8. **i)** Έχουμε διαδοχικά:

$$27^x+12^x-2\cdot 8^x>0 \Leftrightarrow 3^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x-2\cdot 2^{3x}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2>0 \quad (1)$$

Αν τώρα θέσουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$ η ανίσωση (1) γράφεται διαδοχικά

$t^3+t-2>0 \Leftrightarrow (t-1)\,(t^2+t+2)>0$ [Με σχήμα Horner]

$\Leftrightarrow t-1>0$ [αφού $t^2+t+2>0$]

$\Leftrightarrow t>1$

Άρα, λόγω του μετασχηματισμού $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$, έχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x}>\left(\frac{3}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x>0$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε **x>0.**

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. $\eta\mu^2 x - 2\sqrt{3}\,\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}-\sqrt{3}\eta\mu 2x-\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu 2x-2\sqrt{3}\eta\mu 2x-1-\sigma\upsilon\nu 2x=-2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } 2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=k\pi+\frac{\pi}{12}} \text{ ή } \mathbf{x=k\pi+\frac{\pi}{4}},\quad \mathbf{k\in Z}$$

2. **i) Οπως είναι γνωστό η παράσταση αημx+βσυνx παίρνει τη μορφή**

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\varrho\eta\mu(x+\varphi),\quad \text{με } \varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Έτσι η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma \Leftrightarrow \varrho\eta\mu(x+\varphi)=\gamma \Leftrightarrow \eta\mu(x+\varphi)=\frac{\gamma}{\varrho}.$$

Αλλά η εξίσωση αυτή, άρα και η αρχική, έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{\gamma}{\varrho}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow |\gamma|\leqslant|\varrho| \Leftrightarrow \gamma^2\leqslant\varrho^2 \Leftrightarrow \gamma^2\leqslant\alpha^2+\beta^2$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i) η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο αν

$$(1+\sigma\upsilon\nu t)^2+\eta\mu^2 t \geqslant 2^2 \Leftrightarrow 2(1+\sigma\upsilon\nu t)\geqslant 4 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}\geqslant 4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\right|\geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}=1 \qquad \Leftrightarrow t=0 \quad \left(\text{αφού } -\frac{\pi}{2}<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$$

Για την τιμή αυτή του t η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$(1+\sigma\upsilon\nu 0)\eta\mu x+\eta\mu 0\cdot\sigma\upsilon\nu x=2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=2 \Leftrightarrow \eta\mu x=1$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in Z.}$$

3. • $\varepsilon\varphi 3\alpha=\varepsilon\varphi(2\alpha+\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi 2\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi 2\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha}=\dfrac{\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\cdot\varepsilon\varphi\alpha}=\dfrac{3\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$

• Αν τώρα αντικαταστήσουμε το α με $\dfrac{\pi}{12}$ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=\frac{3\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}-\varepsilon\varphi^3\frac{\pi}{12}}{1-3\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{12}} \Leftrightarrow 1=\frac{3\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}-\varepsilon\varphi^3\frac{\pi}{12}}{1-3\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^3\frac{\pi}{12}-3\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{12}-3\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}+1=0$$

που σημαίνει ότι η $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{12}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^3-3x^2-3x+1=0$$

• Η εξίσωση αυτή λύνεται ως εξής:

$$x^3-3x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x=-1} \text{ ή } \mathbf{x=2-\sqrt{3}} \text{ ή } \mathbf{x=2+\sqrt{3}}$$

Επειδή $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{12}<1$ θα είναι $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$.

4. Ο αριθμός «αβγδ» γράφεται

$$«\alpha\beta\gamma\delta»=\alpha 10^3+\beta 10^2+\gamma 10+\delta$$

Έστω το πολυώνυμο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Τότε θα είναι

$$f(10)=«\alpha\beta\gamma\delta» \text{ και } f(1)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

Είναι γνωστό ότι $f(x)=(x-1)\pi(x)+f(1)$, οπότε, για $x=10$, έχουμε

$$f(10)=(10-1)\Pi(10)+f(1)$$

$$ή\ «αβγδ»=9\cdot\Pi(10)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει αμέσω ότι, αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι πολλαπλάσιο του 9, τότε και ο αριθμός «αβγδ» είναι πολλαπλάσιο του 9 και αντιστρόφως, πράγμα που αποδεικνύει τον κανόνα.

