4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 112 – 114

Α΄ Ομάδας
1.

Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ **ii)** $2x^2 - 3x - 2$

Λύση

i)

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Ρίζες: $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \dfrac{3+1}{2}$ ή $\dfrac{3-1}{2} = 2$ ή 1

Άρα $x^2 - 3x + 2 = 1.(x-2)(x-1) = (x-2)(x-1)$

ii)

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

Ρίζες: $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2.2} = \dfrac{3 \pm 5}{4} = \dfrac{3+5}{4}$ ή $\dfrac{3-5}{4} = 2$ ή $-\dfrac{1}{2}$

Άρα $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$

2.i

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$

Λύση

Περιορισμός $\quad 2x^2-3x-2\neq 0$

- Για το τριώνυμο $\;A = x^2-3x+2$

  $\Delta = (-3)^2-4.\,1\,.\,2 = 9-8 = 1 > 0$

  Ρίζες: $\quad x = \dfrac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2.1} = \dfrac{3\pm 1}{2} = \dfrac{3+1}{2}$ ή $\dfrac{3-1}{2} = 2$ ή 1

  Άρα $\quad x^2-3x+2 = 1.(x-2)(x-1) = (x-2)(x-1)$

- Για το τριώνυμο $\;\Pi = 2x^2-3x-2$

  $\Delta = (-3)^2-4.\,2\,.\,(-2) = 9+16 = 25 > 0$

  Ρίζες: $\quad x = \dfrac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2.2} = \dfrac{3\pm 5}{4} = \dfrac{3+5}{4}$ ή $\dfrac{3-5}{4} = 2$ ή $-\dfrac{1}{2}$

  Άρα $\quad 2x^2-3x-2 = 2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$

Ο περιορισμός γίνεται $\;2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x-2\neq 0$ και $x+\dfrac{1}{2}\neq 0$

$x\neq 2$ και $x\neq -\dfrac{1}{2}$

Τελικά $\quad \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(2x+1)} = \dfrac{x-1}{2x+1}$

2.ii

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{2x^2+8x-42}{x^2-49}$

Λύση

Όπως στη (2i), θα είναι $\;\dfrac{2x^2+8x-42}{x^2-49} = \dfrac{2(x+7)(x-3)}{(x+7)(x-7)} = \dfrac{2(x-3)}{x-7}$

με περιορισμό $\;x\neq -7\;$ και $\;x\neq 7$

2.iii

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}$

Λύση

Περιορισμός $2x^2-5x+3 \neq 0$

- Για το τριώνυμο $A = 4x^2-12x+9$

  $\Delta = (-12)^2 - 4.\,4\,.\,9 = 144 - 144 = 0$

  Διπλή ρίζα $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-12}{2.\,4} = \dfrac{3}{2}$

  Άρα $4x^2-12x+9 = 4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 = 2^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 = (2x-3)^2$

- Για το τριώνυμο $\Pi = 2x^2-5x+3$

  $\Delta = (-5)^2 - 4.\,2\,.\,3 = 25 - 24 = 1 > 0$

  Ρίζες: $x = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2.\,2} = \dfrac{5\pm1}{4} = \dfrac{6}{4}$ ή $\dfrac{4}{4} = \dfrac{3}{2}$ ή 1

  Άρα $2x^2-5x+3 = 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-3)(x-1)$

Ο περιορισμός γίνεται $2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ και $x-\dfrac{3}{2} \neq 0$

$x \neq 1$ και $x \neq \dfrac{3}{2}$

Τελικά $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3} = \dfrac{(2x-3)^2}{(2x-3)(x-1)} = \dfrac{2x-3}{x-1}$

3.

Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

i) $x^2 - 2x - 15$ **ii)** $4x^2 - 4x + 1$ **ii)** $x^2 - 4x + 13$

Λύση

i)

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$

Ρίζες: $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 8}{2} = 5$ ή -3

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii)

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

Διπλή ρίζα $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$+$	

iii)

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		$+$	

4.

Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$ **iii)** $-x^2 + 2x - 2$

Λύση

i)

$\Delta = 4^2 - 4(-1).(-3) = 16 - 12 = 4 > 0$

Ρίζες: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \dfrac{-4 \pm 2}{-2} = 3$ ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ii)

$\Delta = 6^2 - 4(-9).(-1) = 36 - 36 = 0$

Διπλή ρίζα $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{6}{2(-9)} = \dfrac{1}{3}$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$-9x^2 + 6x - 1$		$-$	0	$-$	

iii)

$\Delta = 2^2 - 4.(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2 + 2x - 2$		$-$	

5.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $5x^2 \le 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \le 4$

Λύση

i)

$5x^2 \le 20x \Leftrightarrow x^2 - 4x \le 0$

Ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x = x(x-4)$ είναι 0 ή 4

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	$-$	0	+	

$x^2 - 4x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [0,\ 4]$

ii)

$x^2 + 3x \le 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \le 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 . 1(-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 .\ 1} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = -4$ ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		+	0	$-$	0	+	

$x^2 + 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in [-4,\ 1]$

6.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$

Λύση

i)

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$: $x = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2$ ή -1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ii)

$\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$, ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - 3x - 5$: $x = \dfrac{3 \pm 7}{4} = \dfrac{5}{2}$ ή -1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-1		$5/2$		$+\infty$
$2x^2 - 3x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x^2 - 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$

7.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \le 6x$

Λύση

i)

$x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow x^2 + 4 - 4x > 0$

$(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$

ii)

$x^2 + 9 \le 6x \Leftrightarrow x^2 + 9 - 6x \le 0$

$(x-3)^2 \le 0$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

8.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ **ii)** $2x^2 - 3x + 20 > 0$

Λύση

i)

$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0 \Rightarrow$ το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

ii)

$\Delta = 9 - 160 = -151 < 0 \Rightarrow$ το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 2$, δηλαδή θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9.

Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$

Λύση

$-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$: $x = \frac{4 \pm 2}{2} = 3$ ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$

10.

Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$

Λύση

$2x - 1 < x^2 - 4 < 12 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 < x^2 - 4$ και $x^2 - 4 < 12$

- $2x - 1 < x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 > 0$

  $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$, ρίζες του τριωνύμου $x = \dfrac{2 \pm 4}{2} = 3$ ή -1

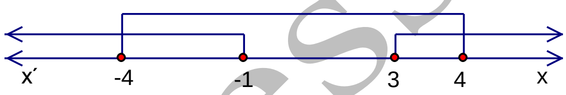
  Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  $x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$ ή $x > 3$ **(1)**

- $x^2 - 4 < 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 16 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 4$ **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2)



$-4 < x < -1$ ή $3 < x < 4$

11.

Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις
$x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Λύση

- Για την ανίσωση $x^2 - 6x + 5 < 0$

  $\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$, ρίζες του τριωνύμου $x = \dfrac{6 \pm 4}{2} = 5$ ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x^2 - 6x + 5$		+	0	–	0	+	

$x^2 - 6x + 5 < 0 \iff 1 < x < 5$ **(1)**

- Για την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 > 0$

  $\Delta = 25 - 24 = 1$, ρίζες του τριωνύμου $x = \dfrac{5 \pm 1}{2} = 3$ ή 2

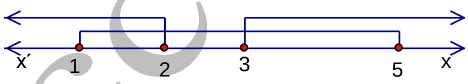
Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	–	0	+	

$x^2 - 5x + 6 > 0 \iff x < 2$ ή $x > 3$ **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2)

$1 < x < 2$ ή $3 < x < 5$



Β΄ Ομάδας

1.

i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$

Λύση

i)

- Για την παράσταση $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$

  Είναι τριώνυμο ως προς α (αντί x)

