

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 157 – 158

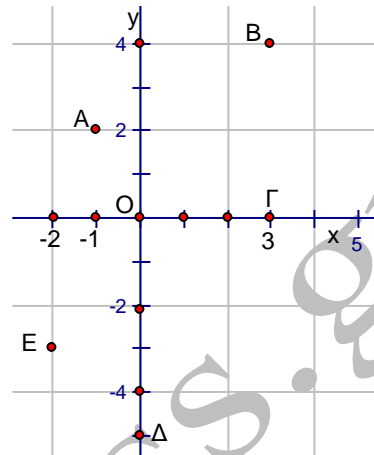
Α' Ομάδας

1.

Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία :

$A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $O(0, 0)$, $\Gamma(3, 0)$,
 $\Delta(0, -5)$ και $E(-2, -3)$

Απάντηση



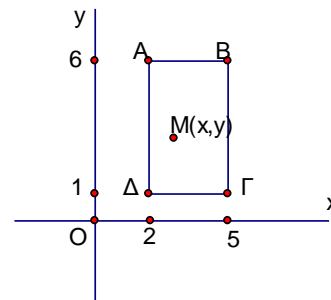
2.

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται μέσα στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος.

Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y ;

Απάντηση

$2 < x < 5$ και $1 < y < 6$



3.

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1, 3)$,

i) ως προς τον άξονα x'

ii) ως προς τον άξονα $y'y$

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή O των αξόνων.

Απάντηση

i) $A_1(-1, -3)$

ii) $A_2(1, 3)$

iii) $A_3(3, -1)$

iv) $A_4(1, -3)$

4.

Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων :

i) $O(0, 0)$ και $A(4, -2)$ **ii)** $A(-1, 1)$ και $B(3, 4)$

iii) $A(-3, -1)$ και $B(1, -1)$ **iv)** $A(1, -1)$ και $B(1, 4)$

Λύση

i)

$$(OA) = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ii)

$$(AB) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

iii)

$$(AB) = \sqrt{(1+3)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{4^2+0^2} = 4$$

iv)

$$(AB) = \sqrt{(1-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

5.

Να δείξετε ότι :

i) Τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, -2)$ και $\Gamma(-3, 5)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(4, 2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση

i)

$$(AB)^2 = (4-1)^2 + (-2-2)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$(A\Gamma)^2 = (-3-1)^2 + (5-2)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\text{Άρα } (AB)^2 = (A\Gamma)^2 \Rightarrow (AB) = (A\Gamma)$$

ii)

$$(AB)^2 = (-1-1)^2 + (1-(-1))^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$(A\Gamma)^2 = (4-1)^2 + (2-(-1))^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$

$$(B\Gamma)^2 = (4-(-1))^2 + (2-1)^2 = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26$$

$$\text{Επομένως } (AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 8 + 18 = 26 = (B\Gamma)^2 \Rightarrow$$

το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A .

6.

Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία :

$$A(2, 5), \quad B(5, 1), \quad \Gamma(2, -3), \quad \Delta(-1, 1)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

Λύση

$$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

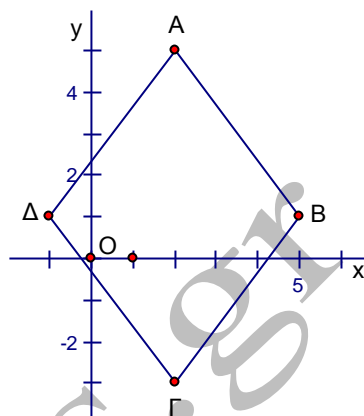
$$(B\Gamma) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(\Gamma\Delta) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(\Delta A) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\text{Άρα } (AB) = (B\Gamma) = (\Gamma\Delta) = (\Delta A) \Rightarrow$$

ΑΒΓΔ ρόμβος

**7.**

Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x) = x^2 + k$, $M(2, 6)$

ii) $g(x) = kx^3$, $M(-2, 8)$

iii) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, $M(3, 8)$

Λύση**i)**

$$f(2) = 6 \Leftrightarrow 2^2 + k = 6 \Leftrightarrow 4 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2$$

ii)

$$g(-2) = 8 \Leftrightarrow k(-2)^3 = 8 \Leftrightarrow -8k = 8 \Leftrightarrow k = -1$$

iii)

$$h(3) = 8 \Leftrightarrow k\sqrt{3+1} = 8 \Leftrightarrow 2k = 8 \Leftrightarrow k = 4$$

8.

Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x) = x - 4$

ii) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$

iii) $h(x) = (x - 1)^2$

iv) $q(x) = x^2 + x + 1$

v) $\varphi(x) = x\sqrt{x-1}$

vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2-4}$

Λύση**i)**

$$D_f = \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0) = 0 - 4 = -4$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -4)$

Για $f(x)=0$ έχουμε $x - 4 = 0 \Rightarrow$

$$x = 4$$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(4, 0)$

ii)

$$D_g = \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε $g(0) = (0 - 2)(0 - 3) = 6$

άρα η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 6)$

Για $g(x)=0$ έχουμε $(x - 2)(x - 3) = 0$

$$x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

άρα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(2, 0)$ και $(3, 0)$

iii)

$$D_h = \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε $h(0) = (0 - 1)^2 = 1$

άρα η C_h τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$

Για $h(x)=0$ έχουμε $(x - 1)^2 = 0$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$

iv)

$$D_q = \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε $q(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$

άρα η C_q τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$

Για $q(x)=0$ έχουμε $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

άρα η C_q δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$

v)

Πρέπει $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα $D_\varphi = [1, +\infty)$

Ο x δε μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, άρα η C_φ δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$

Για $\varphi(x) = 0$ έχουμε $x\sqrt{x-1} = 0$

$$\sqrt{x-1} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

άρα η C_φ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$

vi)

Πρέπει $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$

Άρα $D_\psi = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Ο x δε μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, άρα η C_ψ δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$

Για $\psi(x) = 0$ έχουμε $x\sqrt{x^2 - 4} = 0$

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

άρα η C_ψ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(2,0)$ και $(-2,0)$

9.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε :

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

i)

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$

$$\text{Για } f(x)=0 \text{ έχουμε } x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -1$$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$

ii)

$$\text{Πρέπει } f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > 1$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

10.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$. Να βρείτε :

i) Τα κοινά σημεία των C_f , C_g

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη C_g

Λύση

$$D_f = \mathbb{R} \text{ και } D_g = \mathbb{R}$$

i)

$$\text{Πρέπει } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 5$$

$$f(2) = g(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \text{ και } f(5) = g(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$$

Τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι $(2, -2)$ $(5, 4)$

ii)

$$\text{Πρέπει } f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 2x - 6$$

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$2 < x < 5$$