5. **i)** Οι διαιρέτες του 1 είναι ± 1, ενώ του 2 είναι ± 1, ± 2, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι $\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}$.

Αν θέσουμε $P(x)=2x^3+x^2+x-1$, με το σχήμα Horner για $\rho=1$, $\rho=-1$ βρίσκουμε $P(1)=3\neq 0$, $P(-1)=-3\neq 0$, ενώ για $\rho=\frac{1}{2}$ έχουμε:

2	1	1	−1	$\rho=\frac{1}{2}$
	1	1	1	
2	2	2	0	

Επομένως η εξίσωση γίνεται

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0 \text{ ή } (2x-1)(x^2+x+1)=0$$

και έχει ρίζα το $x=\frac{1}{2}$ μόνο.

● Οι διαιρέτες του 1 είναι ± 1, ενώ του 6 είναι ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$.

Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί δοκιμάζουμε μόνο τα αρνητικά -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$.

Αν θέσουμε $P(x)=6x^4+29x^3+27x^2+9x+1$, με το σχήμα Horner για $\rho=-1$ βρίσκουμε $P(-1)=-4\neq 0$, ενώ για $\rho=-\frac{1}{2}$ έχουμε:

6	29	27	9	1	$\rho=-\frac{1}{2}$
	−3	−13	−7	−1	
6	26	14	2	0	

οπότε $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3+26x^2+14x+2)$

$$=(2x+1)(3x^3+13x^2+7x+1)$$

Αν εργασθούμε ανάλογα με το $\Pi(x)=3x^3+13x^2+7x+1$ για $\rho=-\frac{1}{3}$ έχουμε:

3	13	7	1	$\rho=-\frac{1}{3}$
	−1	−4	−1	
3	12	3	0	

οπότε $\Pi(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+12x+3)$

$$=(3x+1)(x^2+4x+1)$$

Επομένως η εξίσωση γίνεται

$$(2x+1)(3x+1)(x^2+4x+1)=0$$

και έχει ρίζες $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-2-\sqrt{3}$ και $x_4=-2+\sqrt{3}$.

ii) Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-2=0$. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι αυτή δεν έχει ρητές ρίζες. Οι πιθανές ρητές ρίζες αυτής είναι ± 1, ± 2. Όμως καμία από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι ο $\sqrt{2}$ που είναι ρίζα της, δεν είναι ρητός.

Η απόδειξη για το $\sqrt{12}$ είναι ανάλογη.

6. 1ος τρόπος

Επειδή $3^2+4^2=5^2$ μια λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός x=2 θα δείξουμε τώρα ότι η λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι αν $\varrho\neq 2$ ήταν μια άλλη λύση της εξίσωσης, τότε θα ισχύει:

$$3^\varrho+4^\varrho=5^\varrho \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho=1 \quad (1)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ και $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες,

- αν $\varrho<2$, τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{3}{5}\right)^2$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{4}{5}\right)^2$, οπότε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \quad \text{(άτοπο, λόγω της 1)}$$

- αν $\varrho>2$, τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{3}{5}\right)^2$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{4}{5}\right)^2$, οπότε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\varrho+\left(\frac{4}{5}\right)^\varrho<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \quad \text{(άτοπο, λόγω της 1)}$$

2ος τρόπος. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η x = 2, που είναι και μοναδική. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x+1=\left(\frac{5}{4}\right)^x \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x+1$ είναι **γνησίως φθίνουσα,** ενώ η $g(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^x$ είναι **γνησίως αύξουσα.** Επομένως:

- Αν x<2, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x+1>\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x<\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x+1>\left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπαρχει ρίζα της (1) μικρότερη του 2.

- Αν x>2, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x+1<\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x>\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x+1<\left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπάρχει ρίζα της (1) μεγαλύτερη του 2.

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η **x = 2.**

7. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η **x = 1.** Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3}$ είναι **γνησίως φθίνουσα,** ενώ η συνάρτηση $g(x)=2^x$ είναι **γνησίως αύξουσα,** αν εργασθούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση.