  $\Delta = \beta^2 - 4.\,1.\,(-2\beta^2) = \beta^2 + 8\beta^2 = 9\beta^2 \geq 0$

  Ρίζες του τριωνύμου $\alpha = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{9\beta^2}}{2} = \dfrac{-\beta \pm 3\beta}{2} = \beta$ ή -2β

  Άρα $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = 1(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta)$ **(1)**

- Για την παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2$

  Είναι τριώνυμο ως προς α (αντί x)

  $\Delta = \beta^2 - 4.\,1.\,(-6\beta^2) = \beta^2 + 24\beta^2 = 25\beta^2 \geq 0$

  Ρίζες του τριωνύμου $\alpha = \dfrac{\beta \pm \sqrt{25\beta^2}}{2} = \dfrac{\beta \pm 5\beta}{2} = 3\beta$ ή -2β

  Άρα $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = 1(\alpha - 3\beta)(\alpha + 2\beta)$ **(2)**

ii)

Περιορισμός $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 \neq 0 \iff \alpha \neq 3\beta$ και $\alpha \neq -2\beta$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2} \overset{(1),\,(2)}{=} \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta)}{(\alpha - 3\beta)(\alpha + 2\beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}$$

2.

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta$

Λύση

$$\Delta = (2\beta - \alpha)^2 + 8\alpha\beta = 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta = 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 = (2\beta + \alpha)^2 \geq 0,$$

$$x = \frac{\alpha - 2\beta \pm (2\beta + \alpha)}{4} = \frac{\alpha - 2\beta + (2\beta + \alpha)}{4} \ \text{ή}\ \frac{\alpha - 2\beta - (2\beta + \alpha)}{4} = \frac{\alpha - 2\beta + 2\beta + \alpha}{4} \ \text{ή}\ \frac{\alpha - 2\beta - 2\beta - \alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} \ \text{ή}\ -\beta$$

Άρα $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)(x + \beta) = (2x - \alpha)(x + \beta)$

3.

Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}$

Λύση

- Για τον αριθμητή που γράφεται $x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$

  $$\Delta = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \geq 0$$

  $$x = \frac{\alpha - \beta \pm (\alpha + \beta)}{2} = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta)}{2} \ \text{ή}\ \frac{\alpha - \beta - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{2} \ \text{ή}\ \frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta}{2} = \alpha \ \text{ή}\ -\beta$$

  Άρα $x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta = (x - \alpha)(x + \beta)$ **(1)**

- Για τον παρανομαστή

  $$\Delta = 9\alpha^2 - 8\alpha^2 = \alpha^2 \geq 0$$

  $$x = \frac{3\alpha \pm \alpha}{2} = 2\alpha \ \text{ή}\ \alpha$$

  Άρα $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = (x - 2\alpha)(x - \alpha)$ **(2)**

Περιορισμός $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2\alpha$ και $x \neq \alpha$

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2} \overset{(1),\,(2)}{=} \frac{x + \beta}{x - 2\alpha}$$

4.

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση :

i) έχει ρίζες ίσες **ii)** έχει ρίζες άνισες **iii)** είναι αδύνατη

Λύση

- Για $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $5 = 0$ αδύνατη **(1)**
- Για $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού

i)

έχει ρίζες ίσες $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$

$$9\lambda^2 - 4\lambda(\lambda + 5) = 0$$
$$9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 0$$
$$5\lambda^2 - 20\lambda = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$
$$\lambda - 4 = 0 \text{ αφού } \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

ii)

έχει ρίζες άνισες $\Leftrightarrow$ $\Delta > 0$

$$9\lambda^2 - 4\lambda(\lambda + 5) > 0$$
$$9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda > 0$$
$$5\lambda^2 - 20\lambda > 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda > 0$$
$$\lambda(\lambda - 4) > 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 4$$

* Πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2 - 4\lambda$

λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$\lambda^2 - 4\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

iii)

είναι αδύνατη $\Leftrightarrow$ $\Delta < 0$

$$9\lambda^2 - 4\lambda(\lambda + 5) < 0$$
$$9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda < 0$$
$$5\lambda^2 - 20\lambda < 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda < 0$$
$$\lambda(\lambda - 4) < 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} 0 < \lambda < 4 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ η εξίσωση είναι αδύνατη για $0 \leq \lambda < 4$

5.

