5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 136 - 140

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 3, 6, 12, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{6}{3} = 2$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 3.\ 2^{\nu-1}$

1.ii)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρικής προόδου $\frac{2}{3}$, 2, 6, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = \frac{2}{3}\,3^{\nu-1} = 2.3^{\nu-2}$

1.iii)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 9, 27, 81, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{27}{9} = 3$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 9.3^{\nu-1} = 3^2 . 3^{\nu-1} = 3^{\nu+1}$

1.iv)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρικής προόδου $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4} . \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}$

1.v)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 16, 8, 4, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 16.\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4\,\frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{2^{\nu-5}}$

1.vi)
Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 18, 6, 2, . . .
Λύση

Είναι $\lambda = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 18.\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2.\ 3^2\ \frac{1}{3^{\nu-1}} = \frac{2}{3^{\nu-3}}$

1.vii)
Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 1, 0,4, 0,16, . . .
Λύση

Είναι $\lambda = \frac{0,4}{1} = 0{,}4$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 1.(0,4)^{\nu-1} = (0,4)^{\nu-1}$

1.viii)
Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου –2, 4, – 8, . . .
Λύση

Είναι $\lambda = \frac{4}{-2} = -2$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = -2.(-2)^{\nu-1} = (-2)^\nu$

1.ix)
Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρικής προόδου –3, 9, – 27, . . .
Λύση

Είναι $\lambda = \frac{9}{-3} = -3$ και $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = -3.(-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$

2.i)

Να βρείτε τον α_9 της γεωμετρικής προόδου $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$ και $\alpha_9 = \alpha_1 . \lambda^{9-1} = \frac{1}{4}\ 2^8 = \frac{1}{2^2}\ 2^8 = 2^6$

2.ii)
Να βρείτε τον α_7 της γεωμετρικής προόδου, 2, 6, 18, . . .
Λύση

Είναι $\lambda = \frac{6}{2} = 3$ και $\alpha_7 = \alpha_1 . \lambda^{7-1} = 2\ 3^6$

2.iii)

Να βρείτε τον α_8 της γεωμετρικής προόδου, 729, 243, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{243}{729} = \frac{1}{3}$ και $\alpha_8 = \alpha_1 . \lambda^{8-1} = 729.\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 3^6 . \frac{1}{3^7} = \frac{1}{3}$

2.iv)

Να βρείτε τον α_{10} της γεωμετρικής προόδου, 1, –2, 4, . . .

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{-2}{1} = -2$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 . \lambda^{10-1} = 1.(-2)^9 = -2^9$

2.v)

Να βρείτε τον α_9 της γεωμετρικής προόδου, $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, . . .$

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{4.27}{8.9} = \frac{3}{2}$ και $\alpha_9 = \alpha_1 . \lambda^{9-1} = \frac{8}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{2^3}{3^3}\,\frac{3^8}{2^8} = \frac{3^5}{2^5}$

3.i)

Να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $5^{ος}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

Λύση

$\alpha_5 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \alpha_1\, \lambda^{5-1} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \alpha_1\, 2^4 = \frac{2^5}{3} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3}$

3.ii)

Να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $4^{ος}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$.

Λύση

$$\alpha_4 = \frac{27}{128} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{4-1} = \frac{27}{128}$$

$$\alpha_1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{128}$$

$$\alpha_1 . \frac{3^3}{4^3} = \frac{3^3}{2^7}$$

$$\alpha_1 . \frac{3^3}{2^6} = \frac{3^3}{2^7} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

4.i)

Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $3^{ος}$ όρος είναι 12 και ο $6^{ος}$ όρος είναι 96.

Λύση

$$\alpha_3 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{3-1} = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 = 12 \quad \textbf{(1)}$$

$$\alpha_6 = 96 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{6-1} = 96 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^5 = 96 \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \lambda^3 = 8 \Rightarrow \lambda = 2$$

4.ii)

Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $2^{ος}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{ος}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$.

