ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

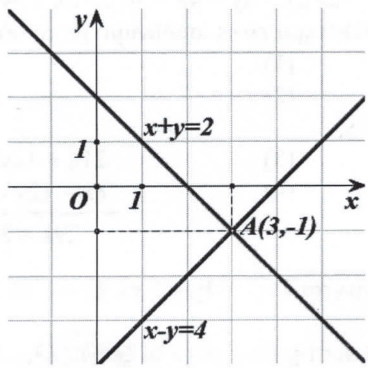
§ 1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (3, –1).

ii)



2. i) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 & (1) \\ x + y = 45. & (2) \end{cases}$

Από τη (2) έχουμε $y = 45 - x$ και με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $8x - 7(45 - x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 315 + 7x = 0 \Leftrightarrow 15x = 315 \Leftrightarrow x = 21$.
Επομένως $y = 45 - 21 = 24$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (21, 24).

ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 3y - 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -2 & (1) \\ 4x + 3y = 8. & (2) \end{cases}$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$.

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y = 10 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3}$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}\right)$.

3. i) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \Leftrightarrow 7(x-5)+2(2y+1)+28=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-35+4y+2+28=0 \Leftrightarrow 7x+4y=5.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \Leftrightarrow 2(x+6)-3(y-6)=48 \Leftrightarrow 2x+12-3y+18=48$$

$$\Leftrightarrow 2x-3y=48-30 \Leftrightarrow 2x-3y=18.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 7x+4y=5 & (1) \\ 2x-3y=18. & (2) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το y

$$\begin{array}{ll} 7x+4y=5 & (3) \\ 2x-3y=18 & (4) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21x+12y=15 \\ 8x-12y=72 \\ \hline 29x=87, \text{ οπότε } x=\frac{87}{29}=3. \end{array}$$

Για $x=3$ η (1) γίνεται $7\cdot 3+4y=5 \Leftrightarrow 4y=-21+5 \Leftrightarrow 4y=-16$, οπότε $y=-4$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -4)$.

ii) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1)=12\cdot 4-3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 8x-4=48-3y-6 \Leftrightarrow 8x+3y=46.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \Leftrightarrow 3(x+3)-3\cdot 6=2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 3x+9-18=2x-2y \Leftrightarrow x+2y=9.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 8x+3y=46 & (1) \\ x+2y=9. & (2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x=9-2y$ και έχουμε

$$8(9-2y)+3y=46 \Leftrightarrow 72-16y+3y=46 \Leftrightarrow 13y=26 \Leftrightarrow y=2.$$

Η (2) για $y=2$ γίνεται $x+2\cdot 2=9 \Leftrightarrow x=5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5, 2)$.

4. i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3}-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$\left(k, \frac{k+2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

5. i) Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\,(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

Επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (3, 1).

ii) Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$$

Επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, –1).

6. i) $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii) $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i)

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x + 2y = -2 \\ x + \left(\sqrt{3}+1\right)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x + 2y = -2 \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)y = -\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x + 2y = -2 \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x + 2y = -2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$\left(\left(\sqrt{3}+1\right)\left(k+1\right), k\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

ii)

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \dfrac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x + 4y = 7 \\ x + 2\left(\sqrt{3}-1\right)y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x + 4y = 7 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x + 2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)y = 2\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x + 4y = 7 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x + 4y = 2\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega = 3x - 2y - 11$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) = 3 \Leftrightarrow 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3$

$\Leftrightarrow -4x - y = -19 \Leftrightarrow 4x + y = 19$ (5)

• $5x + y - 2(3x - 2y - 11) = 33 \Leftrightarrow 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33$

$\Leftrightarrow -x + 5y = 11 \Leftrightarrow x - 5y = -11$ (6)

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα

$$\begin{cases} 4x + y = 19 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου κατά τα γνωστά βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$. Με αντικατάσταση των τιμών των x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega = -5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(4, 3, -5)$.

ii) Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $5(3y - \omega + 2) - y + 32 = 4 \Leftrightarrow 15y - 5\omega + 10 - y + 32 = 4$

$\Leftrightarrow 14y - 2\omega = -6 \Leftrightarrow 7y - \omega = -3$ (5)

• $3(3y - \omega + 11) -2y + 2\omega = 2 \Leftrightarrow 9y - 3\omega + 6 - 2y + 2\omega = 2$

