται ότι σ' αυτή τη χρονική διάρκεια η μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας ισούται με ΔU=-75 J.
Δίνεται για την τροχαλία: $I=MR^2/2$ και g=10 m/s^2.
Απ. α) 48 J β) 1,2 m γ) 80/3 J/s δ) +50 J

12. Ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R=0,3m και βρίσκεται συνέχεια σε επαφή με τα δύο επίπεδα της ορθής γωνίας. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του κυλίνδρου με τα δύο επίπεδα είναι μ=0,5 και η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου είναι ω_0=80rad/s, να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή επιβράδυνση του κυλίνδρου
β) μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει να περιστρέφεται ο κύλινδρος.
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του ισούται με $I_{cm}=MR^2/2$ και g=10m/s^2.
Απ: α) 40rad/s^2 β) 2s

13. Σφαίρα μάζας m=1 Kg και ακτίνας R=0,1m αφήνεται από το πάνω άκρο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^0$. Αν το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου είναι h=1,75m να υπολογίσετε:

α) Για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής στατικής τριβής η σφαίρα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει.

β) Σε πόσο χρόνο η σφαίρα θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

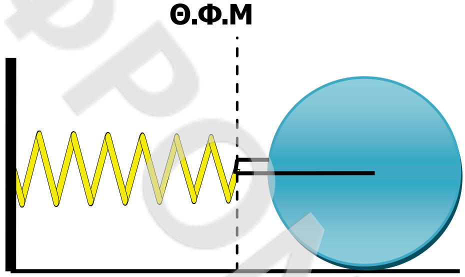
γ) Πόσες στροφές έχει κάνει μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

δ) Ποια είναι η στροφορμή της σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Δίνεται $g=10\ m/s^2$ και $I_{cm}=2mR^2/5$

Απ: α) $\mu_{op} \geq 2\sqrt{3}/21$ *β) t=1,4s* *γ) N=35/2π* *δ) L=0,2 Kg.m/s*

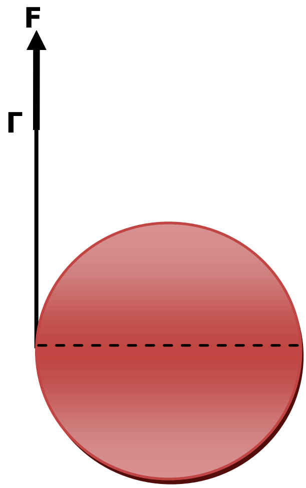
14. Ο κύλινδρος του σχήματος μάζας M=2Kg και ακτίνας R μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο. Απομακρύνουμε τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας του (όπου και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος) στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και στη συνέχεια τον αφήνουμε ελεύθερο.



Αν το ελατήριο έχει σταθερά k=300N/m, να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδό της. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του ισούται με $I_{cm}=MR^2/2$.

Απ: T=0,2π s

15. Γύρω από τον αρχικά ακίνητο κύλινδρο του διπλανού σχήματος ο οποίος έχει μάζα M=0,2Kg και ακτίνα R=0,1m, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκείται κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα πάνω, έτσι ώστε ενώ το νήμα ξετυλίγεται το κέντρο μάζας του κυλίνδρου να παραμένει στο ίδιο ύψος.



α) Να βρείτε την δύναμη F.

β) Να βρείτε το έργο της δύναμης F μέχρι τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου γίνεται ω=100rad/s.

γ) Πόσο μήκος νήματος έχει ξετυλιχθεί μέχρι την χρονική στιγμή του προηγούμενου ερωτήματος;

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του ισούται με $I_{cm}=MR^2/2$ και $g=10m/s^2$.

Απ: α) 2N β) 5J γ) 2,5m

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ,
ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ,
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΤΣΙΑΡΔΑΚΛΗΣ ΘΕΟΛΟΓΟΣ - Φυσικός

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

$\upsilon_1+\upsilon_1'=\upsilon_2+\upsilon_2'$	Σχέση μεταξύ των αλγεβρικών ταχυτήτων δύο σωμάτων.
$\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2$	Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την κρούση.
$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$	Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.
$\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$	Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την κρούση του με ένα σώμα μάζας m_2 που ήταν αρχικά ακίνητο.
$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$	Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του αρχικά ακίνητου σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση του με σώμα μάζας m_1 που είχε ταχύτητα υ_1.
$\upsilon_1'=-\upsilon_1$ και $\upsilon_2'=0$	Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων δύο σωμάτων m_1 και m_2 αμέσως μετά την κρούση, αν το αρχικά ακίνητο σώμα m_2 έχει τεράστια μάζα.

ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

$\mathbf{p_{αρχ}=p_{τελ}}$	Η αρχή διατήρησης της ορμής (Ισχύει γενικά σε όλες τις κρούσεις).
$\mathbf{E_{απωλ}=Q=K_{αρχ}-K_{τελ}}$	Η απώλεια ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα.

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

$\mathbf{υ_A}$= ταχύτητα παρατηρητή $\mathbf{υ_S}$= ταχύτητα πηγής $\mathbf{υ_{ηχου\,(A)}}$=ταχύτητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής $\mathbf{υ_{ηχου}}$=340m/s =ταχύτητα του ήχου στον αέρα $\mathbf{λ_A}$= μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής $\mathbf{f_A}$= συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής $\mathbf{λ_S}$= μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων που εκπέμπει η πηγή $\mathbf{f_S}$= συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που εκπέμπει η πηγή $\mathbf{T_S}$=περίοδος των ηχητικών κυμάτων που εκπέμπει η πηγή	
$\mathbf{λ_A=λ_S}$ $\mathbf{υ_{ηχου(A)}=υ_{ηχου}}$ $\mathbf{f_A=f_S}$	Ακίνητος παρατηρητής και ακίνητη πηγή ή πηγή και παρατηρητής κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα.

$\lambda_A = \lambda_S$ $u_{ηχου(A)} = u_{ηχου} \pm u_A$ $f_A = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_S$	Παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $υ_A$ στην ίδια ευθεία με την ακίνητη πηγή. Το (+) όταν πλησιάζει την πηγή και το (-) όταν απομακρύνεται από την πηγή.
$\lambda_A = \lambda_S \pm u_S T$ $u_{ηχου(A)} = u_{ηχου}$ $f_A = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon_S} f_S$	Ηχητική πηγή που κινείται με ταχύτητα $υ_S$ στην ίδια ευθεία με ακίνητο παρατηρητή. Το (+) όταν απομακρύνεται από τον παρατηρητή και το (-) όταν πλησιάζει τον παρατηρητή.
$f_A = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon_S} f_S$	Παρατηρητής και ηχητική πηγή κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $υ_A$ και $υ_S$ αντίστοιχα.

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Πως διακρίνονται οι κρούσεις ανάλογα με τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των σωμάτων.

✓ **Κεντρική (ή μετωπική)** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι συγραμμικά.

✓ **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων είναι παράλληλα.

✓ **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση έχουν τυχαίες διευθύνσεις.

Κρούση και αρχή διατήρησης της ορμής.

✓ Στην περίπτωση της κρούσης δύο σωμάτων, ακόμα και αν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που δεν έχουν μηδενική συνισταμένη, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί **μονωμένο ($\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0$)**, διότι η χρονική διάρκεια του φαινομένου είναι πάρα πολύ μικρή. Άρα κατά την διάρκεια **κάθε κρούσης** η ορμή του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{p_{O\Lambda,\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{p_{O\Lambda,\tau\varepsilon\lambda}} \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1}' + \overrightarrow{p_2}' \Leftrightarrow -\overrightarrow{p_1}' + \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2}' - \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{p_1}' - \overrightarrow{p_1}\right) = \overrightarrow{p_2}' - \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow \Delta\overrightarrow{p_2} = -\Delta\overrightarrow{p_1}$$

Επομένως στη διάρκεια κάθε κρούσης οι ορμές των δύο σωμάτων μεταβάλλονται και μάλιστα οι μεταβολές αυτές είναι αντίθετα διανύσματα.

Κρούση και βαρυτική δυναμική ενέργεια

✓ Επειδή η κρούση διαρκεί ελάχιστα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά την διάρκειά της οι θέσεις των σωμάτων που συγκρούονται δεν αλλάζουν, άρα δεν μεταβάλλεται και η βαρυτική δυναμική τους ενέργεια

$$\boldsymbol{\Delta U = 0}.$$

Κατά συνέπεια η οποιαδήποτε μεταβολή στην μηχανική ενέργεια του συστήματος θα οφείλεται αποκλειστικά σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

$$\boldsymbol{E_{MHX(O\Lambda)} = K_{O\Lambda} + U_{O\Lambda} \Leftrightarrow \Delta E_{MHX(O\Lambda)} = \Delta K_{O\Lambda} + \Delta U_{O\Lambda} \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Delta E_{MHX(O\Lambda)} = \Delta K_{O\Lambda}}$$

Πως διακρίνουμε τις κρούσεις με κριτήριο τις κινητικές τους ενέργειες.

✓ **Ελαστική** ονομάζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια (άρα και η μηχανική ενέργεια) του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή.

$$\boldsymbol{K_{O\Lambda,\alpha\rho\chi} = K_{O\Lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Leftrightarrow -K_1' + K_1 = K_2' - K_2 \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -(K_1' - K_1) = K_2' - K_2 \Leftrightarrow \Delta K_2 = -\Delta K_1}$$

Επομένως στην ελαστική κρούση οι μεταβολές των κινητικών ενεργειών των δύο σωμάτων είναι αντίθετες, δηλαδή όση κινητική ενέργεια χάνει το ένα σώμα τόση κινητική ενέργεια **μεταβιβάζεται** στο άλλο σώμα.

✓ **Ανελαστική** ονομάζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια (άρα και η μηχανική ενέργεια) του συστήματος των σωμάτων μειώνεται, επομένως ισχύει:

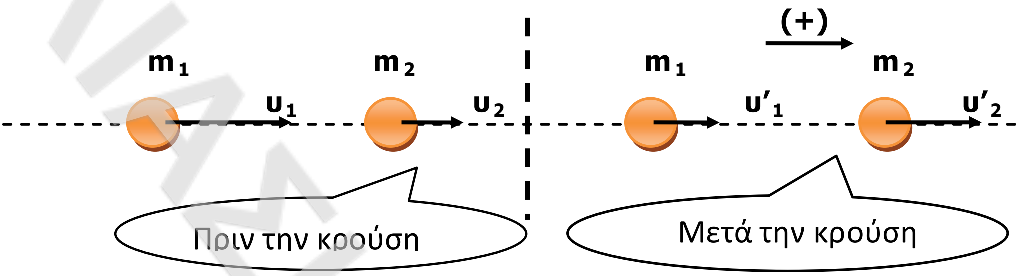
$$\boldsymbol{K_{O\Lambda,\alpha\rho\chi} > K_{O\Lambda,\tau\varepsilon\lambda}}$$

Η απώλεια αυτή της κινητικής ενέργειας (μηχανικής ενέργειας) των σωμάτων που συγκρούονται, συνηθίζουμε να λέμε ότι αποδίδεται στο περιβάλλον με τη μορφή θερμότητας.

$$\boldsymbol{Q = K_{O\Lambda,\alpha\rho\chi} - K_{O\Lambda,\tau\varepsilon\lambda}}$$

✓ **Πλαστική** ονομάζεται η ανελαστική κρούση που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων που συγκρούονται (συσσωμάτωμα).

Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών (γενικά).



✓ Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_{1}.\upsilon_1 + m_2.\upsilon_1 = m_1{}'.\upsilon_1{}' + m_2{}'.\upsilon_2{}' \quad (2)$$

✓ Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

✓ Με συνδυασμό των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει η σχέση:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \qquad \mathbf{(3)}$$

✓ Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις από τις οποίες υπολογίζουμε τις **αλγεβρικές τιμές** των ταχυτήτων υ'_1 και υ'_2.