Λύση

$$\alpha_2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{2-1} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda = \frac{8}{3} \quad \textbf{(1)}$$

$$\alpha_5 = \frac{64}{81} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{5-1} = \frac{64}{81} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^4 = \frac{64}{81} \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \lambda^3 = \frac{\frac{64}{81}}{\frac{8}{3}} = \frac{3.64}{8.81} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

5.i)

Να βρείτε τον α_{14} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

Λύση

$$\alpha_4 = 125 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \lambda^{4-1} = 125 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \lambda^3 = 125 \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\alpha_{10} = \frac{125}{64} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \lambda^{10-1} = \frac{125}{64} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \lambda^9 = \frac{125}{64} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \lambda^6 = \frac{\frac{125}{64}}{125} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad ή \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

α) Για $\lambda = \frac{1}{2}$, η (1) $\Rightarrow$ $\alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 125$

$$\frac{1}{8}\alpha_1 = 125$$

$$\alpha_1 = 8.\ 125 = 1000$$

Οπότε $\alpha_{14} = \alpha_1 \lambda^{14-1} = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$

β) Για $\lambda = -\frac{1}{2}$, η (1) $\Rightarrow$ $\alpha_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 125$

$$-\frac{1}{8}\alpha_1 = 125$$

$$\alpha_1 = -\ 8.\ 125 = -\ 1000$$

Οπότε $\alpha_{14} = \alpha_1 \lambda^{14-1} = -1000\left(-\frac{1}{2}\right)^{13} = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$

5.ii)

Να βρείτε τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$

Λύση

$\alpha_{13} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{13-1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{12} = \sqrt{2}$ **(1)**

$\alpha_{23} = 32\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{23-1} = 32\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{22} = 32\sqrt{2}$ **(2)**

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \lambda^{10} = 32 = 2^5 = \left(\sqrt{2}\right)^{10} \Rightarrow \lambda = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad \lambda = -\sqrt{2}$$

α) Για $\lambda = \sqrt{2}$ η (1) $\Rightarrow$ $\alpha_1 \left(\sqrt{2}\right)^{12} = \sqrt{2}$

$\alpha_1 2^6 = \sqrt{2}$

$\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6}$

Άρα $\alpha_{21} = \alpha_1 \lambda^{21-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6} \left(\sqrt{2}\right)^{20} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6} 2^{10} = \sqrt{2}\; 2^4 = 16\sqrt{2}$

β) Για $\lambda = -\sqrt{2}$ η (1) $\Rightarrow$ $\alpha_1 \left(-\sqrt{2}\right)^{12} = \sqrt{2}$

$\alpha_1 2^6 = \sqrt{2}$

$\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6}$

Άρα $\alpha_{21} = \alpha_1 \lambda^{21-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6} \left(-\sqrt{2}\right)^{20} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6} 2^{10} = \sqrt{2}\; 2^4 = 16\sqrt{2}$

6.

Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, . . . Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768

Λύση

Είναι $\lambda = \dfrac{6}{3} = 2$

$\alpha_\nu = 768 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 768$

$3 \,.\, 2^{\nu-1} = 768$

$2^{\nu-1} = 256$

$2^{\nu-1} = 2^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$

7.i)

Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16, . . ., που υπερβαίνει το 2000.

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{8}{4} = 2$

$\alpha_\nu > 2000 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1\lambda^{\nu-1} > 2000$

$4 \,.\, 2^{\nu-1} > 2000$

$2^{\nu-1} > 500$

Επειδή όμως $2^8 = 256$ και $2^9 = 512$, θα έχουμε $\nu - 1 = 9 \Rightarrow \nu = 10$

άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{10}

7.ii)

Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32, . . ., που είναι μικρότερος του 0, 25

Λύση

Είναι $\lambda = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$\alpha_\nu < 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1\lambda^{\nu-1} < 0{,}25$

$128\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} < \frac{1}{4}$

$2^7 \frac{1}{2^{\nu-1}} < \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{2^{\nu-1}} < \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^7}$

$\frac{1}{2^{\nu-1}} < \frac{1}{2^9}$

$2^{\nu-1} > 2^9 \quad \Leftrightarrow \quad \nu - 1 > 9 \quad \Leftrightarrow \quad \nu > 10$ άρα $\nu = 11$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{11}

8.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση

i)

Γεωμετρικός μέσος των 5 και 20 $= \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10$

Γεωμετρικός μέσος των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$ $= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}} = \sqrt{1} = 1$

ii)

