5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 129 - 132

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 7, 10, 13, . . .

Λύση

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 7 + (\nu - 1)\,3 = 7 + 3\nu - 3 = 3\nu + 4$

1.ii)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 11, 13, 15, . . .

Λύση

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 11 + (\nu - 1)\,2 = 11 + 2\nu - 2 = 2\nu + 9$

1.iii)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 5, 2, –1, . . .

Λύση

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 5 + (\nu - 1)\,(-3) = 5 - 3\nu + 3 = -3\nu + 8$

1.iv)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου $2, \frac{5}{2}, 3, \ldots$

Λύση

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 2 + (\nu - 1)\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

1.v)

Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου – 6, –9, –12, . . .

Λύση

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = -6 + (\nu - 1)\,(-3) = -6 - 3\nu + 3 = -3\nu - 3$

2.i)

Να βρείτε τον α_{15} της αριθμητικής προόδου –2, 3, 8, . . .

Λύση

$\alpha_{15} = \alpha_1 + (15 - 1)\,\omega = -2 + 14.\,5 = -2 + 70 = 68$

netsuccess.gr

2.ii)

Να βρείτε τον α_{20} της αριθμητικής προόδου 11, 18, 25, . . .

Λύση

$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20 - 1)\,\omega = 11 + 19.\,7 = 11 + 133 = 144$

2.iii)

Να βρείτε τον α_{30} της αριθμητικής προόδου 4, 15, 26, . . .

Λύση

$\alpha_{30} = \alpha_1 + (30 - 1)\,\omega = 4 + 29.\,11 = 4 + 319 = 323$

2.iv)

Να βρείτε τον α_{35} της αριθμητικής προόδου 17, 25, 33, . . .

Λύση

$\alpha_{35} = \alpha_1 + (35 - 1)\,\omega = 17 + 34.\,8 = 17 + 272 = 289$

2.v)

Να βρείτε τον α_{50} της αριθμητικής προόδου $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$

Λύση

$\alpha_{50} = \alpha_1 + (50 - 1)\,\omega = 1 + 49.\,\frac{2}{3} = 1 + \frac{98}{3} = \frac{101}{3}$

2.vi)

Να βρείτε τον α_{47} της αριθμητικής προόδου $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \ldots$

Λύση

$\omega = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\alpha_{47} = \alpha_1 + (47 - 1)\,\omega = \frac{1}{2} + 46.\,\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + 23.\,\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{69}{2} = \frac{70}{2} = 35$

netsuccess.gr

3.i)

Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν είναι $\alpha_6 = 12$ και $\alpha_{10} = 16$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση

$$\begin{cases}\alpha_6=12\\ \alpha_{10}=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(6-1)\omega=12\\ \alpha_1+(10-1)\omega=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+5\omega=12\\ \alpha_1+9\omega=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=12-5\omega\\ \alpha_1+9\omega=16\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=12-5\omega\\ 12-5\omega+9\omega=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=12-5\omega\\ 4\omega=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=12-5.1\\ \omega=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=7\\ \omega=1\end{cases}$$

3.ii)

Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση

$$\begin{cases}\alpha_5=14\\ \alpha_{12}=42\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(5-1)\omega=14\\ \alpha_1+(12-1)\omega=42\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+4\omega=14\\ \alpha_1+11\omega=42\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14-4\omega\\ \alpha_1+11\omega=42\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=14-4\omega\\ 14-4\omega+11\omega=42\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14-4\omega\\ 7\omega=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14-4.4\\ \omega=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-2\\ \omega=4\end{cases}$$

3.iii)

Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση

$$\begin{cases}\alpha_3=20\\ \alpha_7=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(3-1)\omega=20\\ \alpha_1+(7-1)\omega=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\omega=20\\ \alpha_1+6\omega=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=20-2\omega\\ \alpha_1+6\omega=32\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=20-2\omega\\ 20-2\omega+6\omega=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=20-2\omega\\ 4\omega=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=20-2.3\\ \omega=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=14\\ \omega=3\end{cases}$$

netsuccess.gr

4.i)

Ο $5^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι -5 και ο $15^{ος}$ όρος της είναι -2. Να βρείτε τον $50^{ο}$ όρο της προόδου.