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 \quad (4)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 \quad (5)$$

Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες.

✓ Στην περίπτωση αυτή όπως προκύπτει από τις σχέσεις (4) και (5) **τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.** Δηλαδή:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2$$
$$\upsilon_2' = \upsilon_1$$

Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών από τις οποίες η μια είναι ακίνητη.

✓ Στην περίπτωση αυτή όπως προκύπτει από τις σχέσεις (4) και (5) ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1$$

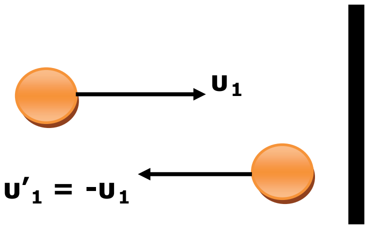
✓ Αν η μάζα του κινούμενου σώματος (βλήμα) είναι μικρότερη από τη μάζα του ακίνητου σώματος (στόχος), τότε η $\upsilon'_1<0$ πράγμα που σημαίνει ότι αντιστρέφεται η φορά κίνησης του βλήματος (ανάκρουση).

Κεντρική ελαστική κρούση μιας σφαίρας με άλλο ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας.

✓ Στην περίπτωση αυτή , μετά την κρούση η ακίνητη σφαίρα παραμένει ακίνητη, ενώ η κινούμενη σφαίρα γυρίζει προς τα πίσω με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Δηλαδή ισχύει:

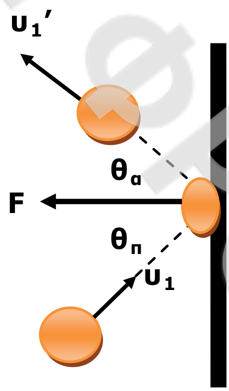
$$\upsilon_1' = -\upsilon_1$$
$$\upsilon_2' = 0$$

✓ Αν η σφαίρα προσκρούει κάθετα σε τοίχο ή δάπεδο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν από την κρούση.



✓ Αν η σφαίρα προσκρούει πλάγια σε τοίχο ή δάπεδο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης (θ_π) είναι ίση με την γωνία ανάκλασης (θ_α).

$$\boldsymbol{\upsilon_1'} = \upsilon_1$$
$$\widehat{\boldsymbol{\theta_\pi}} = \widehat{\boldsymbol{\theta_\alpha}}$$



Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι επειδή η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι κάθετη στον τοίχο, η παράλληλη με τον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας μένει ανεπηρέαστη κατά τη κρούση $(\boldsymbol{\upsilon_{1,\psi}'} = \boldsymbol{\upsilon_{1,\psi}})$ και μεταβάλλεται μόνο η κάθετη συνιστώσα στον τοίχο $(\boldsymbol{\upsilon_{1,\chi}'} = -\boldsymbol{\upsilon_{1,\chi}})$.

ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

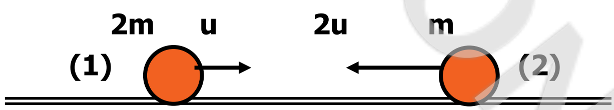
1. Σφαίρα Α μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου u_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_2. Αν η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά τη κρούση έχει μέτρο που είναι ίσο με $\upsilon_1/4$ και η φορά της είναι αντίθετη της αρχικής, τότε το πηλίκο m_1/m_2 των μαζών των δύο σφαιρών ισούται με:

α) $\frac{5}{3}$ **β)** 7 **γ)** $\frac{1}{7}$ **δ)** $\frac{3}{5}$

2. Σφαίρα Α μάζας m_1 κινείται με σταθερή ταχύτητα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μάζας $m_2=3m_1$. Το ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α εξαιτίας της κρούσης της με τη σφαίρα Β ισούται με:

α) 25% **β)** 50% **γ)** 75% **δ)** 100%

3. Οι σφαίρες (1) και (2) του παρακάτω σχήματος συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



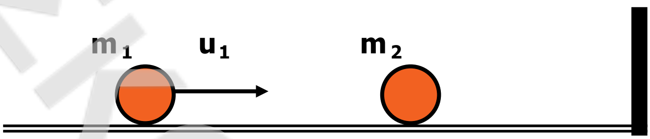
α) Οι ορμές των σφαιρών μετά τη κρούση τους είναι αντίθετες

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας (1) έχει διπλάσιο μέτρο από τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας (2)

γ) Αμέσως μετά τη κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών μηδενίζεται.

δ) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας (2) είναι διπλάσια από τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας (1)

4. Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2>m_1$.Στη συνέχεια η σφαίρα μάζας m_2 συγκρούεται ελαστικά και κάθετα με κατακόρυφο τοίχο. Αν μετά τις δύο κρούσεις η απόσταση των δύο σφαιρών παραμένει σταθερή, τότε το πηλίκο των μαζών τους είναι:



α) $\dfrac{m_2}{m_1}=2$ **β)** $\dfrac{m_2}{m_1}=3$ **γ)** $\dfrac{m_2}{m_1}>>1$

5. Όταν δύο σώματα που έχουν ίσες μάζες και κινούνται με αντίθετες ταχύτητες συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά τότε:
α) σταματούν ακαριαία μόλις συγκρουστούν
β) ανταλλάσσουν ταχύτητες
γ) συνεχίζουν να κινούνται όπως πριν τη κρούση
δ) κινούνται με τις μισές ταχύτητες από αυτές που είχαν πριν από τη κρούση

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

6. Κατά την πλάγια ελαστική κρούση μιας σφαίρας με κατακόρυφο τοίχο δεν μεταβάλλεται:
α) η ορμή της σφαίρας
β) η ταχύτητα της σφαίρας
γ) η κινητική ενέργεια της σφαίρας

δ) το μέτρο της ορμής της σφαίρας

7. Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα. Οι σφαίρες έχουν αντίθετες ορμές και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

α) οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά τη κρούση έχουν την ίδια κατεύθυνση.

β) αν τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά τη κρούση είναι u_1' και u_2', τότε ισχύει η σχέση $\frac{m_1}{m_2} = \frac{u_2'}{u_1'}$

γ) η ορμή κάθε σφαίρας δεν μεταβάλλεται εξαιτίας της κρούσης.

δ) η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας μετά τη κρούση είναι ίση με την κινητική ενέργεια που είχε πριν τη κρούση.

8. Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων:

α) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ενός σώματος είναι αντίθετη από τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του άλλου σώματος.

β) η μεταβολή της ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη από τη μεταβολή της ορμής του άλλου σώματος.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

9. Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 και συγκρούονται κεντρικά. Αν κατά την κρούση τα δύο σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, να αποδείξετε ότι:

α) έχουν ίσες μάζες

β) η κρούση είναι ελαστική.

10. Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2=λm_1$. Να αποδείξετε ότι το ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi\% = \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}.100\%$$

11. Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2.

α) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μάζας m_1 μετά τη κρούση είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητάς της πριν τη κρούση.

ii) το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μάζας m_1 μετά τη κρούση είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητάς της πριν τη κρούση.

β) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να αποκτήσει το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μάζας m_2 μετά τη κρούση;

ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ-ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

13. Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου u και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Αν ο λόγος των μαζών είναι $\frac{m_1}{m_2}=\lambda$, τότε η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά τη κρούση έχει μέτρο ίσο με:

α) $\lambda.u$ **β)** u/λ **γ)** $\lambda.u/(\lambda+1)$ **δ)** $(\lambda+1).u$

14. Μικρό σώμα μάζας $m_1=m$ έχει κινητική ενέργεια K και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο μικρό σώμα μάζας $m_2=4m$. Η απώλεια ενέργειας εξαιτίας της κρούσης είναι:

α) 0,2 K **β)** 0,4 K **γ)** 0,5 K **δ)** 0,8 K

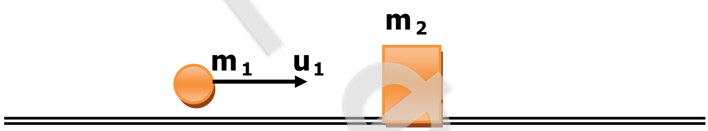
15. Μικρό σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με μικρό σώμα μάζας 4m το οποίο είναι ακίνητο. Το ποσοστό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της κρούσης είναι:

α) 20% **β)** 90% **γ)** 80% **δ)** 60%

16. Μικρό σώμα μάζας $m_1=m$ κινείται με ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο μικρό σώμα μάζας $m_2=4m$. Εξαιτίας της σύγκρουσης τα δύο σώματα ανταλλάσσουν ορμές. Η κρούση είναι:

α) Ελαστική **β)** Ανελαστική

17. Το βλήμα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα m_1 , ταχύτητα $υ_1$ και ορμή p_1 και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο ξύλινο κύβο μάζας $m_2=4m_1$. Το βλήμα διαπερνά τον κύβο και εξέρχεται από αυτόν έχοντας υποστεί ελάττωση της κινητικής του ενέργειας κατά 64%.



1) Η ορμή του ξύλινου κύβου αμέσως μετά την κρούση είναι:

α) $0{,}4\ p_1$ **β)** $0{,}6\ p_1$ **γ)** $0{,}2\ p_1$

2) Το ποσοστό (%) απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της κρούσης είναι:

α) 20% **β)** 40% **γ)** 60%

18. Μικρό σώμα (1) μάζας m_1 κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ορμή p_1 και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο μικρό σώμα (2) μάζας m_2. Εξαιτίας της κρούσης των δύο σωμάτων το 20% της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος (1) μετατράπηκε σε θερμότητα.

1) Οι μάζες m_1 και m_2 των δύο σωμάτων ικανοποιούν τη σχέση:

α) $m_1=2m_2$ **β)** $m_1=0{,}5m_2$ **γ)** $m_1=4m_2$

2) Η μεταβολή της ορμής του σώματος (1) εξαιτίας της κρούσης είναι:

α) $-0,5\ p_1$ **β)** $-0,2\ p_1$ **γ)** $-0,8\ p_1$

19. Μικρή σφαίρα (1) μάζας m κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου υ χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο κάθετα σε αυτόν και ανακλάται με ταχύτητα μέτρου υ′. Εξαιτίας της κρούσης αυτής εκλύεται θερμότητα ίση με το 36% της κινητικής ενέργειας που είχε η σφαίρα πριν την κρούση.

1) Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας της σφαίρας εξαιτίας της κρούσης ισούται με:

α) -0,8υ **β)** -0,4υ **γ)** -0,2υ

2) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας εξαιτίας της κρούσης είναι:

α) 0,2mυ **β)** 1,8mυ **γ)** 0,6mυ

20. Μια σφαίρα μάζας m_1 που έχει κινητική ενέργεια $K_1=20$ J , συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2=3m_1$. Η απώλεια μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης ισούται με:

α) 10J **β)** 2J **γ)** 20J **δ)** 15J

21. Κατά την κεντρική και πλαστική κρούση δύο σφαιρών με διαφορετικές μάζες η κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται εξ′ ολοκλήρου σε θερμότητα. Οι σφαίρες πριν τη κρούση είχαν:

α) ίσες ταχύτητες

β) αντίθετες ορμές

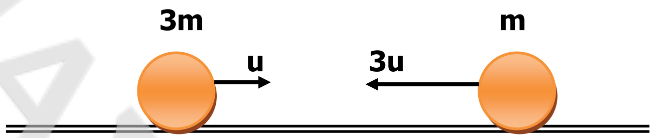
γ) ίσες κινητικές ενέργειες

δ) αντίθετες ταχύτητες

22. Δύο σώματα με μάζες $m_1=2$ Kg και $m_2=3$ Kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες $υ_1=10$ m/s και $υ_2=5$ m/s και συγκρούονται πλαστικά. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

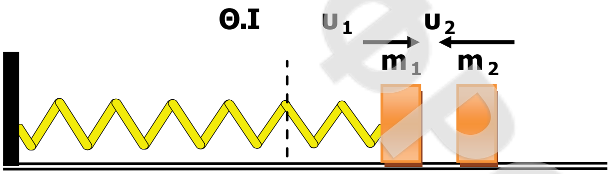
α) 75J **β)** -75J **γ)** -150J

23. Οι σφαίρες του παρακάτω σχήματος συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι:



α) 50% **β)** 100% **γ)** 25% **δ)** 33%

24. Σώμα μάζας m_1=m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T_1, γωνιακή συχνότητα ω_1 και πλάτος A_1. Όταν το σώμα μάζας m_1 διέρχεται από το σημείο όπου η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας m_2=3m, το οποίο κινείται με ταχύτητα u_2 αντίθετης φοράς από αυτή του πρώτου σώματος.



Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_2=A_1/2$.

1) Ο χρόνος που χρειάζεται το συσσωμάτωμα για να μεταβεί από τη θέση που έγινε η κρούση στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά είναι:

α) $T_1/2$ **β)** $T_1/4$ **γ)** $T_1/8$

2) Η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 ελάχιστα πριν την κρούση, έχει μέτρο:

α) $\omega_1 A_1 \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **β)** $\omega_1 A_1/3$ **γ)** $\omega_1 A_1 \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

25. Δύο σφαίρες ίσης μάζας κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες u_1 και u_2 οι οποίες έχουν διαφορετικά μέτρα και κάθετες διευθύνσεις. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά τη κρούση κινείται με ταχύτητα u_K.

α) Το συσσωμάτωμα κινείται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι ταχύτητες u_1 και u_2.

β) Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των ορμών που είχαν τα δύο σώματα πριν τη κρούση.

γ) Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει η σχέση $4u_K^2 = u_1^2 + u_2^2$.

δ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με το 50% της αρχικής του ενέργειας.

26. Δύο σώματα (1) και (2) με μάζες m και 4m αντίστοιχα κινούνται με αντίθετες ορμές και συγκρούονται πλαστικά.

α) Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν την κρούση ικανοποιούν τη σχέση u_1=-4u_2.

β) Το συσσωμάτωμα που προκύπτει από την κρούση κινείται προς την κατεύθυνση κίνησης που είχε το σώμα μάζας 4m.

γ) Η κινητική ενέργεια κάθε σώματος μεταβάλλεται το ίδιο ποσό εξαιτίας της κρούσης.

δ) Η αρχική κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων μετατρέπεται εξαιτίας της κρούσης κατά 100% σε θερμότητα.

27. Δύο σώματα κινούνται με αντίθετες ορμές και συγκρούονται πλαστικά με αποτέλεσμα να ακινητοποιηθούν. Οι αρχικές τους ταχύτητες είναι αντίθετες.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

28. Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου υ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Να αποδείξετε ότι το ποσοστό (%) της ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της κρούσης εξαρτάται μόνο από το λόγο των μαζών των δύο σωμάτων.

29. Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά. Αν η μια σφαίρα είναι ακίνητη να βρείτε το πηλίκο της αρχικής προς τη τελική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών και να αποδείξετε ότι υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά τη κρούση.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1η κατηγορία ασκήσεων
Κεντρική(μετωπική) και ελαστική κρούση δύο σωμάτων.

✓ **Αν και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής θα εφαρμόζουμε συνήθως τους τύπους του σχολικού βιβλίου που ισχύουν στη μετωπική και ελαστική κρούση ανάλογα με την περίπτωση. Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι στους τύπους αυτούς αντικαθιστούμε τις** αλγεβρικές τιμές **των ταχυτήτων (η επιλογή της θετικής φοράς γίνεται αυθαίρετα) και όχι τα μέτρα τους.**

✓ **Όταν μας ζητάνε να βρούμε αν μια κρούση είναι ελαστική ή όχι, μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.**
α) Να δείξουμε ότι ισχύει ή όχι η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.
β) Αν ξέρουμε ότι η κρούση είναι μετωπική αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει ή όχι η σχέση

$$\upsilon_1 + \upsilon'_1 = \upsilon_2 + \upsilon'_2$$

Επιπλέον σε μια ειδικότερη περίπτωση που τα σώματα έχουν και

ίσες μάζες αρκεί να δείξουμε ότι ανταλλάσσουν ή όχι ταχύτητες.

✓ **Για να υπολογίσουμε τη μέση δύναμη που δέχεται κατά τη διάρκεια μιας κρούσης το ένα σώμα από το άλλο, αρκεί να εφαρμόζουμε τη γενικότερη διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα**

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

όπου Δp είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος που μας ενδιαφέρει και Δt είναι η χρονική διάρκεια της κρούσης.

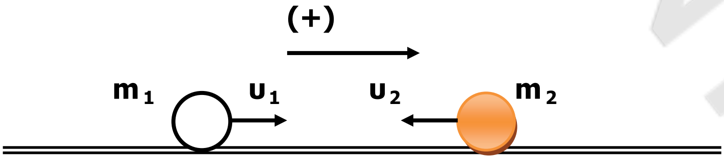
✓ **Για να υπολογίσουμε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος κατά τη διάρκεια μιας κρούσης χρησιμοποιούμε τη σχέση**

$$\pi\% = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}}.100\% = \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}}.100\%$$

✓ **Αν μας ζητήσουν το** ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταβιβάστηκε **από το ένα σώμα (π.χ το σώμα 1) στο άλλο(π.χ το σώμα 2), βρίσκουμε το** ποσοστό μείωσης **της κινητικής ενέργειας του ενός σώματος 1. Δηλαδή:**

$$\pi\% = \frac{\Delta K_1}{K_1}.100\% = \frac{K_1 - K_1{}'}{K_1}.100\%$$

1. Δύο μικρές σφαίρες με μάζες m_1=1Kg και m_2=3Kg κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες μέτρου $υ_1$=4m/s και $υ_2$=2m/s αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται ελαστικά. Να υπολογίσετε:



α) την ταχύτητα κάθε σφαίρας αμέσως μετά τη κρούση

β) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης

γ) το μέτρο της μέσης δύναμης που άσκησε η μία σφαίρα στην άλλη εξαιτίας της κρούσης, αν αυτή διήρκησε $\Delta t=0{,}01s$

δ) το ποσοστό επί τις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης

Απ: α) $\upsilon_1{}'=-5m/s$, $\upsilon_2{}'=+1m/s$, *β)* $\Delta p_1=-9kg\cdot m/s$, $\Delta p_2=+9kg\cdot m/s$, *γ)* $F_1=F_2=900N$, *δ)* $\pi_1\%=56{,}25\%$, $\pi_2\%=-75\%$

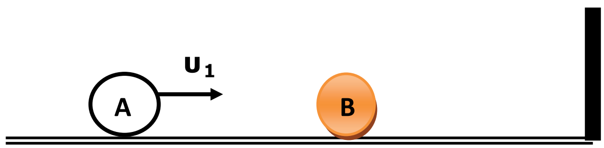
2. Μία ακίνητη μικρή σφαίρα μάζας $m_2=1Kg$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη μικρή σφαίρα $m_1=3Kg$ που κινείται με ταχύτητα υ_1. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών μετά τη κρούση είναι 24J.

α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα κάθε σφαίρας αμέσως μετά τη κρούση.

β) Να αποδειχθεί ότι το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα m_2 εξαρτάται μόνο από το λόγο των μαζών των δύο σφαιρών και κατόπιν να υπολογιστεί το ποσοστό αυτό.

Απ: α) $\upsilon_1{}'=2m/s$, $\upsilon_2{}'=6m/s$, *β)* $\pi\%=75\%$

3. Μία σφαίρα Α μάζας m_1 κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_2 ($m_2>m_1$). Μετά τη κρούση η σφαίρα Β συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο που είναι κάθετος στη διεύθυνση κίνησης των δύο σφαιρών.



α) Να βρεθεί ο λόγος m_1/m_2 έτσι ώστε μετά τις δύο κρούσεις η απόστασή τους να παραμένει σταθερή.

β) Ποιο ποσοστό % της ενέργειας της σφαίρας Α, μεταβιβάστηκε στη σφαίρα Β κατά τη κρούση τους;

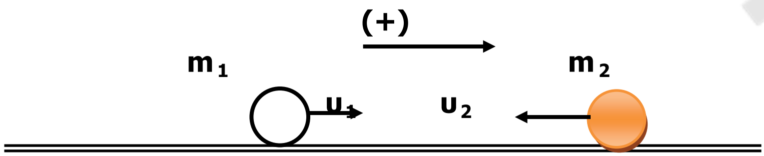
Απ: *α)* $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$, *β) π%=75%*

4. Τρεις σφαίρες Α, Β, Γ με μάζες $m_A=m$, $m_B=2m$, $m_\Gamma=2m$, βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στη σφαίρα Α ταχύτητα υ προς τα δεξιά. Η σφαίρα Α συγκρούεται με τη Β και στη συνέχεια με τη Γ.

Αν όλες οι κρούσεις είναι μετωπικές και ελαστικές, να βρείτε το λόγο της αρχικής προς την τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας Α.

Απ: $\frac{K_{arx}}{K_{tel}}=81$

5. Μικρή σφαίρα μάζας $m_1=2Kg$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $υ_1=18m/s$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη μικρή σφαίρα μάζας $m_2=1Kg$ που έχει ταχύτητα $υ_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως μετά τη κρούση είναι +12 kg·m/s. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_2 πριν τη κρούση
β) την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων
γ) την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση
δ) την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος με μάζα m_2 εξαιτίας της κρούσης
Απ: (α) $υ_2=24m/s$, (β) $K_{ολ}=612J$, (γ) $υ_1{'}=-10m/s$, $υ_2{'}=+32m/s$, (δ) $ΔK_2=+224J$

6. Δύο μικρά σώματα με μάζες $m_1=3Kg$ και $m_2=1Kg$ κινούνται με ταχύτητες μέτρου $u_1=6m/s$ και u_2 αντίστοιχα και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αμέσως μετά τη κρούση η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 είναι αντίθετη της ταχύτητας που είχε το σώμα μάζας m_2 πριν τη κρούση. Να υπολογίσετε:
α) την ταχύτητα u_2
β) την ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 μετά την κρούση
γ) την μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας της κρούσης
Απ. Α) –2 m/s Β) +10 m/s Γ) -12 Kg.m/s.

7. Δύο μικρά σώματα με μάζες $m_1=10Kg$ και m_2 κινούνται με ταχύτητες αντίθετης φοράς και μέτρου $u_1=6m/s$ και u_2 αντίστοιχα, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και με τη κρούση ανταλλάσσουν τις ορμές τους. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι $u_2'=4m/s$.
α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_2
β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα u_2
Απ. α) 15 Kg β) -4 m/s

8. Μικρό σώμα (1) μάζας $m_1=2$ Kg κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ορμή μέτρου $p_1=20$ Kg.m/s και συγκρούεται πλάγια με ακίνητο μικρό σώμα

(2) μάζας $m_2=m_1$. Μετά την κρούση η ορμή του σώματος (1) έχει μέτρο $p_1'=16$ Kg.m/s και οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι μεταξύ τους κάθετες.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής του σώματος (2) μετά την κρούση.

β) Να αποδείξετε ότι η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική.