Θα πρέπει $(x+1)^2 = (x-4)\,x-19) \iff x^2+2x+1 = x^2-19x-4x+76$

$25x = 75$

$x = 3$

9.i)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου $1,\ 2,\ 4,\ \ldots$

Λύση

$$\lambda = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{και} \quad S_{10} = \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1.\frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10}-1$$

9.ii)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου $3,\ 9,\ 27,\ \ldots$

Λύση

$$\lambda = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{και} \quad S_{10} = \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 3.\frac{2^{10}-1}{3-1} = 3.\frac{2^{10}-1}{2}$$

9.iii)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου $-4,\ 8,\ -16,\ \ldots$

Λύση

$$\lambda = \frac{8}{-4} = -2 \quad \text{και}$$

$$S_{10} = \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = -4.\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = -4.\frac{2^{10}-1}{-3} = 4\,\frac{2^{10}-1}{3}$$

10.i)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 8 + 32 + \ldots + 8192$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με

$\alpha_1 = 2, \quad \lambda = \frac{8}{2} = 4 \neq 1 \quad$ και $\quad \alpha_\nu = 8192 \iff \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 8192$

$$2 .\ 4^{\nu-1} = 2^{13}$$

$$2^1 .\ 2^{2(\nu-1)} = 2^{13}$$

$$2^{1+2\nu-2} = 2^{13}$$

$$2^{2\nu-1} = 2^{13}$$

$$2\nu - 1 = 13 \iff \nu = 7$$

Άρα $\quad S_7 = \alpha_1 \frac{\lambda^7 - 1}{\lambda - 1} = 2 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1}$

$$= 2 \cdot \frac{16384 - 1}{3}$$

$$= 2 \cdot \frac{16383}{3} = 2 \cdot 5461 = 10922$$

10.ii)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $4 + 2 + 1 + \ldots + \dfrac{1}{512}$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με

$$\alpha_1 = 4, \quad \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = \frac{1}{512} \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{512}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^9}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{4 \cdot 2^9}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^9}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

$$\nu - 1 = 11 \Leftrightarrow \nu = 12$$

Άρα $$S_{12} = \alpha_1 \frac{\lambda^{12} - 1}{\lambda - 1} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1-4096}{4096}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{-4095}{4096}}{-\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{8190}{4096} = \frac{8190}{1024}$$

10.iii)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $1 + (-2) + 4 + \ . \ . \ . + 256$

Λύση

Οι προσθετέοι του αθροίσματος αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με

$\alpha_1 = 1, \quad \lambda = \dfrac{-2}{1} = -2 \neq 1 \quad$ και $\quad \alpha_\nu = 256 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 (-2)^{\nu-1} = 256$

$$1 . (-2)^{\nu-1} = (-2)^8$$

$$\nu - 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = 9$$

Άρα $\quad S_9 = \alpha_1 \dfrac{\lambda^9 - 1}{\lambda - 1} = 1 . \dfrac{(-2)^9}{-2-1} = \dfrac{-2^9}{-3} = \dfrac{2^9}{3}$

11.

Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες ;

Λύση

Έστω α_ν ο αριθμός των βακτηριδίων σε ν ώρες, Τότε $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$.

Άρα πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_0 = 3$ και $\lambda = 2$. και πλήθος όρων $\nu = 13$ $(\alpha_0, \ \alpha_1, \ . \ . \ . \ . \ , \alpha_{12})$

$\alpha_{13} = \alpha_0 \lambda^{13-1} = 3 . 2^{12}$

12.

Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\dfrac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4^η αναπήδηση.

Λύση

Έστω α_ν το ύψος, στο οποίο φθάνει η μπάλα ση ν-οστή αναπήδηση.

Τότε $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{3}\alpha_\nu$.

Άρα πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = \dfrac{1}{3} 60 = 20$ και $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

$\alpha_4 = \alpha_1 \lambda^{4-1} = 20. \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = 20 . \dfrac{1}{27} = \dfrac{20}{27}$ m.

Β΄ Ομάδας

1.

Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \dfrac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

Λύση

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}\dfrac{1}{3^{\nu+2}}}{2^\nu \dfrac{1}{3^{\nu+1}}} = \frac{2^{\nu+1}\ 3^{\nu+1}}{2^\nu\ 3^{\nu+2}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{2}{3}\alpha_\nu$$

Άρα πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο με

$$\alpha_1 = 2^1 \frac{1}{3^{1+1}} = 2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9} \quad \text{και } \lambda = \frac{2}{3}$$

2.

Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

Λύση

Περιορισμοί: $\nu - 5 \geq 0$ και $10\nu + 4 \geq 0$ και $\nu + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\nu \geq 5 \quad \text{και} \quad \nu \geq -\frac{4}{10} \quad \text{και} \quad \nu \geq -2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\nu \geq 5$$

Οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γ.προόδου $\Leftrightarrow$

$$(\sqrt[4]{10\nu+4})^2 = \sqrt{\nu-5}\ \sqrt{\nu+2}$$

$$\sqrt{10\nu+4} = \sqrt{\nu-5}\ \sqrt{\nu+2}$$

$$10\nu + 4 = (\nu-5)(\nu+2)$$

$$10\nu + 4 = \nu^2 + 2\nu - 5\nu - 10$$

$$\nu^2 - 13\nu - 14 = 0$$

$\Delta = 169 + 56 = 225$, $\quad \nu = \dfrac{13 \pm \sqrt{225}}{2} = \dfrac{13 \pm 15}{2} = 14$ ή -1 απορρίπτεται

3.

Να δείξετε ότι :

i) Τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο.

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση

Η απάντηση στο ii) καλύπτει και το i)

Έστω η γεωμετρική πρόοδος $\alpha_1, \ \alpha_2, \ . \ . \ .$

Τότε $\alpha_{\nu+1} = \lambda \ \alpha_\nu$, όπου λ ο λόγος της προόδου $\Rightarrow$

$\alpha_{\nu+1}^k = \lambda^k \alpha_\nu^k$ που σημαίνει ότι οι $\alpha_1^k, \ \alpha_2^k, \ . \ . \ .$ αποτελούν γ.πρόοδο με λόγο λ^k

4.

Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

Λύση

$$\alpha_1+\alpha_2 = 3+\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_1\lambda = 3+\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha_1(1+\lambda) = 3+\sqrt{3} \quad \textbf{(1)}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 4(3+\sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha_3+\alpha_4 = 3(3+\sqrt{3})$$

$$\alpha_1\lambda^2+\alpha_1\lambda^3 = 3(3+\sqrt{3})$$

$$\alpha_1\lambda^2(1+\lambda) = 3(3+\sqrt{3}) \quad \textbf{(2)}$$

Για $1+\lambda=0$, δηλαδή για $\lambda=-1$, η εξίσωση (2) είναι αδύνατη

Για $1+\lambda\neq 0$, δηλαδή για $\lambda\neq -1$, έχουμε

$$\frac{(5)}{(4)} \Rightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda=\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \lambda=-\sqrt{3}$$

α) Για $\lambda=\sqrt{3}$, η εξίσωση (4) $\Leftrightarrow$ $\alpha_1(1+\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}$

$$\alpha_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

β) Για $\lambda=-\sqrt{3}$, η εξίσωση (4) $\Leftrightarrow$ $\alpha_1(1-\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}$

$$\alpha_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{1-3}$$

$$= \frac{6+4\sqrt{3}}{-2} = -3-2\sqrt{3}$$

5.

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 34$ και $\alpha_3 + \alpha_7 = 68$.

Λύση

$\alpha_2 + \alpha_6 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^5 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda(1+\lambda^4) = 34$ **(1)**

$\alpha_3 + \alpha_7 = 68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^6 = 68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2(1+\lambda^4) = 68$ **(2)**

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \lambda = 2$

$(1) \Leftrightarrow \alpha_1 2(1+2^4) = 34 \Leftrightarrow 2\alpha_1 . 17 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$

$$S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1.\frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10}-1$$

6.

Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2% .
Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια , να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και τον γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν) .
Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια;
[Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης]

Λύση

Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια , τότε

μετά από $\nu+1$ χρόνια θα είναι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{2}{100}\cdot\alpha_\nu = 1{,}02\cdot\alpha_\nu$

Οπότε η ακολουθία θα έχει αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02\cdot\alpha_\nu$

Μετά τον πρώτο χρόνο ο πληθυσμός θα είναι $\alpha_1 = 90 + 90\cdot\frac{2}{100} = 90\cdot1{,}02$ εκ/ρια

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 90\cdot1{,}02$ και λόγο $\lambda = 1{,}02$

Ο γενικός όρος της προόδου θα είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 90\cdot1{,}02\cdot1{,}02^{\nu-1} = 90\cdot1{,}02^\nu$

Μετά από 10 χρόνια ο πληθυσμός θα είναι $\alpha_{10} = 90\cdot1{,}02^{10} \approx 90\cdot1{,}22$ εκ/ρια

7.

Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10% όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο.

Αν $I_ν$ είναι η ένταση του φωτός αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς επίσης και τον γενικό όρο της ακολουθίας $I_ν$

Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o ; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης]

Λύση

Από τις υποθέσεις συμπεραίνουμε ότι $I_{ν+1} = I_ν - \frac{10}{100} I_ν = \left(1 - \frac{1}{10}\right) I_ν = 0{,}9\, I_ν$

Επίσης $I_1 = 0{,}9\, I_o$

Άρα η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $I_1 = 0{,}9\, I_o$ και λόγο $λ = 0{,}9$

Ο γενικός όρος της προόδου είναι $I_ν = I_1 \cdot λ^{ν-1} = 0{,}9 I_o \cdot 0{,}9^{ν-1} = I_o\, 0{,}9^ν$

Αφού το φως διέλθει μέσα από 10 φίλτρα, η ένταση του θα είναι

$I_{10} = I_o \cdot 0{,}90^{10} \approx 0{,}35\, I_o$

8.

Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C΄ έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C΄΄ έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C΄ και C΄΄ υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C΄ και C΄΄ 13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε

i) το λόγο της προόδου

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

Λύση

i)

Οι τόνοι C΄ και C΄΄ μαζί με τους 11 ενδιάμεσους σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με πρώτον όρο $α_1 = 261$ και τελευταίο όρο $α_{13} = 2 \cdot 261 = 522$

Αν λ είναι ο λόγος της προόδου τότε $α_{13} = α_1 λ^{12}$

$522 = 261\, λ^{12}$

$λ^{12} = 2$

$λ = \sqrt[12]{2}$ (λ > 0 διότι δεν υπάρχει αρνητική συχνότητα)

ii)

Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι $α_5 = α_1 λ^4 = 261 \sqrt[12]{2^5}$

9.

Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ . Αν $D_ν$ είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές , να βρείτε :

i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας $D_ν$

ii) Την ποσότητα του ανιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης]

Λύση

i)

Από τις υποθέσεις συμπεραίνουμε ότι $D_{ν+1} = D_ν - \frac{4}{40} D_ν = 0,9\, D_ν$

Επίσης $D_1 = 40 - 4 = 36$

Επομένως η ακολουθία $D_ν$ είναι γεωμετρική πρόοδος με

$D_1 = 36$, λόγο $λ = 0,9$ και γενικό όρο $D_ν = D_1 \cdot λ^{ν-1} = 36 \cdot 0,9^{ν-1}$

ii)

Αν εφαρμοστεί η διαδικασία 7 φορές, τότε το νερό μέσα στο ψυγείο θα είναι

$D_7 = 36 \cdot 0,9^{7-1} = 36 \cdot 0,9^6 = 19,13$ lt

Άρα το αντιπυκτικό θα είναι $40 - 19,13 = 20,87$ lt .

10.

Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για την σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής : Στο 1^o τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2^o τετραγωνάκι 2 κόκκους στο 3^o τετραγωνάκι 4 κόκκους , στο 5^o τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.
Να βρείτε πόσοι τόνοι ρυζιού θα ήταν η ποσότητα αυτή αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

Λύση

Το πλήθος των κόκκων είναι ίσο με το άθροισμα των 64 πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$

$$S_{64} = \frac{\alpha_1(\lambda^{64} - 1)}{\lambda - 1} = 2^{64} - 1$$

Η ποσότητα αυτή σε κιλά είναι ίση με $\frac{2^{64} - 1}{20000} \approx 9{,}2 \,.\, 10^{14}$ Kg $= 9{,}2 \,.\, 10^{11}$ τόνοι .