7.3
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 203 – 205

Α΄ Ομάδας

1.

i) Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$, θεωρώντας ως g την $g(x) = -2x^2$

Λύση

i)

Από τη θεωρία είναι $f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$ **(1)**

$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-4}{2.\ 2} = -1$ και $\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{4^2 - 4.2.5}{4.2} = \frac{16 - 40}{8} = -3$

(1) $\Rightarrow$ $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

Οριζόντια μετατόπιση της C_g: 1 μονάδα δεξιά

Κατακόρυφη μετατόπιση της C_g: 3 μονάδες πάνω.

ii)

$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{8}{2(-2)} = -2$ και $\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{8^2 - 4.(-2)(-9)}{4.(-2)} = \frac{64 - 72}{-8} = 1$

(1) $\Rightarrow$ $f(x) = -2(x - 2)^2 - 1$

Οριζόντια μετατόπιση της C_g: 2 μονάδες δεξιά

Κατακόρυφη μετατόπιση της C_g: 1 μονάδα κάτω.

2.

Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων

α) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ και **β)** $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$

Λύση

α)

$$f_{min} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-6)^2 - 4.2.3}{4.2} = -\frac{36-24}{8} = -\frac{3}{2}$$

β)

$$f_{max} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-5)^2 - 4.(-3).2}{4.(-3)} = -\frac{25+24}{-12} = \frac{49}{12}$$

3.

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

α) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ και **β)** $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$

Λύση

α)

Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2.2} = -1$$

$\Delta = 4^2 - 4.2.1 = 16 - 8 = 8,$

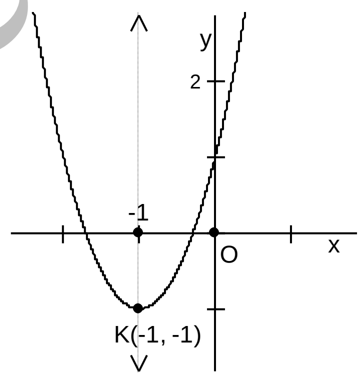
$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{8}{4.2} = -1$$

Γν.φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

Γν.αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$

Ελάχιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -1$

Άξονας συμμετρίας η ευθεία $x = -1$



β)

Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{8}{2(-2)} = 2$$

$\Delta = 8^2 - 4(-2)(-9) = 64 - 72 = -8,$

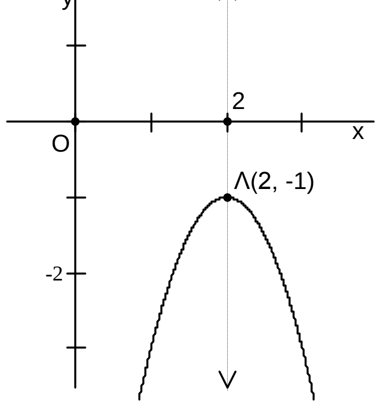
$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{-8}{4.(-2)} = -1$$