Απ. Α) 12 Kg.m/s

2η κατηγορία ασκήσεων
Κεντρική και ανελαστική κρούση δύο σωμάτων.

✓ **Προφανώς δεν ισχύουν οι τύποι υπολογισμού των ταχυτήτων u_1' και u_2' που αποδείξαμε στην μετωπική και ελαστική κρούση. Επομένως θα πρέπει υποχρεωτικά να εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής.**

✓ **Αν μας ζητήσουν να βρούμε το ποσοστό θερμότητας που παράχθηκε, θα βρούμε ισοδύναμα το ποσοστό απώλειας μηχανικής (δηλ. κινητικής ενέργειας).**

$$\pi\% = \frac{\Delta K_{ΟΛ}}{K_{ΟΛ,αρχ}}.100\%$$

✓ **Αν μετά από μια πλαστική κρούση προκύψει ακίνητο συσσωμάτωμα, τότε:**

$$\overrightarrow{p_{ΟΛ}} = \overrightarrow{p_{ΟΛ}'} \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow m_1.\overrightarrow{v_1} = -m_2.\overrightarrow{v_2}$$

Επομένως:

α) Οι ορμές των δύο σωμάτων πριν τη κρούση είναι αντίθετες.

β) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν τη κρούση είναι αντίρροπες.

γ) Όλη η κινητική ενέργεια πριν τη κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.

9. Δύο σώματα με μάζες $m_1=2Kg$ και $m_2=6Kg$ κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες μέτρου $u_1=20m/s$ και $u_2=4m/s$ αντίστοιχα, που έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

α) Αν τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά να υπολογίσετε:

i) την ταχύτητα του συσσωματώματος

ii) το ποσοστό (%) της μηχανικής ενέργειας που χάθηκε εξαιτίας της κρούσης.

iii) τη μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_2.

β) Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά χωρίς να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα και η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 μετά την κρούση έχει μέτρο $u_1'=2$ m/s και φορά ίδια με αυτή που είχε πριν την κρούση. Να διερευνήσετε αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική ή ανελαστική.

Απ. α) 2 m/s , 96,43% , 36 Kg.m/s β) ανελαστική

10. Ένα σώμα μάζας $m_1=3$ Kg που κινείται με ταχύτητα u_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2, το οποίο βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Αμέσως μετά τη κρούση η ορμή του συσσωματώματος που προκύπτει έχει μέτρο $p_{συστ}=48Kg.m/s$, ενώ η κινητική του ενέργεια ισούται με $K_{συστ}=144J$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας u_1

β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση

γ) τη θερμότητα που εκλύθηκε εξαιτίας της κρούσης.

Απ. α) 16 m/s β) 6 m/s γ) 240 J

11. Δύο σώματα με μάζες $m_1=7Kg$ και $m_2=3Kg$ που κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει από την κρούση έχει κινητική ενέργεια ίση με μηδέν. Αν δίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 πριν τη κρούση είναι $u_1=12m/s$, να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 πριν την κρούση θεωρώντας θετική τη φορά της ταχύτητας u_1

β) την απώλεια ενέργειας εξαιτίας της κρούσης

γ) την μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_2 εξαιτίας της κρούσης.
Απ. α) -28 m/s β) 1680 J γ) +84 Kg.m/s

12. Δύο σώματα Α και Β με μάζες m_1=3 Kg και m_2=4 Kg κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου $υ_0$=7 m/s.

Α) Αν οι σφαίρες συγκρουστούν μετωπικά και ελαστικά και η σφαίρα Α κινείται προς τη θετική κατεύθυνση:

α) να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση

β) πόση δύναμη ασκεί η σφαίρα Α στη σφαίρα Β αν η διάρκεια της κρούσης είναι $Δt=10^{-3}$ s.

Β) Αν οι σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις και συγκρουστούν πλαστικά, να βρείτε:

α) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

β) πόση μηχανική ενέργεια έγινε θερμότητα κατά την κρούση

Απ: Α) α) $υ_1$=-9 m/s , $υ_2$=5 m/s β) $F=48.10^3$N Β) α) V=5 m/s , εφφ=3/4 β) 84J

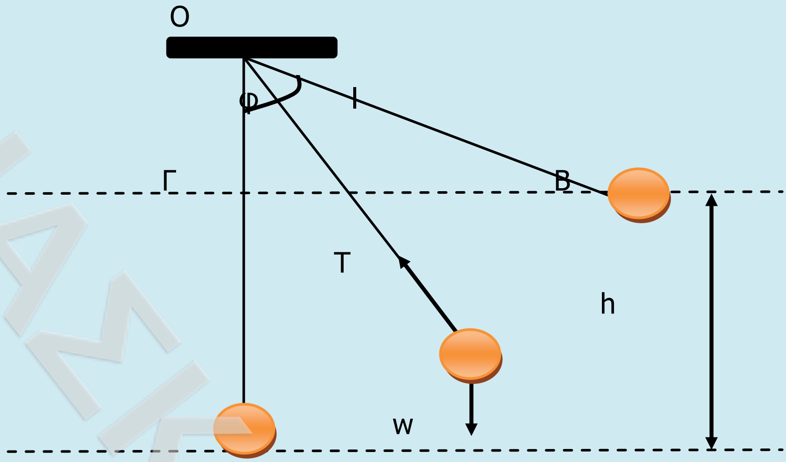
$3^η$ κατηγορία ασκήσεων

Κεντρική κρούση δύο σωμάτων, το ένα από τα οποία είναι δεμένο σε νήμα.

✓ **Για τη κίνηση του σώματος που είναι δεμένο στο νήμα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) ή την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε).**

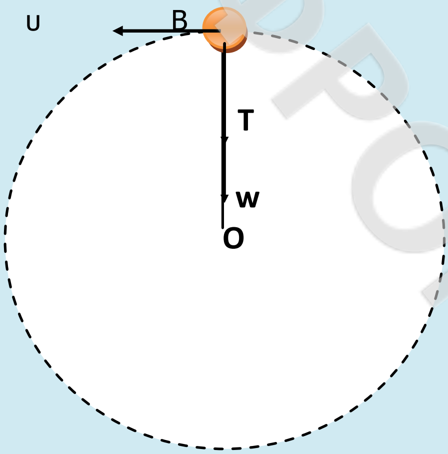
✓ **Όπως προκύπτει από τη γεωμετρία του παρακάτω σχήματος, η γωνία εκτροπής φ του νήματος από την κατακόρυφη διεύθυνση, το ύψος h που βρίσκεται το σώμα σε σχέση με τη κατώτερη θέση του και το μήκος του νήματος l συνδέονται με τη σχέση:**

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{O\Gamma}{OB} = \frac{l-h}{l}$$



✓ **Για να εκτελέσει ανακύκλωση ένα σώμα που είναι δεμένο στην άκρη ενός κατακόρυφου νήματος θα πρέπει όταν φτάσει στο ανώτερο σημείο της κυκλικής του τροχιάς, το μέτρο της ταχύτητάς του παίρνει τιμές** $\upsilon \geq \sqrt{g.l}$

Απόδειξη



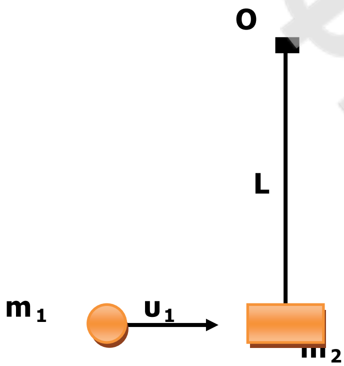
Η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων δρα ως κεντρομόλος δύναμη**, οπότε στο ανώτερο σημείο Β της τροχιάς οπότε θα ισχύει:**

$$\Sigma F = \frac{m.\upsilon^2}{l} \Leftrightarrow T + m.g = \frac{m.\upsilon^2}{l} \Leftrightarrow T = m.\left(\frac{\upsilon^2}{l} - g\right)$$

Για να είναι τεντωμένο το νήμα θα πρέπει:

$$T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2}{l} - g \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2}{l} \geq g \Leftrightarrow \upsilon^2 \geq g.l \Leftrightarrow \upsilon \geq \sqrt{g.l}$$

13. Σώμα μάζας m_2=2κg είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους L=1,8m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο O. Σφαίρα μάζας m_1=4Kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα μάζας m_2.



α). Αν γνωρίζετε ότι το νήμα μετά τη κρούση γίνεται οριζόντιο, να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της ταχύτητας υ_1

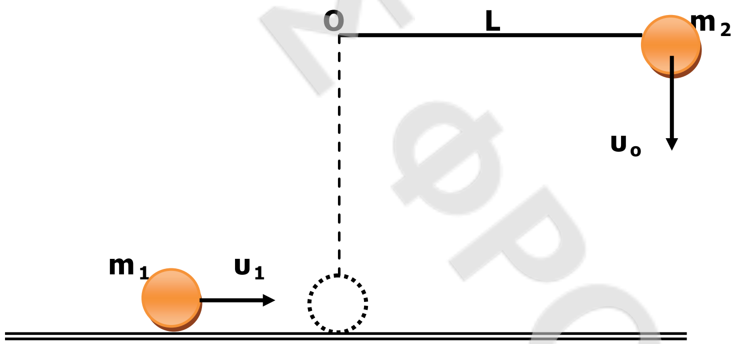
ii) τη τάση του νήματος αμέσως μετά τη κρούση, όταν το νήμα είναι ακόμη κατακόρυφο

β). Να υπολογίσετε τη μικρότερη δυνατή τιμή της ταχύτητας $υ_1$ έτσι ώστε το σώμα m_2 να κάνει ανακύκλωση.

Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) i) $υ_1=4,5m/s$, ii) $T=60N$, β) $υ_1=2,25\sqrt{10}$ m/s

14. Το σώμα μάζας m_2 του διπλανού σχήματος είναι δεμένο με αβαρές νήμα μήκους L=1,8m. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το εκτοξεύουμε από τη θέση αυτή με κατακόρυφη ταχύτητα $υ_o=8m/s$. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο το m_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα μάζας m_1 που κινείται προς το m_2 με ταχύτητα μέτρου $υ_1$. Εξαιτίας της κρούσης το m_1 ακινητοποιείται. Αν ισχύει $m_1=3m_2$,



α) να υπολογίσετε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν την κρούση

β) να υπολογίσετε το ποσοστό % της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_2 εξαιτίας της κρούσης

γ) να εξετάσετε αν το σώμα m_2 εκτελεί ανακύκλωση μετά τη κρούση

δ) Αν $m_2=1Kg$ να υπολογίσετε την μεταβολή της τάσης του νήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

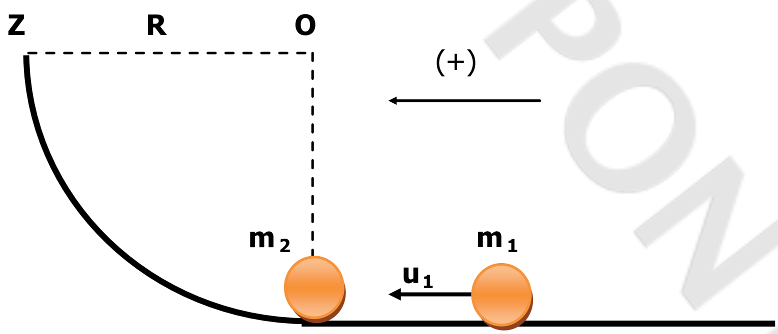
Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) $υ_1=-10m/s$, $υ_2=+10m/s$, β) π%=300%, γ) εκτελεί ανακύκλωση

15. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο νήματος μήκους L. Το σώμα αφήνεται να κινηθεί από τη θέση που το νήμα είναι οριζόντιο και όταν φτάσει στη θέση που το νήμα είναι κατακόρυφο συγκρούεται με ακίνητο σώμα μάζας M που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο το οποίο παρουσιάζει με το σώμα συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Μετά τη κρούση το σώμα μάζας m ανακρούεται και φτάνει μέχρι τη θέση που το νήμα σχηματίζει γωνία 60^0 με την κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο το σώμα μάζας M μέχρι να σταματήσει.