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

το τριώνυμο $x^2 + 3\lambda x + \lambda$ είναι ομόσημο του $\alpha = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\Delta < 0$ $\Leftrightarrow$

$9\lambda^2 - 4\lambda < 0$ $\Leftrightarrow$

$\lambda(9\lambda - 4) < 0$ $\Leftrightarrow$

$0 < \lambda < \dfrac{4}{9}$

Πρόσημο του τριωνύμου $9\lambda^2 - 4\lambda$

λ	$-\infty$		0		4/9		$+\infty$
$9\lambda^2 - 4\lambda$		+	0	–	0	+	

6.

Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)\ x^2 - 2\lambda x + 3\lambda,\ \ \lambda \neq -2$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση

$$(\lambda + 2)\ x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0,\ \ \lambda \neq -2$$

αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i)

$\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda + 2).\ 3\lambda = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0$

$\lambda^2 + 3\lambda > 0$

$\lambda(\lambda + 3) > 0$

$\lambda < -3$ ή $\lambda > 0$

Πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2 + 3\lambda$

λ	$-\infty$		0		4/9		$+\infty$
$9\lambda^2 - 4\lambda$		+	0	–	0	+	

ii)

$(\lambda + 2)\ x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

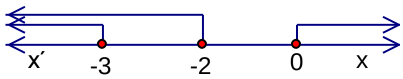
[το τριώνυμο $(\lambda + 2)\ x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$ είναι ομόσημο του $\alpha = \lambda + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda + 2 < 0$] $\Leftrightarrow$

$\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0$ $\Leftrightarrow$

$[\lambda < -3$ ή $\lambda > 0\ ]$ και $\lambda < -2$ $\Leftrightarrow$

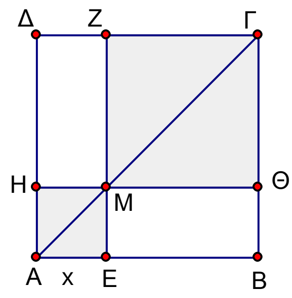
$\lambda < -3$

Συναλήθευση



7.

Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο του 5.



Λύση

Έστω $ΑΕ = x$. Τότε $ΕΒ = 3 – x = ΜΘ$.

Άθροισμα των εμβαδών : $T = x^2 + (3 – x)^2$

$$= x^2 + 9 – 6x + x^2$$

$$= 2x^2 – 6x + 9$$

Θέλουμε $2x^2 – 6x + 9 < 5 \iff 2x^2 – 6x + 4 < 0$ **(1)**

$\Delta = 36 – 32 = 4 > 0$, ρίζες $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \dfrac{6 \pm 2}{4} = 2$ ή 1

Η (1) $\iff 1 < x < 2$

Εύρεση των ζητούμενων θέσεων του Μ.

Πάνω στην πλευρά ΑΒ τοποθετούμε τα σημεία E_1, E_2 έτσι ώστε $AE_1 = 1$ και $AE_2 = 2$.

Από τα E_1, E_2 φέρνουμε κάθετες στην ΑΒ, οι οποίες τέμνουν τη διαγώνιο ΑΓ σε σημεία M_1, M_2.

Οι ζητούμενες θέσεις του Μ είναι τα εσωτερικά σημεία του τμήματος $M_1 M_2$.

8.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$.

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.

Λύση

i)

Πρόκειται για τριώνυμο ως προς α (αντί x)

$\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 < 0 \quad \Rightarrow$ το $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, (άρα θετικό) για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

ii)

$$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta}$$

Επειδή ο αριθμητής είναι θετικός, το πρόσημο του κλάσματος θα είναι ίδιο με το πρόσημο του παρανομαστή $\alpha\beta$.

Επομένως : αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$

αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.