

7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 198

Α' Ομάδας

1.

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.

Λύση

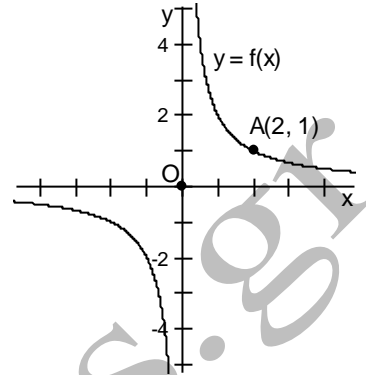
Επειδή είναι υπερβολή που ανήκει στα $1^{\circ} - 3^{\circ}$ τεταρτημόριο, θα έχει εξίσωση της μορφής

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad \alpha > 0.$$

Αφού διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$,

θα επαληθεύεται από αυτό : $1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2.$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{2}{x}$$



2.

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

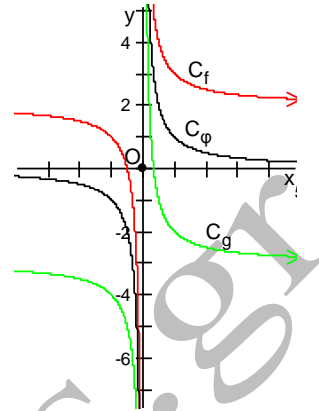
i) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

ii) $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και $q(x) = -\frac{1}{x} + 3$

Λύση

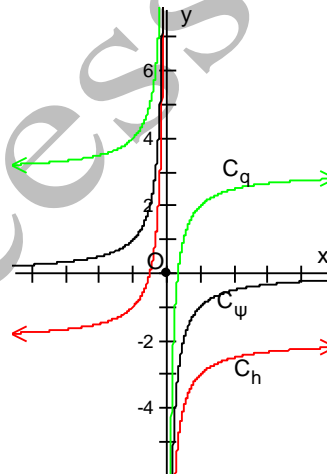
i)

- Η C_φ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_f προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.
- Η C_g προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



ii)

- Η C_ψ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_h προκύπτει από τη μετατόπιση της C_ψ κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.
- Η C_q προκύπτει από τη μετατόπιση της C_ψ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



3.

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

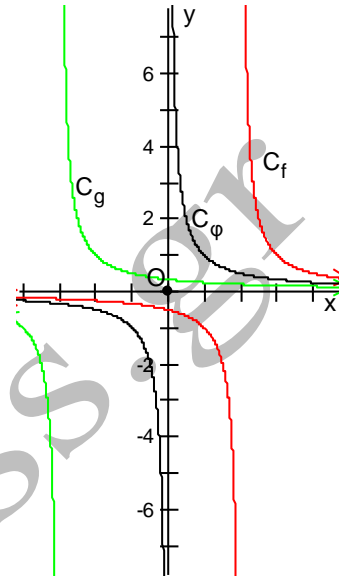
i) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x+3}$

ii) $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{x-2}$ και $q(x) = -\frac{1}{x+3}$

Λύση

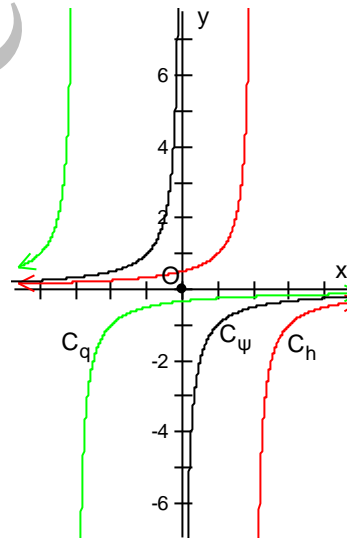
i)

- Η C_φ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_f προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.
- Η C_g προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.



ii)

- Η C_ψ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_h προκύπτει από τη μετατόπιση της C_ψ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.
- Η C_q προκύπτει από τη μετατόπιση της C_ψ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.



4.

- i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις

$$\frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > 1$$

- ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

Λύση

i)

Το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων είναι το $A(1, 1)$.

Από τυχαίο σημείο $M(x)$ του άξονα $x'x$, φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία, που τέμνει τη C_g στο K και τη C_f στο Λ .