Απ: $S = \frac{m^2 . L . (3+2\sqrt{2})}{2\mu M^2}$

16. Ένα σώμα μάζας m_1=4Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2=8Kg, το οποίο βρίσκεται στη βάση λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R=9,8m. Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας της κρούσης είναι Δp=-96Kg.m/s.



α) Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_2.

β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα μάζας m_2 κινούμενο πάνω στο τεταρτοκύκλιο , μετά την κρούση του με το σώμα μάζας m_1.

δ) Να βρείτε την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής που έπρεπε να υποστεί το σώμα μάζας m_1 ώστε το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση μόλις να φτάσει στο σημείο Ζ. ($g=10\ m/s^2$)

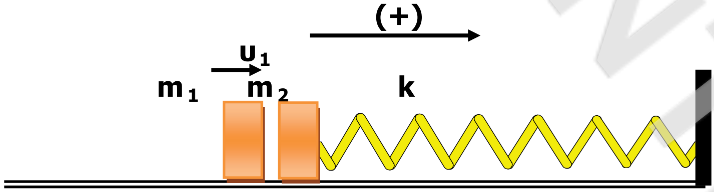
Απ. α) +96 Kg.m/s β) -6 m/s , +12 m/s γ) 7,2 m δ) -112 Kg.m/s

$4^η$ κατηγορία ασκήσεων

Κεντρική και ελαστική κρούση δύο σωμάτων, το ένα από τα οποία είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου.

✓ **Ισχύουν όσα έχουμε επισημάνει στο 1^0 ΚΕΦΑΛΑΙΟ για την απλή αρμονική ταλάντωση.**

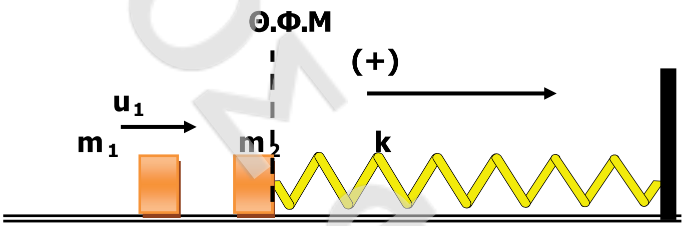
17. Στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k έχουμε στερεώσει σώμα μάζας $m_2=4Kg$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο με το ελατήριο σε κατάσταση φυσικού μήκους. Ένα άλλο σώμα μάζας $m_1=0,5Kg$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1=11m/s$ και τη στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά με το σώμα μάζας m_2. Μετά τη κρούση το σώμα m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x=0,2ημ10t$ (SI).



α) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου.

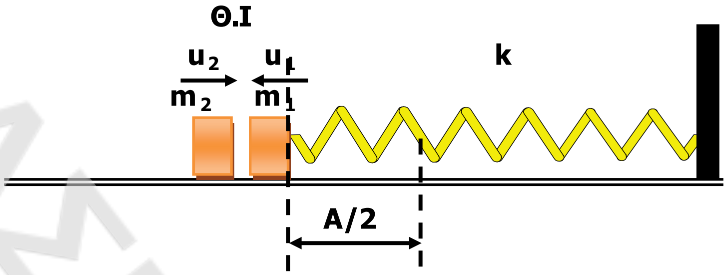
β) Να βρείτε την απόσταση των δύο σωμάτων τη στιγμή που το σώμα m_2 φτάνει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.
γ) Να διερευνήσετε αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική ή ανελαστική.
Απ: α) K=400N/m, β) s=0,985m, γ) η κρούση είναι ανελαστική

18. Το ακίνητο σώμα μάζας m_2=4Kg του παρακάτω σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ένα άλλο σώμα μάζας m_1=2Kg κινείται οριζόντια σε λείο δάπεδο με ταχύτητα u_1=6m/s και τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται κεντρικά με το σώμα μάζας m_2. Μετά την κρούση το σώμα μάζας m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια ταλάντωσης E=8J και περίοδο T=0,2πs.



α) Να διερευνήσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_2 μετά την κρούση.
γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ορμής του σώματος μάζας m_2 μετά την κρούση.
Απ. α) ανελαστική β) 80 N γ) p=8συν10t

19. Το σώμα μάζας m_1=4Kg του παρακάτω σχήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=0,4 m και γωνιακής συχνότητας ω=20rad/s, πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση x_1=+A/2 με θετική ταχύτητα και τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με σώμα μάζας m_2=2Kg που κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_2=2\sqrt{3}$ m/s αντίθετης φοράς από αυτή του σώματος μάζας m_1.



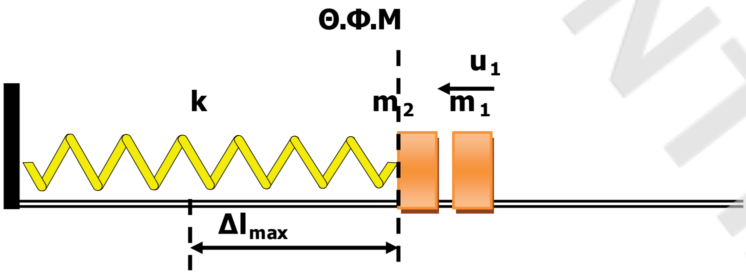
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος μάζας m_1, για την ταλάντωση που συμβαίνει μετά τη κρούση.

γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα μάζας m_1 από τη στιγμή t=0 και μετά.

Απ. α) 0, $6\sqrt{3}$ m/s β) x=0,2ημ(20t+π/2) γ) ΣF=-320ημ(20t+π/2)

20. Ένα μικρό σώμα μάζας m_1 κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου u_1=2m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2=4Kg. Το σώμα αυτό είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου μετά την κρούση είναι $\Delta l_{max} = 0{,}4m$. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση

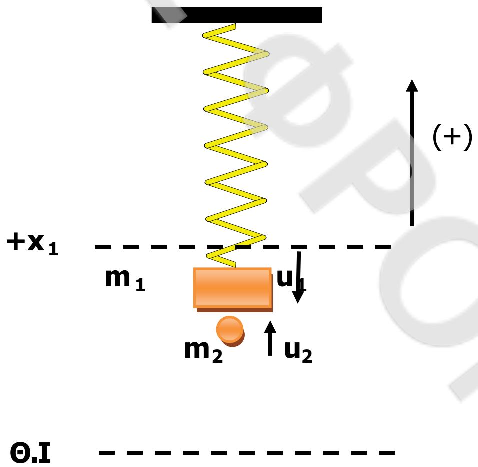
β) τη μάζα m_1

γ) το διάστημα που διάνυσε το σώμα μάζας m_2 μέχρι να συγκρουστεί για δεύτερη φορά με το σώμα μάζας m_1

δ) τη συνολική μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας των δύο κρούσεων.

Απ. α) 2 m/s β) 4 Kg γ) 0,8 m δ) -16 Kg.m/s

21. Το σώμα μάζας m_1 του σχήματος είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=400N/m$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_1=1,2m$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ που διέρχεται από τη θέση $x=+x_1$ με $u=u_1<0$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μικρή σφαίρα μάζας $m_2=4Kg$ που κινείται με ταχύτητα u_2 κατακόρυφα προς τα πάνω. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 μετά την κρούση είναι $u=10συν(10t+π/3)$ (S.I). Να υπολογίσετε:



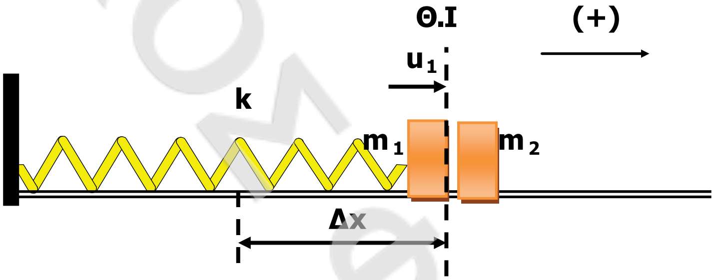
α) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 ελάχιστα πριν την κρούση.

β) Τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Το πηλίκο της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 πριν την κρούση προς την ολική ενέργεια της ταλάντωσής του μετά την κρούση.

Απ. α) 5 m/s β) 150 J γ) 1,44

22. Το σώμα μάζας m_1=2Kg του παρακάτω σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=800N/m , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα αυτό μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και αρχικά κρατείται ακίνητο με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά Δx=0,4 m. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο και όταν φτάσει στη θέση ισορροπίας του συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα μάζας m_2=6Kg.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση.
β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
γ) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 θεωρώντας ως t=0 τη στιγμή που έχει ολοκληρωθεί η κρούση.

Απ. α) 8 m/s β) 4 m/s, 4 m/s γ) u=4συν(20t+π) , α=-80 ημ(4t+π)

23. Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200N/m, το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται στο έδαφος, στερεώνεται σώμα μάζας m_2=2Kg το οποίο ισορροπεί ακίνητο. Άλλο σώμα μάζας m_1=1Kg αφήνεται να πέσει από ύψος h=1,8m πάνω από το σώμα μάζας m_2 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αυτό. Να υπολογίσετε:

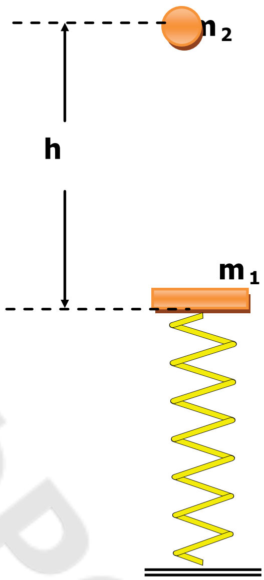
α) το μέγιστο ύψος στο οποίο αναπηδά το σώμα μάζας m_1 μετά τη κρούση

β) την επιπλέον συσπείρωση του ελατηρίου εξαιτίας της κρούσης.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απ: α) 0,2m β) 0,4m

24. Το σώμα μάζας m_1=4Kg του σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο και αρχικά ισορροπεί. Σε ύψος h=0,2m πάνω από αυτό κρατείται ένα άλλο σώμα ίσης μάζας (m_1=m_2). Εκτρέπουμε το σώμα m_1 από τη θέση ισορροπίας του συσπειρώνοντας επιπλέον το ελατήριο κατά Δx=0,4m και τη στιγμή t=0, το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί και το m_2. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά στη θέση ισορροπίας του m_1.



