2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 66 – 68

Α΄ Ομάδας

1.

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi-3|$ **ii)** $|\pi-4|$

iii) $|3-\pi|+|4-\pi|$ **iv)** $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

Λύση

i)

$|\pi-3| = \pi-3$

ii)

$|\pi-4| = -(\pi-4) = 4-\pi$

iii)

$|3-\pi|+|4-\pi| = -(3-\pi)+4-\pi = -3+\pi+4-\pi = 1$

iv)

$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 0$

2.

Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|+|x-4|$

Λύση

$3 < x \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow |x-3| = x-3$

$x < 4 \Rightarrow x-4 < 0 \Rightarrow |x-4| = -(x-4) = -x+4$

Άρα $|x-3|+|x-4| = x-3-x+4 = 1$

3.

Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|-|4-x|$, όταν

i) $x<3$ **ii)** $x>4$

Λύση

i)

$x<3 \Rightarrow x-3<0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) = -x+3$

$x<3 \Rightarrow x<4 \Rightarrow 4-x>0 \Rightarrow |4-x| = 4-x$

Άρα $|x-3|-|4-x| = -x+3-(4-x) = -x+3-4+x = -1$

ii)

$x>4 \quad 4-x<0 \quad |4-x| = -(4-x) = -4+x$

$x>4 \quad x>3 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow |x-3| = x-3$

Άρα $|x-3|-|4-x| = x-3-(-4+x) = x-3+4-x = 1$

4.

Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$

Λύση

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right| = \frac{|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|} = \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|} = 1$$

5.

Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$$

Λύση

- Όταν x, y θετικοί: $A = \dfrac{x}{x} + \dfrac{y}{y} = 1+1 = 2$
- Όταν x, y αρνητικοί: $A = \dfrac{-x}{x} + \dfrac{-y}{y} = -1-1 = -2$
- Όταν x θετικός, y αρνητικός: $A = \dfrac{x}{x} + \dfrac{-y}{y} = 1-1 = 0$
- Όταν x αρνητικός, y θετικός: $A = \dfrac{-x}{x} + \dfrac{y}{y} = -1+1 = 0$

6.
Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε :

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή D.

Λύση

i)

$d(D,\ 2{,}37) \le 0{,}005$

ii)

$d(D,\ 2{,}37) \le 0{,}005 \iff |D-2{,}37| \le 0{,}005$

$-0{,}005 \le D-2{,}37 \le 0{,}005$

$-0{,}005+2{,}37 \le D \le 0{,}005+2{,}37$

$2{,}365 \le D \le 2{,}375$

7.
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-4\| \le 2$	$d(x,4) \le 2$	$[2,\ 6]$
$\|x+3\| < 4$	$d(x,-3) < 4$	$(-7,\ 1)$
$\|x-4\| > 2$	$d(x,4) > 2$	$(-\infty,\ 2)\cup(6,\ +\infty)$
$\|x+3\| \ge 4$	$d(x,-3) \ge 4$	$(-\infty,\ -7]\cup[1,\ +\infty)$
$\|x-5\| < 1$	$d(x,5) < 1$	$(4,\ 6)$
$\|x+1\| > 2$	$d(x,-1) > 2$	$(-\infty,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$
$\|x-5\| \ge 1$	$d(x,5) \ge 1$	$(-\infty,\ 4]\cup[6,\ +\infty)$
$\|x+1\| \le 2$	$d(x,-1) \le 2$	$[-3,\ 1]$
$\|x\| < 2$	$d(x,0) < 2$	$(-2,\ 2)$
$\|x+2\| \le 3$	$d(x,-2) \le 3$	$[-5,\ 1]$
$\|x\| \ge 2$	$d(x,0) \ge 2$	$(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$
$\|x+2\| > 3$	$d(x,-2) > 3$	$(-\infty,\ -5)\cup(1,\ +\infty)$

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \le |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$

Λύση

$$|\alpha-\beta| = |\alpha-\beta+\gamma-\gamma|$$
$$= |(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)| \le |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta| \quad \text{(τριγωνική ανισότητα)}$$

2.

Αν $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι **:**

i) $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **ii)** $\beta = \dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

Λύση

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha-\beta > 0 \Rightarrow |\alpha-\beta| = \alpha-\beta$$

i)

$$\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

ii)

$$\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2} = \frac{\alpha+\beta-(\alpha-\beta)}{2} = \frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$$

3.

Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y **:**

i) Η ισότητα $|x| + |y| = 0$ **ii)** Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$

Λύση

i)

Η ισότητα $|x| + |y| = 0$ ισχύει μόνο όταν $x = 0$ και $y = 0$

Διότι, αν ένας τουλάχιστον από τους x, y ήταν $\neq 0$, (έστω $x \neq 0$),

θα ήταν $|x| > 0$

οπότε $|x| + |y| > 0$, που είναι άτοπο

ii)

Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$ ισχύει μόνο όταν $x \neq 0$ ή $y \neq 0$

Διότι, αν ήταν $x = 0$ και $y = 0$

θα ήταν $|x| + |y| = 0$, που είναι άτοπο

4.

Έστω $0<\alpha<\beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $1,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha}$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1, από ότι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$

Λύση

i)

$0<\alpha<\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}<1$ και $1<\frac{\beta}{\alpha}$. Άρα $\frac{\alpha}{\beta}<1<\frac{\beta}{\alpha}$

ii)

Από (i) έχουμε $\frac{\alpha}{\beta}-1<0$ και $\frac{\beta}{\alpha}-1>0 \Rightarrow$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|=-\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right) \quad \text{και} \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}-1\right|=\frac{\beta}{\alpha}-1$$

Αρκεί να αποδείξουμε $\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|<\left|\frac{\beta}{\alpha}-1\right|$

$$-\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)<\frac{\beta}{\alpha}-1$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}+1<\frac{\beta}{\alpha}-1$$

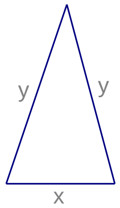
$$-\alpha^2+\alpha\beta<\beta^2-\alpha\beta$$

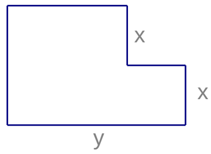
$$0<\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$$

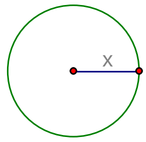
$0<(\alpha-\beta)^2$ που ισχύει

5.

Αν $|x-2| < 0,1$ και $|y-4| < 0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων **:**







Λύση

$|x-2| < 0,1 \;\Rightarrow\; -0,1 < x-2 < 0,1 \;\Rightarrow$

$2-0,1 < x < 2+0,1 \;\Rightarrow\; 1,9 < x < 2,1 \quad \textbf{(1)}$

$|y-4| < 0,2 \;\Rightarrow\; -0,2 < y-4 < 0,2 \;\Rightarrow$

$4-0,2 < y < 4+0,2 \;\Rightarrow\; 3,8 < y < 4,2 \quad (2)$

- Περίμετρος = x + 2y

  $(2) \;\Rightarrow\; 7,6 < 2y < 8,4 \quad (3)$

  $(1) + (2): \; 9,5 < x + 2y < 10,5$

- Περίμετρος = 4x + 2y

  $(1) \;\Rightarrow\; 7,6 < 4x < 8,4 \quad (4)$

  $(3) + (4): \; 15,2 < 4x + 2y < 16,8$

- Περίμετρος = 2πx

  $(1) \;\Rightarrow\; 2\pi .\, 1,9 < 2\pi x < 2\pi .\, 2,1 \;\Rightarrow\; 3,8\pi < 2\pi x < 4,2\pi$