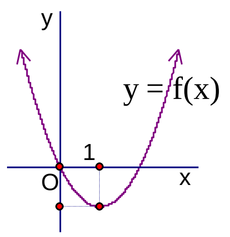
6.5 ΜΟΝΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΊΕΣ

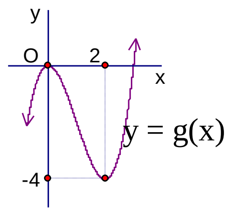
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 183 – 184

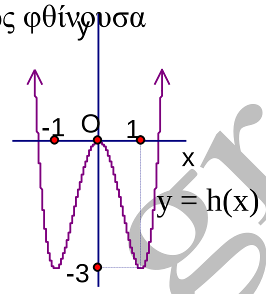
Α΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι :
α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα







Λύση

Το πεδίο ορισμού και των τριών συναρτήσεων είναι το $\mathbb{R}$.

- f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γν.αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- g γν.αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γν. φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$
- h γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, γν. αύξουσα στο $[-1, 0]$, γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

2.

Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

Λύση

Το πεδίο ορισμού και των τριών συναρτήσεων είναι το $\mathbb{R}$.

- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και είναι $\min f(x) = f(1) = -1$
- Η g δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα
- Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ και είναι $\min f(x) = f(-1) = f(1) = -3$

3.

Να δείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6.3 + 10$$

$$x^2 - 6x + 10 \geq 9 - 18 + 10$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

ii)

$D_g = \mathbb{R}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2.1}{1^2+1}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$$

$$2x \leq x^2 + 1$$

$$0 \leq x^2 - 2x + 1$$

$$0 \leq (x-1)^2 \quad \text{που ισχύει}$$

4.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ **ii)** $f_2(x) = 3|x| + 1$ **iii)** $f_3(x) = |x+1|$

iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ **v)** $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ **vi)** $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού των δοσμένων συναρτήσεων, εκτός της f_5, είναι το $\mathbb{R}$.
Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει και $-x \in \mathbb{R}$.

i)

$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x)$ άρα f_1 άρτια

ii)

$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x)$ άρα f_2 άρτια

iii)

Είναι $f_3(-1) = |-1+1| = 0$ και $\pm f_3(1) = \pm|1+1| = \pm 2$

Άρα $f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$, άρα f_3 ούτε άρτια ούτε περιττή

iv)

$$
\begin{aligned}
f_4(-x) &= (-x)^3 - 3(-x)^5 \\
&= -x^3 - 3(-x^5) \\
&= -x^3 + 3x^5 \\
&= -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)
\end{aligned}
$$
άρα f_4 περιττή

v)

Πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
Για κάθε $x \in A$ δεν ισχύει και $-x \in A$, αφού $1 \in A$ και $-1 \notin A$.
Άρα f_5 ούτε άρτια ούτε περιττή.

vi)

$f_6(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{2x}{x^2+1} = -f_6(x)$, άρα f_6 περιττή.

5.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

i) $f_1(x) = \dfrac{1}{|x|}$ **ii)** $f_2(x) = \sqrt{x-2}$ **iii)** $f_3(x) = |x-1| - |x+1|$

iv) $f_4(x) = \dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1}$ **v)** $f_5(x) = \sqrt{|x|}$ **vi)** $f_6(x) = \sqrt{1-x^2}$

Λύση

i)

Πεδίο ορισμού $A_1 = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$

Άρα για κάθε $x \in A_1$ ισχύει και $-x \in A_1$

$f_1(-x) = \dfrac{1}{|-x|} = \dfrac{1}{|x|} = f_1(x)$ οπότε f_1 άρτια

ii)

Πρέπει $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, επομένως $A_2 = [2,\ +\infty)$

Επειδή το A_2 δεν είναι συμμετρικό ως προς την αρχή O, η f_2 δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή

iii)

$A_3 = \mathbb{R}$ και βέβαια συμμετρικό ως προς την αρχή O.

$$\begin{aligned} f_3(-x) &= |-x-1| - |-x+1| \\ &= |-(x+1)| - |-(x-1)| \\ &= |x+1| - |x-1| \\ &= -\,(|x-1| - |x+1|) = -\,f_3(x) \end{aligned}$$

Άρα f_3 περιττή.

iv)

Πεδίο ορισμού $A_4 = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$

Άρα για κάθε $x \in A_4$ ισχύει και $-x \in A_4$

$f_4(-x) = \dfrac{-x+\frac{1}{-x}}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1} = -\,f_4(x)$ Άρα f_4 περιττή

v)

$A_5 = \mathbb{R}$ και βέβαια συμμετρικό ως προς την αρχή O.