Λύση

$$\begin{cases}\alpha_5=-5\\ \alpha_{15}=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(5-1)\omega=-5\\ \alpha_1+(15-1)\omega=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+4\omega=-5\\ \alpha_1+14\omega=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-5-4\omega\\ \alpha_1+14\omega=-2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=-5-4\omega\\ -5-4\omega+14\omega=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-5-4\omega\\ 10\omega=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-5-4.\dfrac{3}{10}\\ \omega=\dfrac{3}{10}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=-\dfrac{50}{10}-\dfrac{12}{10}\\ \omega=\dfrac{3}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\dfrac{62}{10}\\ \omega=\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

$$\alpha_{50} = \alpha_1 + (50-1)\omega = -\frac{62}{10} + 49.\frac{3}{10} = -\frac{62}{10} + \frac{147}{10} = \frac{85}{10}$$

4.ii)

Αν σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

Λύση

$$\begin{cases}\alpha_7=55\\ \alpha_{22}=145\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(7-1)\omega=55\\ \alpha_1+(22-1)\omega=145\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+6\omega=55\\ \alpha_1+21\omega=145\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=55-6\omega\\ \alpha_1+21\omega=145\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1=55-6\omega\\ 55-6\omega+21\omega=145\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=55-6\omega\\ 15\omega=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=55-6.6\\ \omega=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=19\\ \omega=6\end{cases}$$

$$\alpha_{18} = \alpha_1 + (18-1)\,\omega = 19 + 17.\,6 = 19 + 102 = 121$$

5.i)

Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

Λύση

Έστω α_ν ο ζητούμενος όρος.

$$\alpha_\nu = 97 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega = 97$$
$$2 + (\nu-1)\,5 = 97$$
$$2 + 5\nu - 5 = 97$$
$$5\nu = 100 \Leftrightarrow \nu = 20$$

Επομένως, ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}

netsuccess.gr

5.ii)

Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;

Λύση

Έστω α_ν ο ζητούμενος όρος.

$$\alpha_\nu = -97 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = -97$$
$$80 + (\nu - 1)(-3) = -97$$
$$80 - 3\nu + 3 = -97$$
$$-3\nu = -97 - 83$$
$$-3\nu = -180 \Leftrightarrow \nu = 60$$

Επομένως, ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{60}

6.

i) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x + 1$ και 11 είναι ο $3x - 2$.

Λύση

i)

Ο αριθμητικός μέσος των 10, -40 είναι $\frac{10+(-40)}{2} = \frac{-30}{2} = -15$

ii)

$3x - 2$ αριθμητικός μέσος των $5x + 1$, 11 $\Leftrightarrow$

$$3x - 2 = \frac{5x+1+11}{2} \Leftrightarrow$$
$$6x - 4 = 5x + 12 \Leftrightarrow x = 16$$

7.

Αν δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δύο αυτούς αριθμούς.

Λύση

Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί. Θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x-y=10 \\ \frac{x+y}{2}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=10 \\ x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=60 \\ 2y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=20 \end{cases}$$

netsuccess.gr

8.i)
Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου
7, 9, 11, . . .
Λύση
Η διαφορά της προόδου είναι 2

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2 .7 + (40-1)2\right] = 20\ (14 + 78) = 20 . 92 = 1840$$

8.ii)
Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου
0, 2, 4, . . .
Λύση
Η διαφορά της προόδου είναι 2

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2 .0 + (40-1)2\right] = 20 . 78 = 1560$$

8.iii)
Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου
6, 10, 14, . . .
Λύση
Η διαφορά της προόδου είναι 4

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2 .6 + (40-1)4\right] = 20(12 + 156) = 20 . 168 = 3360$$

8.iv)
Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου
–7, –2, 3, . . .
Λύση
Η διαφορά της προόδου είναι 5

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2 .(-7) + (40-1)5\right] = 20(-14 + 195) = 20. 181 = 3620$$

9.i)
Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων της αριθμητικής προόδου
2, –1, – 4, . . .
Λύση
Η διαφορά της προόδου είναι –3.