8. Η εξίσωση ορίζεται εφόσον

$$x+3>0 \quad \text{και} \quad \alpha x>0.$$

Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\log(x+3)=\log(\alpha x) &\Leftrightarrow \log(x+3)^2=\log(\alpha x)\\ &\Leftrightarrow (x+3)^2=\alpha x\\ &\Leftrightarrow x^2-(\alpha-6)x+9=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα της (1) ισούται με

$\Delta=(\alpha-6)^2-36=\alpha^2-12\alpha=\alpha(\alpha-12)$

και το πρόσημό της περιγράφεται από τον επόμενο πίνακα:

α	$-\infty$		0		12		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Επομένως:

- Αν **α<0**, τότε η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες αρνητικές, αφού

$x_1 \cdot x_2 = 9>0$ και $x_1+x_2 = \alpha-6<0$

Επειδή για το τριώνυμο $f(x) = x^2-(\alpha-6)x+9$ ισχύει

$$f(-3) = (-3)^2 - (\alpha-6)(-3)+9 = 3(\alpha-6)<0$$

το -3 θα βρίσκεται μεταξύ τών ριζών x_1, x_2 της (1). Επομένως θα ισχύει:

$$x_1<-3<x_2<0$$

Επειδή ομως $\alpha<0$, λόγω της (*), η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον $-3<x<0$. Επομένως από τις παραπάνω ρίζες x_1, x_2 δεκτή είναι μόνο μία η x_2.

Άρα για $\alpha<0$ η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

- Αν **α = 0** δεν ορίζεται ο $\log(\alpha x)$
- Αν **0<α<12** η εξίσωση (1), άρα και η αρχική, είναι αδύνατη.
- Αν **α = 12** η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα, την $x=3$, που είναι και ρίζα της αρχικής αφού, λόγω της (*), πρέπει $x>0$.
- Τέλος αν **α>12** η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες θετικές, αφού

$$x_1 \cdot x_2 = 9>0 \text{ και } x_1+x_2 = \alpha-6>0$$

Επειδή όμως $\alpha>12$, λόγω της (4), η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον $x>0$. Επομένως και οι δύο ρίζες x_1, x_2 της (1) είναι δεκτές. Άρα για $\alpha>12$ η αρχική εξίσωση έχει δύο ρίζες.

Αν τώρα λάβουε υπόψη όλα τα προηγουμενα συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση μόνο αν **α<0 ή α=12.**

9. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{4}$. Για να αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση γράφεται:

$$\log_{\pi/4} x = 2-\sigma\varphi x$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\log_{\pi/4} x$ είναι **γνησίως φθίνουσα,** ενώ η $g(x) = 2-\sigma\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$. Επομένως:

- Αν $\mathbf{x<\frac{\pi}{4}}$, τότε $\log_{\pi/4} x>\log_{\pi/4}\frac{\pi}{4} = 1$, ενώ $2-\sigma\varphi x<2-\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = 1$

Άρα $\log_{\pi/4} x>2-\sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) **δεν** έχει λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$.

• Αν $\mathbf{x>\frac{\pi}{4}}$, τότε $\log_{\pi/4} x<\log_{\pi/4}\frac{\pi}{4}=1$, ενώ $2-\sigma\varphi x>2-\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1$

Άρα $\log_{\pi/4} x<2-\sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \pi)$.

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $\mathbf{x=\frac{\pi}{4}}$.

10. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον:

$$16^x-2\cdot 12^x>0 \Leftrightarrow 16^x>2\cdot 12^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{12}\right)^x>2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^x\mathbf{>2} \qquad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\log_3(16^x-2\cdot 12^x)\leq 2x+1 \Leftrightarrow \log_3(16^x-2\cdot 12^x)\leq \log_3 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 16^x-2\cdot 12^x\leq 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x}-2\cdot 3^x\cdot 4^x\leq 3\cdot 3^{2x} \quad [\text{διαιρούμε με } 3^{2x}]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2\left(\frac{4}{3}\right)^x-3\leq 0 \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^x=\mathbf{t}$, τότε η (2) γράφεται:

$$t^2-2t-3\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq t\leq 3$$

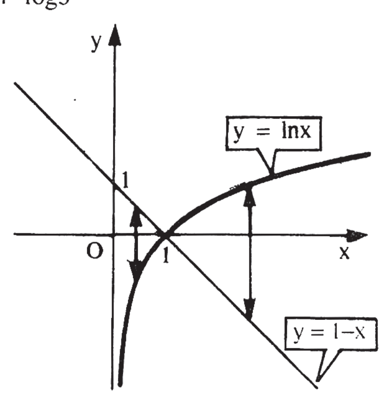
$\left[\begin{array}{c}\text{αφού οι ρίζες της:}\\ t^2-2t-3=0\\ \text{είναι}\\ t_1=3 \text{ και } t_2=-1\end{array}\right]$