$f_5(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f_5(x)$ Οπότε f_5 άρτια

vi)

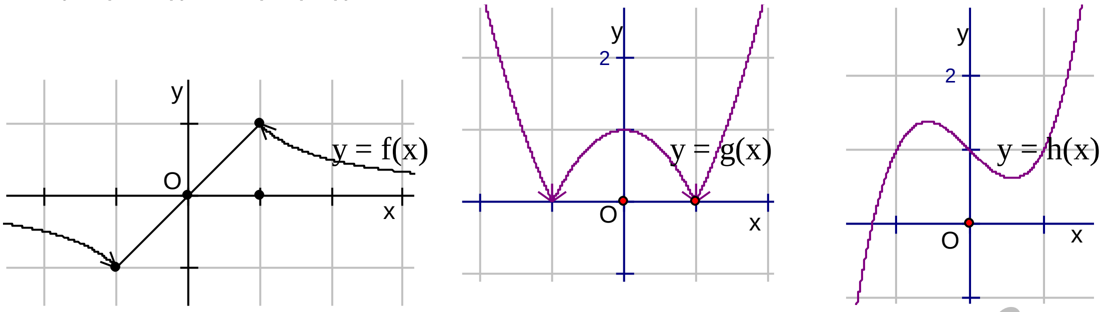
Πρέπει $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$,

άρα $A_6 = [-1,\ 1]$ συμμετρικό ως προς την αρχή O

$f_6(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f_6(x)$ Οπότε f_6 άρτια

6.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

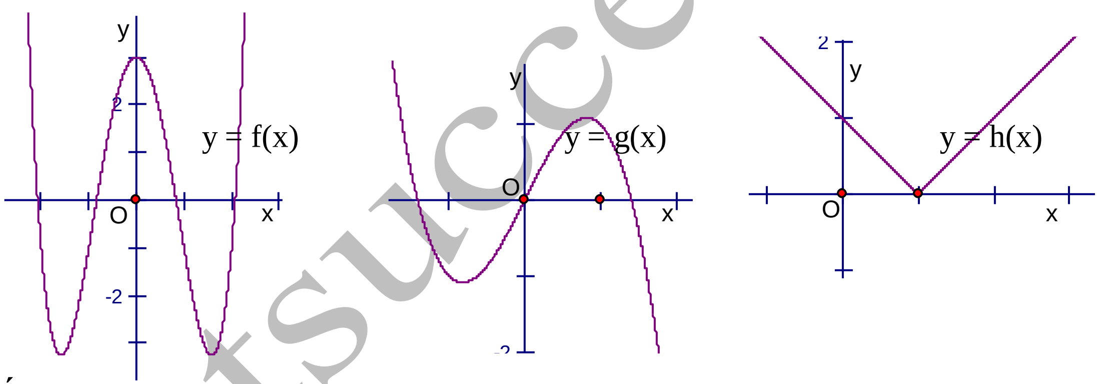


Λύση

- Η f είναι συμμετρική ως προς κέντρο Ο, άρα είναι περιττή.
- Η g είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, άρα είναι άρτια
- Η h δεν είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$ ούτε ως προς κέντρο την αρχή Ο, άρα δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

7.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



Λύση

- Η f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, άρα είναι άρτια
- Η g είναι συμμετρική ως προς κέντρο το Ο, άρα είναι περιττή.
- Η h δεν είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$ ούτε ως προς κέντρο την αρχή Ο, άρα δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

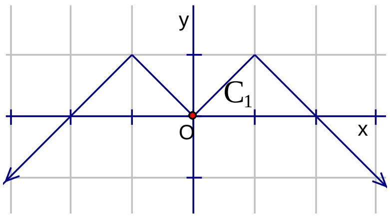
8.

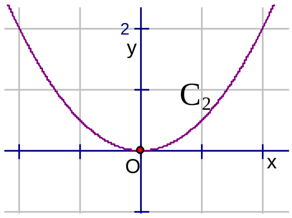
Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

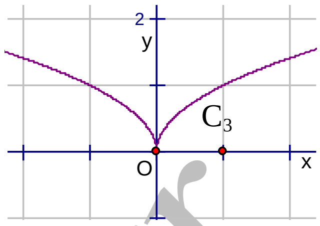
α) Άρτιας συνάρτησης και **β)** Περιττής συνάρτησης

Λύση

α)







β)