$$S_{80} = \frac{80}{2}\left[2.2 + (80-1)(-3)\right] = 40\ (4 - 237) = 40 . (-233) = -9320$$

netsuccess.gr

9.ii)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων της αριθμητικής προόδου

$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{5}{3},\ .\ .\ .$

Λύση

Η διαφορά της προόδου είναι $\omega = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$S_{80} = \frac{80}{2}\left[2.\left(-\frac{1}{3}\right) + (80-1)\frac{2}{3}\right] = 40\left(-\frac{2}{3} + 79.\frac{2}{3}\right) = 40\left(-\frac{2}{3} + \frac{158}{3}\right) =$$

$$= 40 . \frac{156}{3} = 40 . 52 = 2080$$

10.i)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $1 + 5 + 9 + \ .\ .\ .\ + 197$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 1$ και $\omega = 5 - 1 = 4.$

Έστω $\alpha_\nu = 197 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 197$

$1 + (\nu - 1)\ 4 = 197$

$(\nu - 1)\ 4 = 197 - 1$

$(\nu - 1)\ 4 = 196$

$\nu - 1 = 49 \Leftrightarrow \nu = 50$

$$S_{50} = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{50}{2}(1 + 197) = 25 . 198 = 4950$$

10.ii)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $9 + 12 + 15 + \ .\ .\ .\ + 90$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 9$ και $\omega = 12 - 9 = 3.$

Έστω $\alpha_\nu = 90 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 90$

$9 + (\nu - 1)\ 3 = 90$

$(\nu - 1)\ 3 = 90 - 9$

$(\nu - 1)\ 3 = 81$

$\nu - 1 = 27 \Leftrightarrow \nu = 28$

$$S_{50} = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{28}{2}(9 + 90) = 14 . 99 = 1386$$

netsuccess.gr

10.iii)

Να υπολογίσετε το άθροισμα $-7-10-13-\ .\ .\ .\ -109$

Λύση

Οι όροι του αθροίσματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = -7$ και $\omega = -10-(-7) = -10+7 = -3$

Έστω $\alpha_\nu = -109 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = -109$

$$-7+(\nu-1)(-3) = -109$$
$$(\nu-1)(-3) = -109+7$$
$$(\nu-1)(-3) = -102$$
$$\nu-1 = 34 \Leftrightarrow \nu = 35$$

$$S_{50} = \frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu) = \frac{35}{2}(-7-109) = \frac{35}{2}(-116) = 35\,.\,(-58) = -2030$$

11.i)

Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από την αριθμητική πρόοδο $4,\ 8,\ 12\ .\ .\ .$, για να έχουν άθροισμα 180;

Λύση

Έστω ότι πρέπει να πάρουμε τους ν πρώτους όρους.

$$S_\nu = 180 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right] = 180 \Leftrightarrow$$
$$\nu\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right] = 360$$
$$\nu\left[2.4+(\nu-1)4\right] = 360$$
$$\nu 4\left[2+(\nu-1)\right] = 360$$
$$\nu(2+\nu-1) = 90$$
$$\nu(\nu+1) = 90$$
$$\nu^2+\nu-90 = 0$$

$\Delta = 1+360 = 361,\quad \nu = \dfrac{-1\pm\sqrt{361}}{2} = \dfrac{-1\pm 19}{2} = 9$

Η ρίζα -10 απορρίπτεται σαν αρνητικός, που εκφράζει πλήθος.

netsuccess.gr

11.ii)

Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από την αριθμητική πρόοδο
4, 10, 15 . . . , για να έχουν άθροισμα 180;

Λύση

Έστω ότι πρέπει να πάρουμε τους ν πρώτους όρους.

$$S_\nu = 180 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = 180$$

$$\nu\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = 360$$

$$\nu\left[2.5 + (\nu - 1)5\right] = 360$$

$$\nu.5\left[2 + (\nu - 1)\right] = 360$$

$$\nu\,(2 + \nu - 1) = 72$$

$$\nu\,(\nu + 1) = 72$$

$$\nu^2 + \nu - 72 = 0$$

$$\Delta = 1 + 288 = 289\,, \qquad \nu = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} = 8$$

Η ρίζα -9 απορρίπτεται σαν αρνητικός που εκφράζει πλήθος.