Τότε είναι $(MK) = g(x)$ και $(M\Lambda) = f(x)$.

Η ανίσωση $\frac{1}{x} \leq 1$ γράφεται

$$f(x) \leq g(x)$$

$$(M\Lambda) \leq (MK) \quad (1)$$

Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει η (1) είναι $x < 0$ ή $x \geq 1$.

Ομοίως, οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$\frac{1}{x} > 1$ δηλαδή $(M\Lambda) > (MK)$, είναι $0 < x < 1$

ii)

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0$$

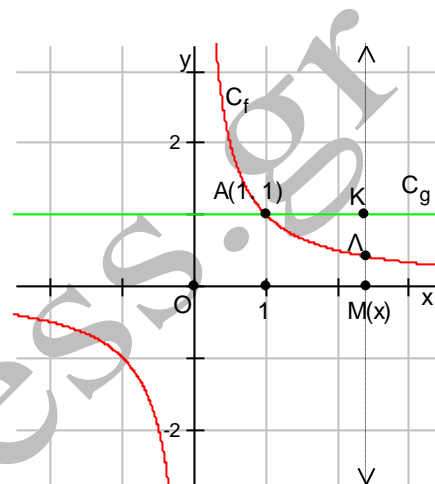
$$\frac{1-x}{x} \leq 0$$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x(1-x) \leq 0$$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x - x^2 \leq 0 \quad (\text{o } x \text{ εκτός των ριζών})$$

$$x < 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1$$

Ομοίως, $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$



5.

i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > x^2$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

Λύση

i)

Το σημεία τομής των δύο συναρτήσεων είναι το $A(1, 1)$.

Από τυχαίο σημείο $M(x)$ του άξονα $x'x$, φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία, που τέμνει τη C_g στο K και τη C_f στο Λ .

Τότε είναι $(MK) = g(x)$ και $(M\Lambda) = f(x)$.

Η ανίσωση $\frac{1}{x} \leq x^2$ γράφεται

$$f(x) \leq g(x)$$

$$(M\Lambda) \leq (MK) \quad \mathbf{(1)}$$

Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει η (1) είναι $x < 0$ ή $x \geq 1$.

Ομοίως, οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$\frac{1}{x} > 1$ δηλαδή $(M\Lambda) > (MK)$, είναι $0 < x < 1$

ii)

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \leq 0$$

$$\frac{1-x^3}{x} \leq 0$$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x(1-x^3) \leq 0$$

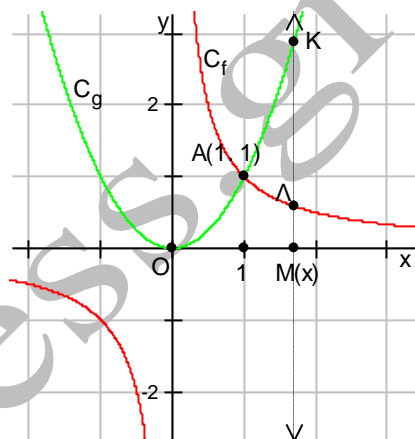
$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x(1-x)(1+x+x^2) \leq 0 \quad \mathbf{(1)}$$

Είναι $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα $1 + x + x^2 > 0$

Οπότε, (1) $\Leftrightarrow x \neq 0$ και $x(1-x) \leq 0$

$$x < 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1$$

Ομοίως, $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$



6.

Οι κάθετες πλευρές AB και AG ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της AG συναρτήσει του μήκους x της AB και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

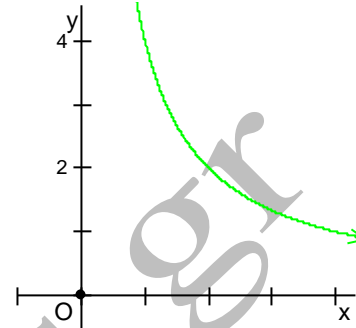
Λύση

$$\text{Είναι } E = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy = 2$$

$$xy = 4$$

$$y = \frac{4}{x} \quad \text{με } x, y > 0$$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $y = f(x) = \frac{4}{x}$ με $x > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι ο κλάδος του 1^{ου} τεταρτημορίου της υπερβολής $f(x) = \frac{4}{x}$



netsuccess.gr