2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 59 – 60

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.i)

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+9\geq 6\alpha$.

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha^2-6\alpha+9\geq 0$

» $\alpha^2-2.\alpha.3+3^2\geq 0$

» $(\alpha-3)^2\geq 0$ που ισχύει

1.ii)

Να αποδείξετε ότι $2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\geq(\alpha+\beta)^2$

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

» $2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2\geq 0$

» $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$

» $(\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει.

2.

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=(\alpha^2-2\alpha+1)+\beta^2=(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 0+0=0$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=0 \iff (\alpha-1)^2+\beta^2=0$

$\alpha-1=0$ και $\beta=0$

$\alpha=1$ και $\beta=0$

3.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις **:**

i) Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$ **ii)** Αν $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

Λύση

i)

$(x-2)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0$ και $y+1=0$

$x=2$ και $y=-1$

ii)

$x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y+1+4=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=0$

$x-1=0$ και $y+2=0$

$x=1$ και $y=-2$

4.

Αν $4{,}5 < x < 4{,}6$ και $5{,}3 < y < 5{,}4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

i) $x + y$ **ii)** $x - y$ **iii)** $\frac{x}{y}$ **iv)** $x^2 + y^2$

Λύση

i)

Προσθέτουμε κατά μέλη **:** $4{,}5 + 5{,}3 < x + y < 4{,}6 + 5{,}4$

$$9{,}8 < x + y < 10$$

ii)

$5{,}3 < y < 5{,}4 \Rightarrow -5{,}3 > -y > -5{,}4 \Rightarrow -5{,}4 < -y < -5{,}3$ **(1)**

αλλά $4{,}5 < x < 4{,}6$ **(2)**

(2) + (1) **:** $-0{,}9 < x - y < -0{,}7$

iii)

$$5{,}3 < y < 5{,}4 \Rightarrow \frac{1}{5{,}3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5{,}4}$$

$$\frac{10}{53} > \frac{1}{y} > \frac{10}{54}$$

$$\frac{10}{54} < \frac{1}{y} < \frac{10}{53} \quad \textbf{(3)}$$

(2).(3) **:** $4{,}5.\frac{10}{54} < x.\frac{1}{y} < 4{,}6.\frac{10}{53} \Rightarrow \frac{45}{54} < \frac{x}{y} < \frac{46}{53}$

iv)

$4{,}5 < x < 4{,}6 \Rightarrow (4{,}5)^2 < x^2 < (4{,}6)^2 \Rightarrow 20{,}25 < x^2 < 21{,}16$ **(4)**

$5{,}3 < y < 5{,}4 \Rightarrow (5{,}3)^2 < y^2 < (5{,}4)^2 \Rightarrow 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$ **(5)**

(4) + (5) **:** $48{,}34 < x^2 + y^2 < 50{,}32$

5.

Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1 , να βρείτε τις δυνατές τιμές **:**

i) της περιμέτρου **ii)** του εμβαδού του νέου ορθογωνίου

Λύση

i)

Οι διαστάσεις του νέου ορθογωνίου είναι $x + 0,2$ $y - 0,1$

$2 < x < 3 \Rightarrow 2 + 0,2 < x + 0,2 < 3 + 0,2$

$2,2 < x + 0,2 < 3,2$ **(1)**

$4,4 < 2(x + 0,2) < 6,4$ **(2)**

$3 < y < 5 \Rightarrow 3 - 0,1 < y - 0,1 < 5 - 0,1$

$2,9 < y - 0,1 < 4,9$ **(3)**

$5,8 < 2(y - 0,1) < 9,8$ **(4)**

(2) + (4) **:** $10,2 <$ περίμετρος $< 16,2$

ii)

(1). (3) **:** $2,2 \,.\, 2,9 < (x + 0,2)(y - 0,1) < 3,2 \,.\, 4,9$

$6,38 <$ εμβαδόν $< 15,68$

6.

Αν $0 \le \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$

Λύση

$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha)$

$\alpha + \alpha\beta < \beta + \beta\alpha$

$\alpha < \beta$ που ισχύει

7.

Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς :

Έστω $x > 5$. Τότε $x > 5$

$5x > 25$

$5x - x^2 > 25 - x^2$

$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x)$

$x > 5 + x$

$0 > 5$

Λύση

$x > 5 \quad \Rightarrow \quad 5 - x < 0$

Οπότε, από $x(5 - x) > (5 + x)(5 - x) \quad \Rightarrow \quad x < 5 + x$ και όχι $x > 5 + x$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

Λύση

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + \gamma)\beta > \alpha(\beta + \gamma)$

$\alpha\beta + \gamma\beta > \alpha\beta + \alpha\gamma$

$\gamma\beta > \alpha\gamma$

$\beta > \alpha$

$1 > \frac{\alpha}{\beta}$ που ισχύει

ii)

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + \gamma)\beta < \alpha(\beta + \gamma)$

$\alpha\beta + \gamma\beta < \alpha\beta + \alpha\gamma$

$\gamma\beta < \alpha\gamma$

$\beta < \alpha$

$1 < \frac{\alpha}{\beta}$ που ισχύει

2.
Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1+\alpha\beta$.

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha+\underline{\beta}-1-\underline{\alpha\beta} > 0$

» $(\alpha-1)-\beta(\alpha-1) > 0$

» $\underline{(\alpha-1)(1-\beta)} > 0$ **(1)**

Η υπόθεση $\alpha > 1 > \beta \Rightarrow \alpha > 1$ και $1 > \beta$

$\alpha-1 > 0$ και $1-\beta > 0$

$(\alpha-1)(1-\beta) > 0$

3.

Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4$

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $(\alpha+\beta)\,\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}\geq 4$ (Ε.Κ.Π $=\alpha\beta > 0$, αφού $\alpha, \beta > 0$)

$(\alpha+\beta)(\beta+\alpha)\geq 4\alpha\beta$

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2-4\alpha\beta\geq 0$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

$(\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει.

4.
Να αποδείξετε ότι **:**

i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ **ii)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

Λύση

i)

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2\geq 0$

$\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2\geq 0$

$\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2 \geq 0$ που ισχύει

ii)

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\geq 0$

$\alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2\geq 0$

$\alpha^2+(\alpha-\beta)^2+\beta^2 \geq 0$ που ισχύει