$\Leftrightarrow 7y - \omega = -4$ (6)

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα

$$\begin{cases} 7y - \omega = -3 \\ 7y - \omega = -4 \end{cases} \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Απαλείφουμε τους παρονομαστές και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ 3x + 2y + 2\omega = 10 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16. \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4\omega - 2x + 6$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

• $3x + 2(4\omega - 2x + 6) + 2\omega = 10 \Leftrightarrow 3x + 8\omega - 4x + 12 + 2\omega = 10$

$\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2$ (5)

• $5x + 3(4\omega - 2x + 6) -2\omega = 16 \Leftrightarrow 5x + 12\omega - 6x + 18 - 2\omega = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2$ (6)

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα

$$\begin{cases} x - 10\omega = 2 \\ x - 10\omega = 2 \end{cases}$$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής με $x = 10k + 2$, $\omega = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Από την (4) έχουμε $y = 4k - 2(10k + 2) + 6 = -16k + 2$.

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(10k + 2, -16k + 2, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έστω ότι η εξίσωση της ε_1 είναι $y = \alpha x + \beta$. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία (0, 2) και (4, 0) έχουμε

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 4\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα ε_1: $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ε_2 είναι $y = x - 1$.

ii) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι το ζεύγος (2, 1).

2. Αν x είναι ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16. \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 2200 \\ 1{,}5x + 4y = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 700. \end{cases}$$

Άρα τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Αφού για $T = 20$ είναι $R = 0{,}4$, έχουμε

$$0{,}4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0{,}4 \qquad (1)$$

Αφού για $T = 80$ είναι $R = 0{,}5$, έχουμε

$$0{,}5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0{,}5 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ 80\alpha + \beta = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{600} \\ \beta = \dfrac{11}{30}. \end{cases}$$

Άρα $R = \dfrac{1}{600} \cdot T + \dfrac{11}{30}$.

5. Αν απαιτούνται x $m\ell$ από το πρώτο διάλυμα και y $m\ell$ από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$. (1)

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέως σε κάθε διάλυμα είναι $\dfrac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}$y στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100$. (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 5x + 8y = 680. \end{cases}$$

Επομένως $5x + 8(100 - x) = 680 \Leftrightarrow 5x + 800 - 8x = 680$
$\Leftrightarrow 5x - 8x = 680 - 800$
$\Leftrightarrow -3x = -120 \Leftrightarrow x = 40$

οπότε $y = 60$.

Άρα πρέπει να αναμείξει 40 mℓ από το πρώτο με 60 mℓ από το δεύτερο.

6. i) $2x + 4y = 3 \Leftrightarrow 4y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{3}{4}$.

Άρα $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$x + 2y = \alpha \Leftrightarrow 2y = -x + \alpha \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}$.

Άρα $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

ii) Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.
Άρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

iii) Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν $\frac{3}{4} \neq \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha \neq 6 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{2}$.

7. i) $\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1. \end{cases}$

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha).$$

Αν $D \neq 0$ δηλαδή αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \text{ και}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{-\alpha}{\alpha+1}.$$

Άρα αν $\alpha \neq \pm 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}, \frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)$.

• Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$

και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) $\begin{cases} \alpha x - y = \alpha \\ x + \alpha y = 1. \end{cases}$

Έχουμε

$D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. i)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 4 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1) - 4\cdot(-2) = -(\lambda^2-1)+8$$
$$= -\lambda^2+1+8 = -\lambda^2+9 = -(\lambda^2-9)$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda-3).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -1\cdot(\lambda+1) - (-2)(-2) = -\lambda-1-4 = -(\lambda+5).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)-4 = -2\lambda+2-4 = -2\lambda-2 = -2(\lambda+1).$$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση την

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-(\lambda+5)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)}=\frac{\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda-3)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2(\lambda+1)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)}=\frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+3)(\lambda-3)}.$$

• Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 4x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x-2y=-1 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

• Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -4x-2y=1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

ii) $D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2)-5 = \mu^2-4-5 = \mu^2-9 = (\mu+3)(\mu-3).$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2)-25 = 5\mu+10-25 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2)-5 = 5\mu-10-5 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή $\mu \neq \pm 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}.$$

• Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} x+5y=5 \\ x+5y=5, \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη $(5-5k, k)$, όπου k οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

• Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -5x+5y=5 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=5, \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντιστοίχως, τότε

$$\begin{cases} R_1+R_2=6 & (1) \\ R_2+R_3=7 & (2) \\ R_1+R_3=5 & (3) \end{cases}$$

Το σύστημα λύνεται με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Λόγω όμως της μορφής του μπορούμε να το λύσουμε και ως εξής:
Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε

$$2(R_1+R_2+R_3) = 18 \Leftrightarrow R_1+R_2+R_3 = 9 \qquad (4)$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι

$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_2 = 9-6 \Leftrightarrow R_3 = 3.$$
$$R_1+R_2+R_3-R_2-R_3 = 9-7 \Leftrightarrow R_1 = 2.$$
$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_3 = 9-5 \Leftrightarrow R_2 = 4.$$

Επομένως οι ακτίνες των κύκλων είναι 2cm, 4cm και 3cm.

10. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα.
Επομένως $ΑΖ = ΑΕ = x$, $ΒΔ = ΒΖ = y$ και $ΓΔ = ΓΕ = z$. Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+y=\gamma & (1) \\ y+z=\alpha & (2) \\ z+x=\beta & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε

$$2(x+y+z)=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow x+y+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad (4)$$

• Από (4) και (1) έχουμε $\gamma+z=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

• Από (4) και (2) έχουμε $x+\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

• Από (4) και (3) έχουμε $y+\beta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, τότε

$x=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\dfrac{2\tau-\alpha-\alpha}{2}=\tau-\alpha$ και ομοίως $y=\tau-\beta$, $z=\tau-\gamma$.

11. Αν x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντιστοίχως, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z=52 \\ \dfrac{50}{100}x+\dfrac{10}{100}y+\dfrac{30}{100}z=\dfrac{32}{100}\cdot 52 \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=52 & (1) \\ 50x+10y+30z=1664 & (2) \\ x=2z & (3) \end{cases}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y+3z=52$, οπότε $y=52-3z$ και η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} &50\cdot 2z+10(52-3z)+30z=1664 \\ \Leftrightarrow\ &100z+520-30z+30z=1664 \\ \Leftrightarrow\ &100z=1144 \Leftrightarrow z=11{,}44, \end{aligned}$$

οπότε $z \simeq 11{,}44$lt

Επομένως $x=22{,}88$lt και $y=17{,}68$lt.

12. • Στην 1^{η} περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου f(x) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0)=3$, οπότε θα έχουμε $\gamma=3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+3.$$

Επειδή το τριώνυμο f(x) έχει κορυφή το σημείο K(2, –1) θα ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{2\alpha}=2 \\ f\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4\alpha \\ f(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ \alpha=1. \end{cases}$$

Επομένως είναι $f(x)=x^2-4x+3$.

• Στην $2^{η}$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου g(x) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο –1, θα ισχύει g(–1) = 0, οπότε θα έχουμε

$$\alpha - \beta + \gamma = 0. \qquad (2)$$

Επειδή επιπλέον η γραφική παράσταση του τριωνύμου g(x) έχει κορυφή το σημείο K(1, 4), θα ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{2\alpha} = 1 \\ g\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ g(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha & (3) \\ \alpha + \beta + \gamma = 4. & (4) \end{cases}$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha \\ -\alpha - 3\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Άρα, είναι α = –1, β = 2 και γ = 3, οπότε έχουμε $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

2ος τρόπος:

Μία ρίζα του τριωνύμου g(x) είναι $\rho_1 = -1$. Αν ρ_2 είναι η άλλη ρίζα αυτού, τότε θα ισχύει $\rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ · Επειδή, όμως η τετμημένη x_k της κορυφής της παραβολής δίνεται από τον τύπο με $x_k = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$ και επειδή $x_k = 1$, θα ισχύει

$$\frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \rho_2 = 3.$$

Άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 3$, οπότε θα έχουμε

$$g(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha(x + 1)(x - 3).$$

Επειδή, όμως η κορυφή K της παραβολής έχει συντεταγμένες (1, 4), θα ισχύει g(1) = 4, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(1 + 1)(1 - 3) = 4 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Επομένως είναι

$$g(x) = -1(x + 1)(x - 3) = -x^2 + 2x + 3.$$

• Στην $3^{η}$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου h(x) τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα y΄y στο σημείο 4, θα ισχύει

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h(4) = 0 \\ h(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -4 \\ 16\alpha + 4\beta = -4 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0{,}5 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

Επομένως είναι $h(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$.