12.

Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δύο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η $15^η$ σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

Λύση

Το πλήθος των κεραμιδιών κάθε σειράς αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 53$, $\omega = -2$ και πλήθος σειρών $\nu = 15$.

$$\alpha_{15} = \alpha_1 + (15 - 1)\omega = 53 + 14(-2) = 53 - 28 = 25$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(\alpha_1 + \alpha_{15}) = \frac{15}{2}(53 + 25) = \frac{15}{2}\,.\,78 = 15\,.\,39 = 585$$

netsuccess.gr

Β΄ Ομάδας

1.

Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12 - 4\nu$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω.

Λύση

Στην ισότητα $\alpha_\nu = 12 - 4\nu$, θέτουμε όπου ν το ν + 1. Τότε

$\alpha_{\nu+1} = 12 - 4(\nu + 1) = 12 - 4\nu - 4 = 8 - 4\nu$

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 8 - 4\nu - (12 - 4\nu) = 8 - 4\nu - 12 + 4\nu = -4$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = -4$

$\alpha_1 = 12 - 4.1 = 8$

2.

Να βρείτε το άθροισμα

i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών **ii)** των πρώτων 300 θετικών άρτιων

iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

Λύση

i)

Οι περιττοί αριθμοί 1, 3, 5, . . . αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$

$$\Sigma_{200} = \frac{200}{2}\left[2.1 + (200-1)2\right] = 100(2 + 398) = 100 . 400 = 40000$$

ii)

Οι θετικοί άρτιοι αριθμοί 2, 4, 6, . . . αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$

$$S_{300} = \frac{300}{2}\left[2.2 + (300-1)2\right] = 150(4 + 598) = 150 . 602 = 90300$$

iii)

Πρόκειται για τους αριθμούς 17, 19, 21, . . ., 379, οι οποίοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 17$ και $\omega = 2$.

$\alpha_\nu = 379 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 379$

$17 + (\nu - 1)\, 2 = 379$

$2\,(\nu - 1) = 362$

$\nu - 1 = 181 \Leftrightarrow \nu = 182$

$$S_{182} = \frac{182}{2}[17 + 379] = 91 . 396 = 36036$$

netsuccess.gr

3.

Να βρείτε το άθροισμα

i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 99

ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200

Λύση

i)

Πρόκειται για τους αριθμούς 5, 10, 15, . . ., 195, οι οποίοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 5$.

$$\alpha_\nu = 195 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 195$$
$$5 + (\nu - 1)\,5 = 195$$
$$5\,(\nu - 1) = 190$$
$$\nu - 1 = 38 \Leftrightarrow \nu = 39$$

$$S_{39} = \frac{39}{2}[5+195] = \frac{39}{2}\,.\,200 = 39\,.\,100 = 3900$$

ii)

Πρόκειται για τους αριθμούς 12, 15, 18, . . ., 198, οι οποίοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 3$.

$$\alpha_\nu = 198 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 198$$
$$12 + (\nu - 1)\,3 = 198$$
$$3\,(\nu - 1) = 186$$
$$\nu - 1 = 62 \Leftrightarrow \nu = 63$$

$$S_{39} = \frac{63}{2}[12+198] = \frac{63}{2}\,.\,210 = 63\,.\,105 = 6615$$

4.i)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = 5\,\nu - 4$,

Λύση

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) - 4 - (5\,\nu - 4) = 5\nu + 5 - 4 - 5\nu + 4 = 5.$$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5.1 - 4 = 1$ και $\omega = 5$

$$S_{30} = \frac{30}{2}\left[2\alpha_1 + (30-1)\omega\right] = 15\,[2.1 + 29.5] = 15\,(2 + 145) = 15\,.\,147 = 2205$$

netsuccess.gr

4.ii)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = -5\nu - 3$

Λύση

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5(\nu + 1) - 3 - (-5\nu - 3) = -5\nu - 5 - 3 + 5\nu + 3 = -5$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5.1 - 3 = -8$ και $\omega = -5$

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2\alpha_1 + (40-1)\omega\right] = 20\left[2.(-8) + 39.(-5)\right]$$

$$= 20(-16 - 195)$$

$$= 20 . (-211) = -4220$$

netsuccess.gr

5.

Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

Λύση

Έστω S το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200.

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$, $\nu = 200$ και $\alpha_\nu = 200$

$$S = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{200}{2}(1+200) = 100 \,.\, 201 = 20100 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω σ_4 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 4 από 1 μέχρι 200.

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$ και $\alpha_\nu = 200$.

$$\alpha_\nu = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 200$$
$$4 + (\nu - 1)\,4 = 200$$
$$1 + \nu - 1 = 50 \Leftrightarrow \nu = 50$$

$$\sigma_4 = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{50}{2}(4+200) = \frac{50}{2}.204 = 25 \,.\, 204 = 5100 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω σ_9 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 9 από 1 μέχρι 200.

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 9$, $\omega = 9$ και $\alpha_\nu = 198$.

$$\alpha_\nu = 198 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 198$$
$$9 + (\nu - 1)\,9 = 198$$
$$1 + \nu - 1 = 22 \Leftrightarrow \nu = 22$$

$$\sigma_9 = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{22}{2}(9+198) = 11 \,.\, 207 = 2277 \qquad \textbf{(3)}$$

Για να βρούμε το ζητούμενο άθροισμα πρέπει, από το άθροισμα S να αφαιρέσουμε τα αθροίσματα σ_4 και σ_9.

Τότε, όμως, θα έχουμε αφαιρέσει δύο φορές τα κοινά πολλαπλάσια των 4, 9, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 36.

Επομένως πρέπει να προσθέσουμε μια φορά το άθροισμα των πολλαπλασίων του 36, το οποίο ας συμβολίσουμε σ_{36}.

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 36$, $\omega = 36$ και $\alpha_\nu = 180$.

$$\alpha_\nu = 180 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 180 \Leftrightarrow$$
$$36 + (\nu - 1)\,36 = 180$$
$$1 + \nu - 1 = 5 \Leftrightarrow \nu = 5$$

$$\sigma_{36} = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{5}{2}(36+180) = \frac{5}{2}.216 = 5 \,.\, 108 = 540 \qquad \textbf{(4)}$$

Ζητούμενο άθροισμα $= S - \sigma_4 - \sigma_9 + \sigma_{36}$

$= 20100 - 5100 - 2277 + 540 = 13263$

netsuccess.gr

6.

Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου
1, 3, 5, 7, . . . που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά του να ξεπερνάει το 4000.

Λύση

Έστω ν το ζητούμενο πλήθος.

$$S_\nu > 4000 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] > 4000 \Leftrightarrow$$

$$\nu\,[2.\,1 + (\nu - 1).2] > 8000$$

$$\nu\,(2 + 2\nu - 2) > 8000$$

$$2\nu^2 > 8000$$

$$\nu^2 > 4000$$

$$\nu > \sqrt{4000} = 63,\ldots \qquad \text{Άρα } \nu = 64$$

netsuccess.gr

7.

Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα α_1, ω, ν, α_ν και S_ν κάθε γραμμής ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
120	–10	12	10	780
5	4	27	109	1539
1	3	12	34	210
–38	2	16	–8	–368

Λύση

2η γραμμή

$\alpha_\nu = \alpha_{12} = \alpha_1 + (12-1)\omega = 120 + 11.(-10) = 120 - 110 = 10$

$S_\nu = S_{12} = \frac{12}{2}(\alpha_1 + \alpha_{12}) = 6\,(120 + 10) = 6.\,130 = 780$

3η γραμμή

$\alpha_\nu = 109 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 109$

$5 + (27 - 1)\,\omega = 109$

$5 + 26\,\omega = 109$

$26\,\omega = 104 \Leftrightarrow \omega = 4$

$S_\nu = S_{27} = \frac{27}{2}(5 + \alpha_{27}) = \frac{27}{2}(5 + 109) = \frac{27}{2}.114 = 27\,.\,57 = 1539$