Να βρείτε:

α) τη χημική ενέργεια που καταναλώσαμε για να εκτρέψουμε το σώμα μάζας m_1

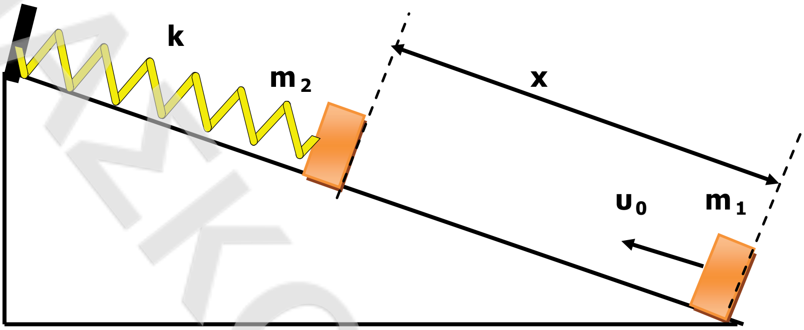
β) τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν και μετά τη κρούση

γ) το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα με μάζα m_1, μετά τη κρούση

Δίνεται: g=10m/s^2, π^2=10

Απ: α) Ε=20J, β)$υ_1$=π m/s, $υ_2$=2m/s, $υ_1'$=2m/s, $υ_2'$=π m/s,
γ) Α=0,8/π m

25. Από τη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $φ=30^o$ εκτοξεύουμε σώμα μάζας m_1=1Kg με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=5m/s. Το σώμα αυτό διανύει διάστημα x=0,9m και συναντά ακίνητο σώμα μάζας m_2=3kg με το οποίο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά. Το σώμα μάζας m_2 είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k=300N/m. Να υπολογίσετε:



α) την απόσταση που διανύει το σώμα m_2 μετά τη κρούση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία

β) την ταχύτητα του σώματος m_1 όταν φτάνει ξανά στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απ: α) x_{max}*=0,2m,* *β)* $υ=\sqrt{13}$ *m/s*

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

Γενικά

✓ Το φαινόμενο Doppler έχει να κάνει με την συχνότητα ενός ηχητικού κύματος όπως αυτό εκπέμπεται από μια πηγή σε σχέση με την συχνότητα που αντιλαμβάνεται για αυτό τον ήχο ένας παρατηρητής. Τα μεγέθη που συναντάμε στο φαινόμενο Doppler είναι τα εξής:

$υ_{ΗΧ}$: η ταχύτητα του ήχου στον αέρα

$υ_{ΗΧ(Α)}$: η ταχύτητα του ήχου όπως την αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής

f_S: η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή

f_A: η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής

$λ_S$: το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή

$λ_A$: το μήκος κύματος του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής

$υ_S$: η ταχύτητα της ηχητικής πηγής

$υ_A$: η ταχύτητα του παρατηρητή

✓ **Η συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής f_A δεν είναι ίδια με την συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που εκπέμπει η πηγή των κυμάτων f_S, όταν ο παρατηρητής και η πηγή βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο Doppler.**

✓ Συγκεκριμένα αν η απόσταση πηγής και παρατηρητή μικραίνει, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο μεγαλύτερης συχνότητας, δηλαδή ισχύει $f_A>f_S$. Ενώ αν η απόσταση πηγής και παρατηρητή μεγαλώνει, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο μικρότερης συχνότητας, δηλαδή ισχύει $f_A<f_S$. Τέλος αν η απόσταση πηγής και παρατηρητή παραμένει σταθερή, τότε δεν εμφανίζεται το φαινόμενο Doppler δηλαδή ισχύει $f_A=f_S$.

✓ Το φαινόμενο Doppler δεν περιορίζεται μόνο στα ηχητικά κύματα, αλλά ισχύει και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως για παράδειγμα είναι και το φώς. Μόνο που στην περίπτωση αυτή ισχύουν διαφορετικοί τύποι από αυτούς που θα δούμε παρακάτω.

✓ Έστω ότι η ηχητική πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S και μήκους κύματος λ_S. Θα ισχύει η σχέση $\upsilon_{HX}=\lambda_S.f_S$ άρα και $f_S=\upsilon_{HX}/\lambda_S$. (1)

Έστω $\upsilon_{HX(A)}$ η ταχύτητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής για τον ήχο (θα είναι $\upsilon_{HX(A)}\neq\upsilon_{HX}$ μόνο όταν κινείται ο παρατηρητής) και λ_A το μήκος κύματος του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (θα είναι $\lambda_A\neq\lambda_S$ μόνο όταν κινείται η πηγή).

Προφανώς θα ισχύει $\upsilon_{HX(A)}=\lambda_A.f_A$ άρα και $f_A=\upsilon_{HX(A)}/\lambda_A$ (2)
Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλαβαίνουμε ότι αν κινείται η πηγή ή ο παρατηρητής ή και οι δύο έτσι ώστε να αλλάζει η μεταξύ τους απόσταση τότε θα είναι $f_A\neq f_S$ οπότε και θα έχουμε το φαινόμενο Doppler.

Ακίνητη πηγή – Ακίνητος παρατηρητής.

✓ Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τόσο την πραγματική ταχύτητα του ήχου (επειδή είναι ακίνητος) όσο και το πραγματικό μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή (επειδή είναι ακίνητη), με αποτέλεσμα να αντιλαμβάνεται τελικά την πραγματική συχνότητα του εκπεμπόμενου ήχου. Δηλαδή ισχύει:

$$f_A=f_S$$

Ακίνητη πηγή – Κινούμενος παρατηρητής.

✓ Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται το πραγματικό μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή (επειδή είναι ακίνητη) αντιλαμβάνεται όμως διαφορετική τιμή για την ταχύτητα του ήχου (επειδή είναι ένας κινούμενος παρατηρητής).

✓ Αν ο παρατηρητής **πλησιάζει** την πηγή αντιλαμβάνεται για την ταχύτητα του ήχου μεγαλύτερη τιμή από την πραγματική, δηλαδή $\boldsymbol{\upsilon_{HX(A)}} = \boldsymbol{\upsilon_{HX}} + \boldsymbol{\upsilon_A}$, με αποτέλεσμα για την συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται να ισχύει η σχέση:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} + \upsilon_A}{\upsilon_{HX}} f_S$$

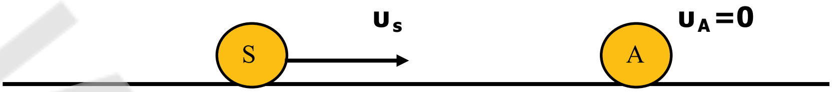
✓ Αν ο παρατηρητής **απομακρύνεται** από την πηγή αντιλαμβάνεται για την ταχύτητα του ήχου μικρότερη τιμή από την πραγματική, δηλαδή $\boldsymbol{\upsilon_{HX(A)}} = \boldsymbol{\upsilon_{HX}} - \boldsymbol{\upsilon_A}$ με αποτέλεσμα για την συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται να ισχύει η σχέση:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} - \upsilon_A}{\upsilon_{HX}} f_S$$

Κινούμενη πηγή – Ακίνητος παρατηρητής.

✓ Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την πραγματική ταχύτητα του ήχου (επειδή είναι ακίνητος), αντιλαμβάνεται όμως διαφορετικό μήκος κύματος (εξαιτίας της κίνησης της πηγής).

✓ Αν πηγή **πλησιάζει** τον παρατηρητή αυτός αντιλαμβάνεται μικρότερο μήκος κύματος από το πραγματικό, δηλαδή $\boldsymbol{\lambda_A = \lambda_S - \upsilon_S . T}$, με αποτέλεσμα για την συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται να ισχύει η σχέση:



$$\boldsymbol{f_A = \frac{\upsilon_{HX}}{\upsilon_{HX} - \upsilon_S} f_S}$$

✓ Αν πηγή **απομακρύνεται** από τον παρατηρητή αυτός αντιλαμβάνεται μεγαλύτερο μήκος κύματος από το πραγματικό, δηλαδή $\boldsymbol{\lambda_A = \lambda_S + \upsilon_S . T}$, με αποτέλεσμα για την συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται να ισχύει η σχέση:

$$\boldsymbol{f_A = \frac{\upsilon_{HX}}{\upsilon_{HX} + \upsilon_S} f_S}$$

Κινούμενη πηγή – Κινούμενος παρατηρητής.

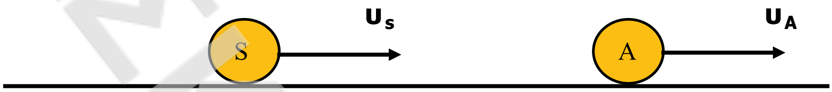
✓ Στην περίπτωση αυτή η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τον γενικό τύπο:

$$\boldsymbol{f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S} f_S}$$

✓ Για να επιλέξουμε το κατάλληλο πρόσημο (+) ή (-) στον αριθμητή, θεωρούμε την πηγή ακίνητη και βλέπουμε προς τα πού κινείται ο παρατηρητής, ενώ για να επιλέξουμε το κατάλληλο πρόσημο (+) ή (-) στον παρονομαστή, θεωρούμε τον παρατηρητή ακίνητο και βλέπουμε προς τα πού κινείται πηγή.

Παράδειγμα

Στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος η πηγή του ήχου ακολουθεί τον παρατηρητή. Με βάση λοιπόν τα όσα είπαμε παραπάνω θα ισχύει ο τύπος:



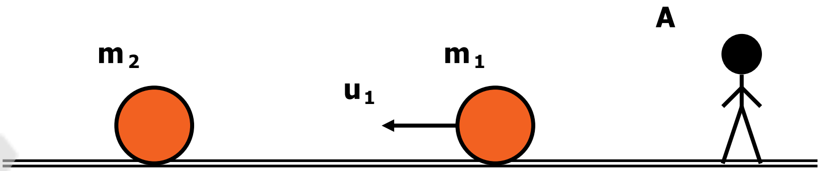
$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$$

Παρατηρείστε ότι αν οι δύο ταχύτητες είναι ίσες τότε όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση οι δύο συχνότητες είναι ίσες. Αυτό το περιμέναμε γιατί στη περίπτωση αυτή δεν υπάρχει σχετική κίνηση ανάμεσα στην ηχητική πηγή και στον παρατηρητή με αποτέλεσμα να μην αλλάζει η μεταξύ τους απόσταση.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σημειακή μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Η μάζα m_1 εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S και απομακρύνεται από ακίνητο παρατηρητή Α όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση η μάζα m_1 έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1/2$.



1) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της μάζας m_1 που μεταφέρεται στη μάζα m_2 είναι:

α) 0% β) 75% γ) 100% δ) 50%

2) Μετά την κρούση ο ακίνητος παρατηρητής Α, ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας από τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή, αν ο λόγος των μαζών m_1/m_2 είναι:

α) 1 β) 3 γ) 1/3 δ) 1/2

2. Παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_A$ στην ευθεία που ορίζεται από αυτόν και από μία ακίνητη ηχητική πηγή η οποία εκπέμπει κύματα συχνότητας f_S. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ότι τα ηχητικά κύματα που φτάνουν σ' αυτόν διαδίδονται με ταχύτητα μέτρου $0{,}75υ_{ηχ}$, όπου $υ_{ηχ}$ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Η συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

α) $0{,}75\ f_S$ β) $1{,}25\ f_S$ γ) $0{,}8\ f_S$ δ) $0{,}25\ f_S$

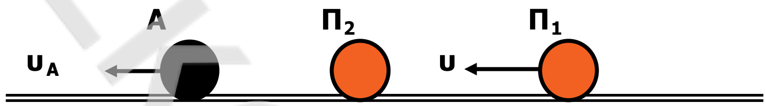
3. Μια ηχητική πηγή που λειτουργεί ταυτόχρονα και ως ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα προς κατακόρυφο τοίχο κάθετα προς αυτόν. Τη στιγμή t=0 η απόσταση της πηγής από τον τοίχο είναι d=544 m. Η πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S που διαδίδεται με ταχύτητα $υ_{ηχ}$=340 m/s και λαμβάνει λόγω ανάκλασης στον τοίχο, ήχο συχνότητας $1{,}5\ f_S$. Η ηχητική πηγή θα συγκρουστεί με τον τοίχο τη στιγμή:

α) 10 s β) 6 s γ) 8 s δ) 12 s

4. Παρατηρητής Α κινείται προς ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα $υ_A= υ_{ηχ}/4$ και την προσπερνά χωρίς να αλλάξει τη ταχύτητά του. Το ποσοστό (%) μείωσης της συχνότητας των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής εξαιτίας της προσπέρασης της πηγής είναι:

α) 20% β) 30% γ) 40% δ) 60%

5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο ηχητικές πηγές $Π_1$ και $Π_2$ οι οποίες εκπέμπουν κύματα συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, καθώς και ένας ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων Α, στον οποίο φτάνουν ηχητικά κύματα και από τις δύο πηγές.