3ος τρόπος:

Το τριώνυμο h(x) έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 4$. Επομένως έχουμε

$$h(x) = \alpha(x-2)(x-4).$$

Επειδή, όμως η γραφική παράσταση του τριωνύμου διέρχεται από το σημείο Γ(0, 4), θα ισχύει h(0) = 4, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(0-2)(0-4) = 4 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}5.$$

Επομένως, είναι

$$h(x) = 0{,}5(x-2)(x-4) = 0{,}5x^2 - 3x + 4.$$

§ 1.2 Μη Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $y = 1 - x$ (1) και, αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη, παίρνουμε

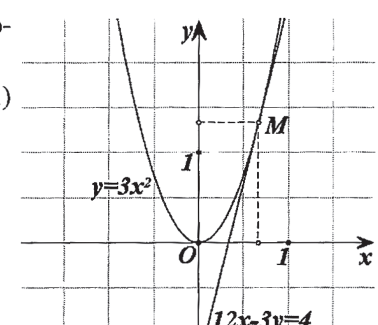
$$x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0. \qquad (2)$$

Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω της (1) είναι
$y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2$ και $y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1$.
Επομένως το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη (–1, 2) και (2, –1).

2. i) Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$12x - 3(3x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0. \ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, την $x = \frac{2}{3}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y = \frac{4}{3}$.



Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Για να εξηγήσουμε γραφικά τη λύση χαράσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, την παραβολή $y = 3x^2$ και την ευθεία $12x - 3y = 4$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ, το οποίο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

ii) Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

Η (1), λόγω της (2), γίνεται

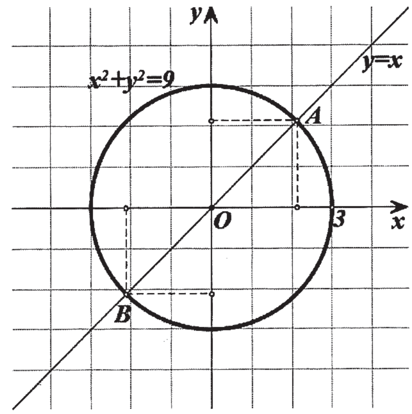
$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9$

και έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

και $x_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

οπότε θα έχουμε



$$y_1 = x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ με κέντρο το σημείο Ο(0, 0) και ακτίνα 3 καθώς επίσης και την ευθεία $y = x$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$.

iii) Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x \neq 0$, $y \neq 0$ και $y = \dfrac{2}{x}$.

Η πρώτη εξίσωση γίνεται

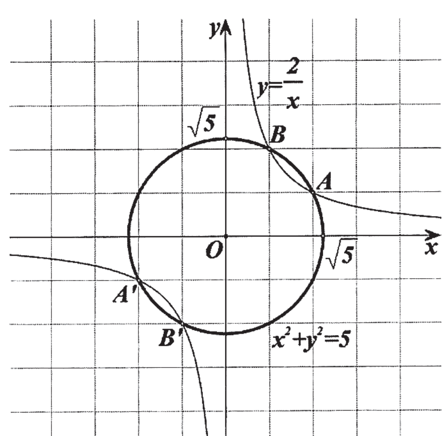
$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

$\Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0. \quad (1)$

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$ (2), η (1) γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$. (3)

Αυτή έχει ρίζες $\omega_1 = 1$ και



$\omega_2 = 4$, οπότε λόγω της (2) έχουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4$. Από αυτές παίρνουμε τέσσερις ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, οπότε για το y παίρνουμε τις τιμές $y_1 = \frac{2}{x_1} = -2$, $y_2 = \frac{2}{x_2} = 2$ και $y_3 = \frac{2}{-2} = -1$, $y_4 = \frac{2}{2} = 1$.

Άρα, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη (–1, –2), (1, 2), (–2, –1) και (2, 1). Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ με κέντρο το O(0, 0) και ακτίνα $\sqrt{5}$, καθώς επίσης και την υπερβολή $y = \frac{2}{x}$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα (–1, –2), (1, 2), (–2, –1) και (2, 1).