4η γραμμή

$S_\nu = 210 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = 210$

$\frac{12}{2}\left[2\alpha_1 + (12-1)3\right] = 210$

$6(2\,\alpha_1 + 33) = 210$

$2\,\alpha_1 + 33 = 35$

$2\,\alpha_1 = 35 - 33 = 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$

$\alpha_\nu = \alpha_{12} = \alpha_1 + (12-1)\omega = 1 + 11\,.\,3 = 1 + 33 = 34$

5η γραμμή

$\alpha_\nu = -8 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = -8$

$\alpha_1 + (16 - 1)\,2 = -8$

$\alpha_1 + 30 = -8 \Leftrightarrow \alpha_1 = -38$

$S_\nu = S_{16} = \frac{16}{2}(\alpha_1 + \alpha_{16}) = 8\,(-38 - 8) = 8\,.\,(-46) = -368$

netsuccess.gr

8.

Ένα ρολόϊ χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

Λύση

Ζητούμενο πλήθος $= (1 + 2 + \ . \ . \ . \ + 12) + (1 + 2 + \ . \ . \ . \ + 12)$

$= 2(1 + 2 + \ . \ . \ . \ + 12)$

$= 2\,\frac{12}{2}\,(1 + 12) = 12 \,.\, 13 = 156$

9.

Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

Λύση

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\nu = 33$, $\alpha_1 = 800$ και $\alpha_{33} = 4160$.

$$S_{33} = \frac{33}{2}(\alpha_1 + \alpha_{33}) = \frac{33}{2}(800 + 4160) = \frac{33}{2}.4960 = 33 \,.\, 2480 = 81840$$

$\alpha_{33} = 4160 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + (33 - 1)\omega = 4160$

$800 + 32\omega = 4160$

$32\omega = 4160 - 800$

$32\omega = 3360 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 105$

Η μεσαία σειρά είναι η 17^{η}

$\alpha_{17} = \alpha_1 + (17 - 1)\omega = 800 + 16 \,.\, 105 = 800 + 1680 = 2480$

10.

Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων]**.

Λύση

Η αριθμητική πρόοδος θα έχει 12 όρους, $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{12} = 80$.

$\alpha_{12} = 80 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + (12 - 1)\omega = 80$

$3 + 11\omega = 80$

$11\omega = 77 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 7$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73

netsuccess.gr

11.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $1 + \frac{\nu-1}{\nu} + \frac{\nu-2}{\nu} + \ . \ . \ . + \frac{1}{\nu}$

Λύση

Συμβολίζουμε με Σ το ζητούμενο άθροισμα.
Παρατηρώντας τους αριθμητές από το τέλος προς την αρχή, διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα έχει ν προσθετέους.

$$\Sigma = \frac{\nu+(\nu-1)+(\nu-2)+\ .\ .\ .\ +1}{\nu} = \frac{\frac{\nu}{2}(1+\nu)}{\nu} = \frac{\nu(1+\nu)}{2\nu} = \frac{\nu+1}{2}$$

12.

Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου. Το 1° μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

Λύση

Κόστος $1^{ου}$ μέτρου = 20.
» $2^{ου}$ » = 25
» $3^{ου}$ » = 30 κ.λ.π

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 20$, $\omega = 5$ και $S_\nu \le 4700$, όπου ν τα μέτρα βάθους της γεώτρησης.

$$S_\nu \le 4700 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 4700$$

$$\nu[2.\ 20 + (\nu-1)5] \le 9400$$

$$\nu(40 + 5\nu - 5) \le 9400$$

$$\nu(35 + 5\nu) \le 9400$$

$$\nu\, 5(7+\nu) \le 9400$$

$$\nu(7+\nu) \le 1880$$

$$\nu^2 + 7\nu - 1880 \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Delta = 49 + 7520 = 7569, \qquad \nu = \frac{-7 \pm \sqrt{7569}}{2} = \frac{-7 \pm 87}{2} = -\frac{94}{2} \text{ ή } \frac{80}{2} = -47 \text{ ή } 40$$

(1) $\Leftrightarrow -47 \le \nu \le 40$

Η γεώτρηση, λοιπόν, μπορεί να πάει μέχρι 40m βάθος.

netsuccess.gr