Γν.αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$

Γν.φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$

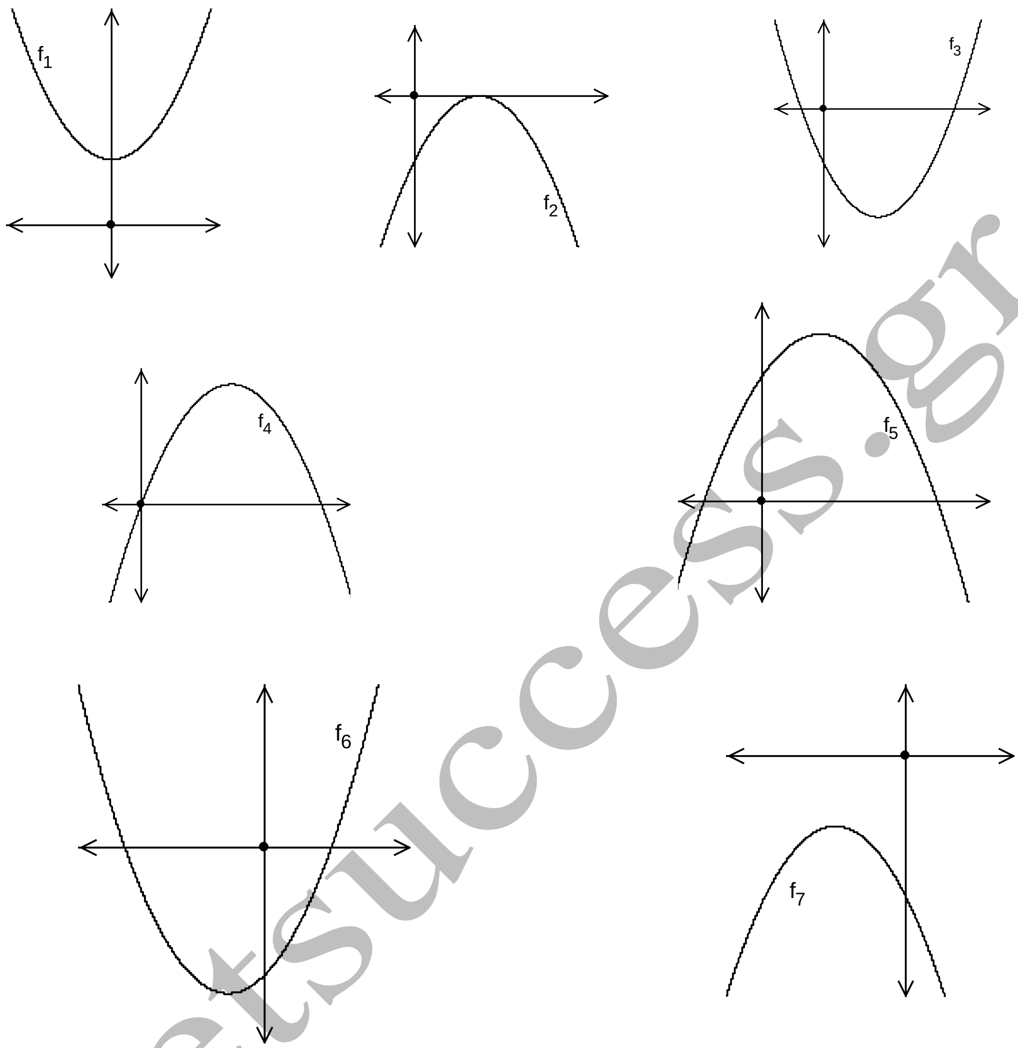
Ελάχιστο για $x = 2$, το $f(2) = -1$

Άξονας συμμετρίας η ευθεία $x = 2$



4.

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Λύση

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	–	+	–	–	+	–
β	0	+	–	+	+	+	–
γ	+	–	–	0	+	–	–
Δ	–	0	+	+	+	+	–

Β΄ Ομάδας

1.

Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + (k + 1)x + k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή :

i) Εφάπτεται του άξονα $x'x$

ii) Έχει τον $y'y$ άξονα συμμετρίας

iii) Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

Λύση

i)

Εφάπτεται του άξονα $x'x$ $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$

$$(k+1)^2 - 4k = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 4k = 0$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

ii)

Έχει τον $y'y$ άξονα συμμετρίας $\Leftrightarrow$ $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = 0$

$$\beta = 0$$

$$k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$

iii)

Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4 $\Leftrightarrow$ $-\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -4$

$$\Delta = 16$$

$$(k+1)^2 - 4k = 16$$

$$k^2 + 2k + 1 - 4k = 16$$

$$k^2 - 2k + 1 = 16$$

$$(k-1)^2 = 16$$

$$k - 1 = 4 \quad \text{ή} \quad k - 1 = -4$$

$$k = 5 \quad \text{ή} \quad k = -3$$

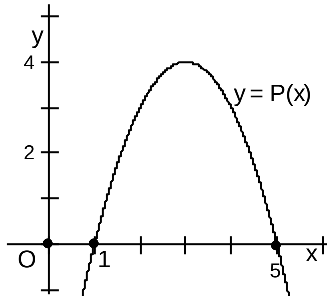
2.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε :

i) Το πρόσημο του α.

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και

iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι $\beta = 6$.



Λύση

i)
Θα είναι $\alpha < 0$ αφού το τριώνυμο έχει μέγιστο
ii)
Θα είναι $\Delta > 0$ αφού το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες (1 και 5)
iii)
Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha.\ 1^2 + \beta.\ 1 + \gamma = 0$

$\alpha + 6 + \gamma = 0$

$\gamma = -\alpha - 6$ **(1)**

$P(5) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 5^2 + \beta \cdot 5 + \gamma = 0$

$25\alpha + 30 + \gamma = 0$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 25\alpha + 30 - \alpha - 6 = 0$

$24\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -1$

(1) $\Leftrightarrow \gamma = 1 - 6 = -5$

3.

Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ.

i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο $E = f(x)$ που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = 5$ και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

Λύση
i)
$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$ με $0 < x < 10$

$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$ με $0 < x < 10$

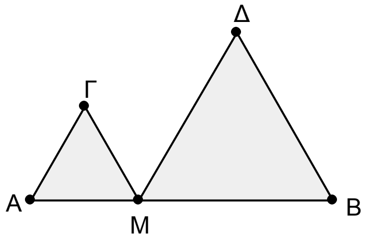
ii)
Επειδή $\alpha = -1 < 0$, το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 10x$ θα έχει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$$

Είναι δε $f_{max} = f(5) = -5^2 + 10.\ 5 = -25 + 50 = 25$

4.

Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



Λύση

Έστω (ΑΜ) = x, τότε (ΜΒ) = 6 – x

$$(\Gamma A M) + (\Delta M B) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(6-x)^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[x^2 + (6-x)^2]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + 36 - 12x + x^2)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 + 36 - 12x)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$$

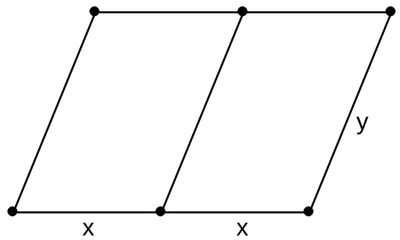
Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $E(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$ με $0 < x < 6$, που εκφράζει το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων συναρτήσει του x.

Επειδή $\alpha = 1 > 0$ θα παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-6}{2.1} = 3$.

Επομένως η ζητούμενη θέση του Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

5.

Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



Λύση

Θα είναι $4x + 3y = 200 \Leftrightarrow 3y = 200 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(200 - 4x)$ **(1)**

Ολικό εμβαδόν $= 2xy$

$$\overset{(1)}{=} 2x\frac{1}{3}(200-4x)$$

$$= \frac{2}{3}4x(50-x) = \frac{8}{3}(-x^2+50x)$$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $E(x) = \frac{8}{3}(-x^2+50x)$, που εκφράζει το ολικό εμβαδόν συναρτήσει του x.

Επειδή $\alpha = -1 < 0$ θα παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{50}{2\cdot(-1)} = 25$m.

Για $x = 25$, η (1) $\Rightarrow y = \frac{1}{3}(200 - 4.25) = \frac{100}{3}$m