3. Από την $v = v_0 + \alpha t$ έχουμε $v - v_0 = \alpha t$, οπότε $\alpha = \frac{v - v_0}{t}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = \frac{2v_0 t + vt - v_0 t}{2}.$$

Άρα $S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

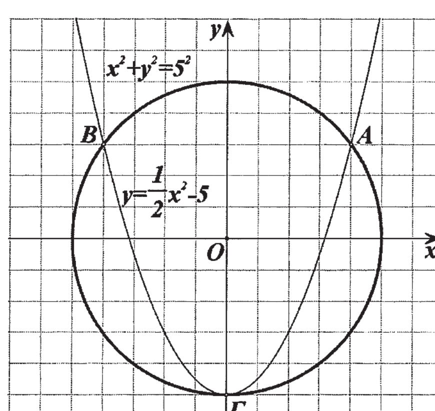
1. Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γίνεται

$2y + 10 + y^2 = 25$

ή, ισοδύναμα,

$y^2 + 2y - 15 = 0$, η οποία έχει ρίζες 3 και –5. Για y = 3 έχουμε $x^2 = 16$, οπότε x = 4 ή x = –4. Για y = –5 έχουμε $x^2 = 0$, οπότε x = 0.

Άρα το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις (4, 3), (–4, 3), (0, –5). Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι ότι η παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5^2$ έχουν τρία κοινά σημεία.



2. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$, οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad (2)$$

Για να λύσουμε το (1) θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση $y = 0$, οπότε έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οι ρίζες αυτής είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, έτσι το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη (1, 0) και (3, 0). Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) γράφεται $y = 2x - 5$, (3) και αν θέσουμε στη δεύτερη παίρνουμε $2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$.

Οι ρίζες αυτές είναι $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, οπότε λόγω της (3) είναι $y_3 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ και $y_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Έτσι το σύστημα (2) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη (2, –1) και (4, 3). Επομένως το αρχικό σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη (1, 0), (3, 0), (2, –1) και (4, 3).

3. Αν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι

$$xy = 120 \quad (1)$$

και

$$(x + 3)(y - 2) = 120 \quad (2)$$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται

$$120 + 3y - 2x - 6 = 120 \Leftrightarrow 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 6}{3}, \quad (3)$$

θέτουμε στην (1) η οποία έτσι γίνεται

$$x\left(\frac{2x + 6}{3}\right) = 120 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 360 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 12$ και $x_2 = -15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι πάντοτε θετικές θα έχουμε x = 12cm, οπότε, λόγω της (1), θα είναι $y = \frac{120}{x} = \frac{120}{12} = 10\text{cm}$.

4. Για να βρούμε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $y = 2x + k$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x + k \\ y = -x^2 \end{cases}$ (1)

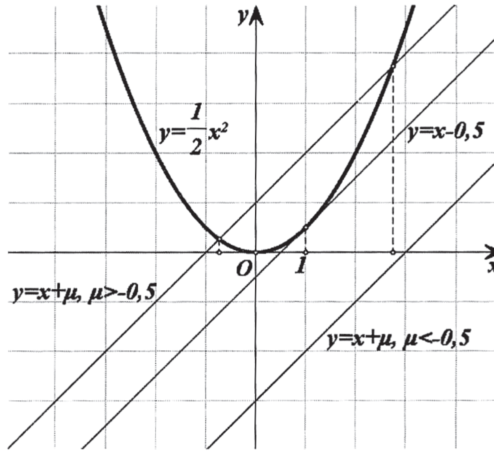
Αν θέσουμε στην πρώτη εξίσωση $y = -x^2$, παίρνουμε $-x^2 = 2x + k$ ή ακόμη $x^2 + 2x + k = 0$. (2)

Είναι φανερό ότι οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, μόνο αν το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (2) θα πρέπει να έχει δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4k > 0$, δηλαδή αν είναι $k < 1$.

5. Με αντικαταστάτη του $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την

$$2(x + \mu) = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2\mu = 0. \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις



• $\Delta > 0$, δηλαδή $\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται.

• $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία εφάπτονται.

• $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Γραφικά τα εξαγόμενα, εξηγούνται με τη βοήθεια του προηγούμενου σχήματος.