Επομένως, λόγω του μετασχηματισμού: $\left(\frac{4}{3}\right)^x=t$, και λόγω της (1), έχουμε:

$$2\leq\left(\frac{4}{3}\right)^x\leq 3 \Leftrightarrow \log 2<x\log\frac{4}{3}\leq\log 3 \Leftrightarrow \log 2<x(\log 4-\log 3)\leq\log 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 4-\log 3}<x\leq\frac{\log 3}{\log 4-\log 3} \Leftrightarrow \mathbf{2{,}4094<x\leq 3{,}8188}$$

11. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δίνονται στο διπλανό σχήμα.



Η ανίσωση $\ln x\leq 1-x$, που ορίζεται εφόσον $x>0$, αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $f(x)\leq g(x)$. Όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτό συμβαίνει αν $0<x\leq 1$ και αποδεικνύεται ως εξής:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως:

• Αν $\mathbf{0<x\leq 1}$, τότε $f(x)\leq f(1)$

ή $\ln x\leq 0$, ενώ $g(x)\geq g(1)$ ή $1-x\geq 0$, οπότε $\ln x\leq 1-x$.

Άρα κάθε $x\in(0,1]$ είναι λύση της ανίσωσης $\ln x\leq 1-x$.

• Αν $\mathbf{x>1}$, τότε $f(x)>f(1)$ ή $\ln x>0$, ενώ $g(x)<g(1)$ ή $1-x<0$, οπότε $\ln x>1-x$.

Άρα κανένα $x\in(1,+\infty)$ δεν επαληθεύει την $\ln x\leq 1-x$.
Επομένως η ανίσωση αληθεύει για καθε $x\in(0,1]$.

2ος τρόπος

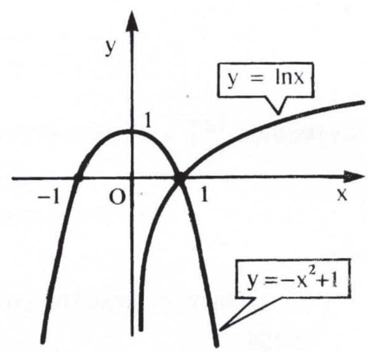
• Αν $\mathbf{0<x\leq 1}$, τότε $\ln x\leq 0$ και

$1-x\geq 0$, οπότε $\ln x\leq 1-x$,

• Αν $\mathbf{x>1}$, τότε $\ln x>0$ και

$1-x<0$, οπότε $\ln x>1-x$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(0,1]$.



ii) Αν εργασθούμε όπως στο (i) ερώτημα βρίσκουμε ότι η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in[1,+\infty)$

12. Αν θέσουμε $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\lambda$, έχουμε

$\alpha=\lambda\eta\mu A$, $\beta=\lambda\eta\mu B$ και $\gamma=\lambda\eta\mu\Gamma$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \lambda^2\eta\mu^2B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma-2\lambda\eta\mu B\cdot\lambda\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A\\
&= \lambda^2(\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma-2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A)\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] \quad (\text{αφού } A+B+\Gamma=\pi)\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu B\eta\mu\Gamma)]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma-2\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B-\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2B\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma]\\
&= \lambda^2[\eta\mu^2B(1-\eta\mu^2\Gamma)+\eta\mu^2\Gamma(1-\eta\mu^2B)+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma]\\
&= \lambda^2(\eta\mu^2B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\sigma\upsilon\nu^2B\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma)\\
&= \lambda^2(\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma)^2\\
&= \lambda^2\eta\mu^2(B+\Gamma)\\
&= \lambda^2\eta\mu^2A\\
&= \alpha^2
\end{aligned}$$

13. Ισχύει $\text{συν}A = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$

οπότε
$$\frac{\text{ημ}A}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\text{συν}^2 A}}{\alpha} = \frac{\sqrt{(2\beta\gamma)^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}}{2\beta\gamma\alpha} = \frac{\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}}{2\alpha\beta\gamma} = \varrho$$

Το δεύτερο μέλος είναι συμμετρικό ως προς α,β,γ άρα και τα πηλίκα $\dfrac{\text{ημ}B}{\beta}$, $\dfrac{\text{ημ}\Gamma}{\gamma}$ είναι ίσα προς αυτό.