Η πηγή $Π_1$ κινείται με ταχύτητα $υ_{ηχ}/6$ πλησιάζοντας προς τη πηγή $Π_2$ η οποία είναι ακίνητη, ενώ ο ανιχνευτής κινείται με ταχύτητα $υ_A$ και μετρά ηχητικά κύματα μιας μόνο συχνότητας. Οι συχνότητες f_1 και f_2 ικανοποιούν τη σχέση:

α) $f_2=1{,}2f_1$ β) $f_2=3{,}4f$ γ) $f_2=0{,}8f_1$ δ) $f_2=1{,}6f_1$

6. Μια ηχητική πηγή παράγει κύματα συχνότητας f_S κινούμενη με ταχύτητα ίση με το $\frac{1}{10}$ της ταχύτητας του ήχου και απομακρύνεται από έναν ακίνητο παρατηρητή. Τότε η συχνότητα των ηχητικών κυμάτων f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

α) $f_A=\frac{1}{10}f_S$ β) $f_A=10\,f_S$ γ) $f_A=\frac{10}{11}f_S$

7. Ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα ίση με το $\frac{1}{10}$ της ταχύτητας του ήχου στην ίδια ευθεία με μια ακίνητη ηχητική πηγή και απομακρύνεται από αυτή. Το πηλίκο της συχνότητας του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής προς τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή είναι:

α) $\frac{1}{10}$ β) $\frac{10}{9}$ γ) $\frac{9}{10}$ δ) $\frac{19}{10}$

8. Μια ηχητική πηγή κινείται με σταθερή ταχύτητα u_S =34 m/s στην ευθεία που διέρχεται από έναν ακίνητο παρατηρητή και απομακρύνεται από αυτόν. Η πηγή παράγει κύματα συχνότητας f_S=850 Hz τα οποία διαδίδονται στον αέρα με ταχύτητα μέτρου u=340 m/s. Το μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ισούται με:

α) 0,4 m β) 0,44 γ) 0,36 δ) 0,04 m

9. Ένας παρατηρητής απομακρύνεται από μια ακίνητη ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S , κινούμενος πάνω στην ευθεία που τον ενώνει με την πηγή. Αν ο παρατηρητής κινείται με σταθερή επιτάχυνση, τότε η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται:

α) είναι σταθερή και μικρότερη της f_S

β) αυξάνεται γραμμικά σε συνάρτηση με το χρόνο

γ) μειώνεται με σταθερό ρυθμό

δ) είναι ίση με τη συχνότητα f_S.

10. Ένα περιπολικό κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_π$=20 m/s σε ευθύγραμμο δρόμο. Η σειρήνα του περιπολικού παράγει ήχο συχνότητας f_S=640 Hz που διαδίδεται με ταχύτητα u=340 m/s ως προς τον αέρα. Αν στον ίδιο δρόμο βρίσκεται ένας μοτοσικλετιστής ο οποίος ακούει τον ήχο της σειρήνας με συχνότητα f_A=720 Hz, τότε ο μοτοσικλετιστής:

α) είναι ακίνητος

β) κινείται αντίθετα από το περιπολικό, πλησιάζοντάς το με ταχύτητα ίδιου μέτρου

γ) ακολουθεί το περιπολικό με ταχύτητα ίδιου μέτρου

δ) είναι μπροστά από το περιπολικό και κινείται με την ίδια ταχύτητα.

11. Η σειρήνα ενός τρένου που πλησιάζει στο σταθμό ηχεί για χρόνο 14s και ο ήχος που παράγει έχει συχνότητα 680Hz. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο σταθμάρχης ο οποίος στέκεται ακίνητος στην αποβάθρα του σταθμού είναι ίση με 700Hz. Ο σταθμάρχης ακούει τον ήχο της σειρήνας για χρόνο ίσο με:

α) 14s β) 14,4s γ) 13,6s δ) 14,6s

12. Δύο ηχητικές πηγές εκπέμπουν κύματα με ίσες συχνότητες f_S και βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ακίνητου ανθρώπου το αυτί του οποίου δέχεται ηχητικά κύματα και από τις δύο πηγές. Η πηγή $Π_1$ είναι ακίνητη, ενώ η πηγή $Π_2$ κινείται προς τον άνθρωπο με ταχύτητα μέτρου $υ_2 = υ_{ηχ}/25$. Ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται διακροτήματα συχνότητας:

α) $f_δ = f_S/26$ β) $f_δ = f_S/24$ γ) $f_δ = f_S/25$

13. Σφαιρικός φλοιός ακτίνας R και μάζας M κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο έχοντας σταθερή κινητική ενέργεια. Στο κέντρο μάζας του φλοιού έχουμε τοποθετήσει μικρή ηχητική πηγή η οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα συχνότητας f_S και μήκους κύματος $λ_S$. Σε σημείο Ζ της ευθείας κίνησης του κέντρου μάζας υπάρχει ακίνητος παρατηρητής ο οποίος αντιλαμβάνεται συχνότητα $f_1=1,2f_S$. Η ροπή αδράνειας του σφαιρικού φλοιού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I=(2/3)MR^2$ και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα έχει μέτρο $υ_{ηχ}$.

1) Το μήκος κύματος $λ_A$ των κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

α) $λ_A = \frac{11}{6}λ_S$ β) $λ_A = \frac{5}{6}λ_S$ γ) $λ_A = \frac{7}{6}λ_S$

2) Η κινητική ενέργεια του σφαιρικού φλοιού υπολογίζεται από τη σχέση:

α) $K = \frac{5}{216}Mυ_{ηχ}^2$ β) $K = \frac{9}{256}Mυ_{ηχ}^2$ γ) $K = \frac{1}{72}Mυ_{ηχ}^2$

Ερωτήσεις σωστού-λάθους

14. Ηχητική πηγή S η οποία εκπέμπει κύματα συχνότητας f_S, περιόδου T_S και μήκους κύματος λ_S, κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα πάνω στην ευθεία που διέρχεται από ακίνητο παρατηρητή Α. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται περίοδο ηχητικών κυμάτων που είναι 25% μεγαλύτερη της περιόδου T_S.

α) Η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

β) Η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι ίση με την πραγματική ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

γ) Η ταχύτητα της πηγής έχει μέτρο $υ_{ηχ}/3$.

δ) Το μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερο του λ_S κατά 25%.

15. Ένα περιπολικό με τη σειρήνα του σε λειτουργία καταδιώκει ένα αυτοκίνητο σε ευθύγραμμο δρόμο. Ο οδηγός του αυτοκινήτου ακούγοντας τον ήχο της σειρήνας ολοένα και οξύτερο συμπεραίνει ότι:

α) το περιπολικό σταμάτησε την καταδίωξη

β) το περιπολικό κινείται πιο γρήγορα από το αυτοκίνητο

γ) το περιπολικό αντέστρεψε τη φορά της κίνησής του

δ) το περιπολικό κινείται πιο αργά από το αυτοκίνητο

Ερωτήσεις ανάπτυξης

16. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα $υ_S$ προς κατακόρυφο τοίχο και εκπέμπει ηχητικό σήμα συχνότητας f_S. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του αυτοκινήτου εξαιτίας της ανάκλασης; Δίνεται η ταχύτητα του ήχου υ.

17. Ακίνητη ηχητική πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S. Παρατηρητής αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση α απομακρυνόμενος από τη πηγή. Να βρεθεί η σχέση που μας δίνει τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1η Κατηγορία ασκήσεων

Κινείται μόνο η πηγή ή κινείται μόνο ο παρατηρητής ή κινούνται και οι δύο ταυτόχρονα και οι διευθύνσεις των ταχυτήτων είναι πάνω στην ευθεία που τους ενώνει.

✓ Αν κινείται μόνο ο παρατηρητής και <u>πλησιάζει</u> στην ακίνητη ηχητική πηγή, ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} + \upsilon_A}{\upsilon_{HX}} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} + \upsilon_A, \quad \lambda_A = \lambda_S$$

✓ Αν κινείται μόνο ο παρατηρητής και <u>απομακρύνεται</u> από την ακίνητη ηχητική πηγή, ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} - \upsilon_A}{\upsilon_{HX}} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} - \upsilon_A, \quad \lambda_A = \lambda_S$$

✓ Αν κινείται μόνο η πηγή και <u>πλησιάζει</u> τον ακίνητο παρατηρητή, ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX}}{\upsilon_{HX} - \upsilon_S} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX}, \quad \lambda_A = \lambda_S - \upsilon_S . T$$

✓ Αν κινείται μόνο η πηγή και απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή, ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX}}{\upsilon_{HX} + \upsilon_S} f_S, \qquad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX}, \qquad \lambda_A = \lambda_S + \upsilon_S . T$$

✓ Αν κινούνται και οι δύο προς αντίθετες κατευθύνσεις με τρόπο ώστε να πλησιάζουν μεταξύ τους, τότε ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} + \upsilon_A}{\upsilon_{HX} - \upsilon_S} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} + \upsilon_A, \quad \lambda_A = \lambda_S - \upsilon_S . T$$

✓ Αν κινούνται και οι δύο προς αντίθετες κατευθύνσεις με τρόπο ώστε να απομακρύνονται μεταξύ τους, τότε ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} - \upsilon_A}{\upsilon_{HX} + \upsilon_S} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} - \upsilon_A, \qquad \lambda_A = \lambda_S + \upsilon_S . T$$

✓ Αν κινούνται και οι δύο προς την ίδια κατεύθυνση και ο παρατηρητής ακολουθεί τη πηγή, τότε ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} + \upsilon_A}{\upsilon_{HX} + \upsilon_S} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} + \upsilon_A, \quad \lambda_A = \lambda_S + \upsilon_S . T$$

✓ Αν κινούνται και οι δύο προς την ίδια κατεύθυνση και η πηγή ακολουθεί τον παρατηρητή, τότε ισχύουν τα εξής:

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} - \upsilon_A}{\upsilon_{HX} - \upsilon_S} f_S, \quad \upsilon_{HX\,(A)} = \upsilon_{HX} - \upsilon_A, \quad \lambda_A = \lambda_S - \upsilon_S . T$$

✓ Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις:

$$\upsilon_{HX\,(A)} = \lambda_A . f_A, \qquad \upsilon_{HX} = \lambda_S . f_S$$

1. Ο παρατηρητής του παρακάτω σχήματος είναι ακίνητος και τα τρία αυτοκίνητα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητες μέτρου $υ_1$=10m/s, $υ_2$ και $υ_3$=20m/s. Ο οδηγός του αυτοκινήτου (1) κορνάρει εκπέμποντας ήχο συχνότητας f_1=480Hz.

α) Αν ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα f_A=495Hz να βρείτε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα.
β) Αν ο οδηγός του αυτοκινήτου (2) αντιλαμβάνεται συχνότητα f_2=450Hz, να βρείτε την ταχύτητα $υ_2$.
γ) Ποια είναι η διαφορά των συχνοτήτων που αντιλαμβάνονται οι οδηγοί των αυτοκινήτων (2) και (3);
Απ: α) 330m/s β) 30m/s γ) 15Hz

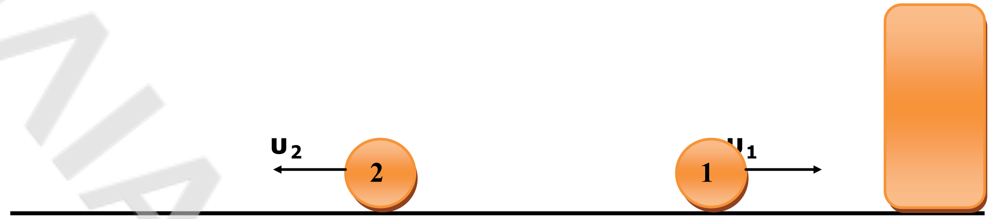
2η Κατηγορία ασκήσεων

Ο ήχος που εκπέμπει η πηγή ανακλάται πάνω σε ακλόνητο εμπόδιο.

✓ Στη περίπτωση αυτή θεωρούμε ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται μπροστά από το εμπόδιο και υπολογίζουμε τη συχνότητα που αυτός αντιλαμβάνεται. Η συχνότητα αυτή είναι ίση με τη συχνότητα του ήχου που πέφτει πάνω στο εμπόδιο και στη συνέχεια ανακλάται, άρα είναι η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το εμπόδιο $f_S{}'$.

✓ Επομένως στη περίπτωση αυτή έχουμε την κινούμενη ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S (π.χ ένα τρένο) και την ακίνητη ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο από ανάκλαση με συχνότητα $f_S{}'$ (π.χ τον βράχο του τούνελ).

2. Αυτοκίνητο (1) κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$= 34m/s κάθετα προς ένα τοίχο και η κόρνα του εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s. Ένας παρατηρητής βρίσκεται πάνω σε ένα άλλο αυτοκίνητο (2) και κινείται πάνω στην ίδια ευθεία απομακρυνόμενος από τον τοίχο με ταχύτητα μέτρου $υ_2$.



Να υπολογίσετε το λόγο της συχνότητας που ακούει ο παρατηρητής απευθείας από τη κόρνα προς τη συχνότητα που ακούει από τον τοίχο.
Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $υ_{ΗΧ}$=340 m/s.

$3^η$ Κατηγορία ασκήσεων

Χρονική διάρκεια ηχητικού κύματος το οποίο γίνεται αντιληπτό από ένα παρατηρητή.

✓ Έστω ότι μια ηχητική πηγή εκπέμπει N_S μέγιστα ήχου (πυκνώματα) συχνότητας f_S σε χρόνο $Δt_S$. Ισχύει:

$$f_S = \frac{N_S}{Δt_S} \Leftrightarrow N_S = f_S . Δt_S$$

Ο ήχος αυτός γίνεται αντιληπτός από ένα παρατηρητή με συχνότητα f_A σε χρόνο $Δt_A$. Αν ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται N_A μέγιστα ήχου (πυκνώματα) θα ισχύει:

$$f_A = \frac{N_A}{Δt_A} \Leftrightarrow N_A = f_A . Δt_A$$

Προφανώς όσα μέγιστα εκπέμπει η πηγή τόσα φτάνουν στον παρατηρητή, άρα θα ισχύει:

$$N_S = N_A \Leftrightarrow f_S . Δt_S = f_A . Δt_A$$

3. Ένα αυτοκίνητο (1) είναι ακίνητο πάνω σε ευθύγραμμο δρόμο και με τη κόρνα του εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S=680Hz για χρονικό διάστημα Δt_S=12s. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο (2) κινείται πάνω στον ίδιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου u_2 και απομακρύνεται από το αυτοκίνητο (1).

α) Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου (2) ώστε ο οδηγός του να ακούει ήχο συχνότητας f_2=600Hz;

β) Για πόσο χρόνο ο οδηγός του αυτοκινήτου (2) ακούει την κόρνα;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: u_{HX}=340 m/s.

Απ. α) 40m/s β) 13,6s

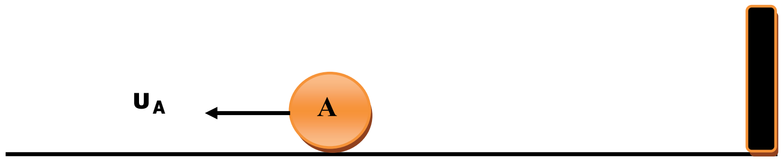
$4^η$ Κατηγορία ασκήσεων

Φαινόμενο Doppler και διακροτήματα.

✓ Είναι δυνατόν ένας παρατηρητής να ακούει ταυτόχρονα δύο ήχους με ελάχιστα διαφορετικές συχνότητες, είτε γιατί αυτοί οι ήχοι εκπέμπονται από δύο διαφορετικές ηχητικές πηγές, είτε γιατί ο ένας ήχος έρχεται κατευθείαν από την πηγή και ο άλλος αφού ανακλαστεί πάνω σε κάποιο εμπόδιο. Τότε όπως μάθαμε στο 1^0 κεφάλαιο (σύνθεση ταλαντώσεων) θα ακούει διακροτήματα.

✓ Υπενθυμίζουμε ότι η συχνότητα των διακροτημάτων δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{f_\delta} = |\boldsymbol{f_1} - \boldsymbol{f_2}|$ και η περίοδος των διακροτημάτων από τη σχέση $\boldsymbol{T_\delta} = \boldsymbol{1}/\boldsymbol{f_\delta}$, όπου f_1 και f_2 είναι οι συχνότητες των δύο ήχων.

4. Ένας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε αυτοκίνητο και κινείται με ταχύτητα μέτρου u_A=1m/s απομακρυνόμενος από ένα τοίχο. Κάποια στιγμή πατάει την κόρνα του αυτοκινήτου η οποία αρχίζει να εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S=682Hz. Από τη στιγμή αυτή και μετά ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται δύο ήχους , τον έναν απευθείας από την κόρνα και τον άλλον από ανάκλαση στον τοίχο.



Να δικαιολογήσετε γιατί ο παρατηρητής ακούει διακροτήματα και να υπολογίσετε πόσα μέγιστα ήχου ακούει σε χρονική διάρκεια 3s.
Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $υ_{HX}$=340 m/s.
Απ. 12.

$5^η$ Κατηγορία ασκήσεων

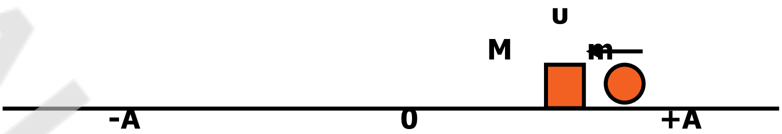
Α) Η πηγή του ήχου είναι ακίνητη και ο παρατηρητής κινείται με επιτάχυνση.

✓ Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX} \pm \upsilon_A}{\upsilon_{HX}} f_S$$

όπου η ταχύτητα του παρατηρητή αντικαθίσταται με τον κατάλληλο τύπο είτε της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης $\upsilon_A = \upsilon_0 \pm \alpha . t$ είτε της απλής αρμονικής ταλάντωσης $\upsilon_A = \upsilon_{max} . \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$, ανάλογα με το είδος της κίνησης.

5. Σώμα Σ μάζας Μ=3Kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f=5/π Hz σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η απόσταση των ακραίων θέσεων της τροχιάς του είναι 0,2m. Πάνω στο σώμα βρίσκεται προσαρμοσμένη ηχητική πηγή αμελητέας μάζας που εκπέμπει ήχο με συχνότητα f_S=676 Hz. Δεύτερο σώμα μάζας m=1Kg που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ=$2\sqrt{3}$ m/s συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Σ, τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

β) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο, για την ταλάντωση που ξεκινά αμέσως μετά την κρούση. Να θεωρήσετε t=0 τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα δεξιά.

γ) Ακίνητος δέκτης ηχητικών κυμάτων βρίσκεται στη διεύθυνση της ταλάντωσης του σώματος Σ.

i) Να βρεθεί η μέγιστη συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο δέκτης μετά την κρούση.

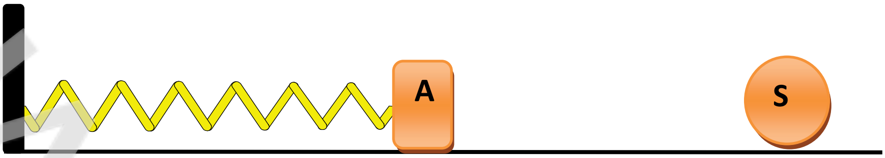
ii) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα Σ τη στιγμή που ο δέκτης καταγράφει την πραγματική συχνότητα που εκπέμπει η πηγή μετά την κρούση.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα υ=340 m/s.

Απ: α) $\upsilon'_1=+\sqrt{3}$ *m/s,* $\upsilon'_2=-\sqrt{3}$ *m/s β)* $x=0,2\eta\mu(10t+5\pi/6)$ *(S.I)*

γ) $f_{A(max)}=680Hz$*,* $\Sigma F=60N$

6. Στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=10000N/m στερεώνεται σώμα μάζας m=1Kg το οποίο λειτουργεί και ως δέκτης ηχητικών κυμάτων. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σύστημα ελατήριο-σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=0,4m χωρίς αρχική φάση. Ένας πομπός ηχητικών κυμάτων βρίσκεται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S=1700Hz. Να υπολογίσετε:



α) Τη συχνότητα που λαμβάνει ο δέκτης στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.
β) Το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη συχνότητα που λαμβάνει ο δέκτης.
γ) Τη χρονική συνάρτηση της συχνότητας του ήχου που λαμβάνει ο δέκτης και να κάνετε τη γραφική της παράσταση στη χρονική διάρκεια της πρώτης περιόδου.
Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: υ_{HX}=340 m/s.
Απ. α) 1700 Hz β) 19/15 γ) f=1700+200.συν(100t) (S.I)

Β) Η πηγή του ήχου είναι κινείται με επιτάχυνση και ο παρατηρητής είναι ακίνητος.

✓ Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$f_A = \frac{\upsilon_{HX}}{\upsilon_{HX} \pm \upsilon_S} f_S$$

✓ όπου η ταχύτητα της πηγής αντικαθίσταται με τον κατάλληλο τύπο είτε της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης $\upsilon_S = \upsilon_0 \pm \alpha.t$ είτε της απλής αρμονικής ταλάντωσης $\upsilon_S = \upsilon_{max}.\sigma\upsilon\nu\,(\omega t + \varphi_0)$, ανάλογα με το είδος της κίνησης.

✓ Πρέπει να προσέξουμε ο ήχος που ακούει ο παρατηρητής κάποια στιγμή έχει εκπεμφθεί από την πηγή μια προγενέστερη χρονική στιγμή, γιατί ο ήχος χρειάζεται κάποιο χρόνο για να διανύσει την απόσταση πηγής και παρατηρητή.

7. Ακίνητος παρατηρητής απέχει από ακίνητο περιπολικό απόσταση 2000m. Τη χρονική στιγμή t=0 το περιπολικό αρχίζει να κινείται προς τον παρατηρητή με σταθερή επιτάχυνση $a=1m/s^2$, εκπέμποντας με τη σειρήνα του ήχο συχνότητας f_S=400Hz. Να υπολογίσετε τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής τη χρονική στιγμή που το περιπολικό απέχει από αυτόν απόσταση 1200m. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $υ_{HX}$=340 m/s.

8. Σώμα μάζας m=0,1Kg στερεώνεται στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=1000N/m και πάνω στο σώμα προσαρμόζεται ηχητική πηγή ασήμαντης μάζας, η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S=2880Hz. Θέτουμε το σύστημα σε απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α=0,2m. Ένας ακίνητος παρατηρητής βρίσκεται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου σε απόσταση 1,7π m από τη θέση ισορροπίας του συστήματος.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής;

β) Ποια είναι η απομάκρυνση του σώματος κάθε φορά που ο παρατηρητής ακούει τον ήχο με μέγιστη συχνότητα;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $υ_{HX}$=340 m/s.

Απ. α) f_{max}=3060Hz, f_{min}=2720Hz β) x=0,2m