Για να αποδείξουμε ότι $A+B+\Gamma = \pi$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\text{ημ}(A+B) = \text{ημ}\Gamma \text{ και } \text{συν}(A+B) = -\text{συν}\Gamma.$$

Είναι:

- $$\text{ημ}(A+B) = \text{ημ}A\text{συν}B+\text{συν}A\text{ημ}B = \varrho\alpha\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} + \varrho\beta\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \quad \left(\text{Επειδή } \frac{\text{ημ}A}{\alpha} = \frac{\text{ημ}B}{\beta} = \varrho\right)$$
$$= \varrho\frac{2\gamma^2}{2\gamma} = \varrho\gamma = \text{ημ}\Gamma \quad \left(\text{Επειδή } \frac{\text{ημ}\Gamma}{\gamma} = \varrho\right)$$

- $$\text{συν}(A+B) = \text{συν}A\text{συν}B - \text{ημ}A\text{ημ}B = \frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)}{4\gamma^2\alpha\beta} - \varrho^2\alpha\beta$$
$$= \frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)}{4\gamma^2\alpha\beta} - \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\gamma^2\alpha\beta}$$
$$= \frac{-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2+2\gamma^4}{4\gamma^2\alpha\beta} = -\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} = -\text{συν}\Gamma$$

14. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\alpha<\beta+\gamma$ και $\beta<\alpha+\gamma$ και $\gamma<\alpha+\beta$

Αν θέσουμε $\dfrac{\alpha}{\text{ημ}A} = \dfrac{\beta}{\text{ημ}B} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} = \lambda$ έχουμε:

$$\alpha = \lambda\text{ημ}A, \qquad \beta = \lambda\text{ημ}B, \qquad \gamma = \lambda\text{ημ}\Gamma$$

Επομένως

$$\alpha<\beta+\gamma \Leftrightarrow \lambda\text{ημ}A<\lambda\text{ημ}B+\lambda\text{ημ}\Gamma$$
$$\Leftrightarrow \text{ημ}A<\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma$$

$\Leftrightarrow$ ημ(Β+Γ)<ημΒ+ημΓ
$\Leftrightarrow$ ημΒσυνΓ+συνΒημΓ<ημΒ+ημΓ
$\Leftrightarrow$ 0<ημΒ(1−συνΓ)+ημΓ(1−συνΒ) που ισχύει

Ομοια αποδεικνύουμε και τις β<α+γ, γ<α+β.
Αρα υπάρχει τρίγωνο ΚΛΜ με (ΛΜ)=α, (ΚΜ)=β, (ΚΛ)=γ.
Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι:

$$συνΑ = συνΚ = \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$$

$$συνΒ = συνΛ = \frac{γ^2+α^2-β^2}{2γα}$$

$$συνΓ = συνΜ = \frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ}$$

Αρα Α=Κ, Β=Λ, Γ=Μ.

Σχόλιο. Η άσκηση 14 μας δείχνει ότι το θεώρημα των συνημιτόνων, προκύπτει από το θεώρημα των ημιτόνων και την σχέση Α+Β+Γ = 180^o αλγεβρικά χωρίς άλλη αναφορά στην γεωμετρία του τριγώνου. Η άσκηση 20, μας λέει παραπέρα ότι το θεώρημα των ημιτόνων και η σχέση Α+Β+Γ = 180^o περιέχουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν τις πλευρές και γωνίες ενός τριγώνου, οι οποίες ισχύουν γενικά για όλα τα τρίγωνα.

15. Είναι συνδυασμός των ασκήσεων 13 και 14.

Σχόλιο. Η προηγούμενη άσκηση δείχνει ότι οι τρεις σχέσεις του θεωρήματος των συνημιτόνων περικλείουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν γωνίες και πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου.

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Διά Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων/ ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.