

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 104 – 105

Α' Ομάδας

1.i)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} &\Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x \\ 6x - 6 + 6x + 9 < 2x & \\ 10x < -3 &\Leftrightarrow x < -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

1.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x &\Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x \\ 2x - 24 + 2x + 3 > 4x & \\ 0x > 21 &\Leftrightarrow 0 > 21 \text{ αδύνατη} \end{aligned}$$

1.iii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} &\Leftrightarrow 5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4 \\ 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4 & \\ 0x < 4 &\text{ αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

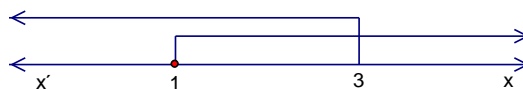
$$3x - 1 < x + 5 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

Λύση

$$3x - 1 < x + 5 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$$

$$2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Συναλήθευση $1 \leq x < 3$



3.

Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \quad \text{και} \quad x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1$$

Λύση

$$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 2 \Leftrightarrow x > 3$$

$$x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq x - 3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Οι ανισώσεις δε συναληθεύουν

**4.**

Να βρείτε τα $x \in \mathbb{A}$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$2x - \frac{x-1}{8} > x \quad \text{και} \quad x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0$$

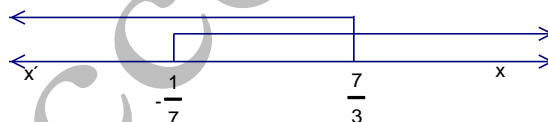
Λύση

$$2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}$$

$$x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$$

Συναλήθευση

$$-\frac{1}{7} < x < \frac{7}{3}$$



Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $\left(-\frac{1}{7}, \frac{7}{3}\right)$ είναι οι 0, 1, 2.

5.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|x| < 3$

ii) $|x-1| \leq 4$

iii) $|2x+1| < 5$

Λύση

i)

$$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

ii)

$$|x-1| \leq 4 \Leftrightarrow 1-4 \leq x \leq 1+4$$

$$-3 \leq x \leq 5$$

iii)

$$|2x+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x+1 < 5$$

$$-5-1 < 2x < 5-1$$

$$-6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$$

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$$|x-x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

6.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|x| \geq 3$

ii) $|x-1| > 4$

iii) $|2x+1| \geq 5$

Λύση

i)

$$|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3$$

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$$|x-x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

ii)

$$|x-1| > 4 \Leftrightarrow x-1 < -4 \text{ ή } x-1 > 4$$

$$x < -3 \text{ ή } x > 5$$

iii)

$$|2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow 2x+1 \leq -5 \text{ ή } 2x+1 \geq 5$$

$$2x \leq -6 \text{ ή } 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2$$

7.

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $|2x-6| = 2x-6$

ii) $|3x-1| = 1-3x$

Λύση

i)

$$|2x-6| = 2x-6 \Leftrightarrow 2x-6 \geq 0$$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$$|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$$

ii)

$$|3x-1| = 1-3x \Leftrightarrow |3x-1| = -(3x-1)$$

$$3x-1 \leq 0$$

$$3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0$$

8.i)

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$$

Σαν άγνωστο βλέπουμε
το $|x-1|$

Λύση

$$\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3(|x-1|-4) + 10 < 2|x-1|$$

$$3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1|$$

$$3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1|$$

$$|x-1| < 2$$

$$-2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

8.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3}$

Σαν άγνωστο βλέπουμε
το $|x|$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3} &\Leftrightarrow 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|) \\ 3|x|+3-4|x| > 2-2|x| & \\ |x| > -1 &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

9.

Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-6x+9} \leq 5$

Λύση

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-6x+9} \leq 5 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \leq 5 \\ |x-3| \leq 5 & \\ -5 \leq x-3 \leq 5 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

Θυμόμαστε $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

10.

Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x-x_0| < \rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7, 3)$.

Λύση

$$\begin{aligned} x \in (-7, 3) &\Leftrightarrow -7 < x < 3 \quad \text{(1)} \\ |x-x_0| < \rho &\Leftrightarrow x_0-\rho < x < x_0+\rho \quad \text{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{Από τις (1), (2) θα πρέπει } \begin{cases} x_0-\rho = -7 \\ x_0+\rho = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (+): 2x_0 = -4 \\ (-): 2\rho = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ \rho = 5 \end{cases}$$

$$\text{Η } |x-x_0| < \rho \text{ γίνεται } \begin{cases} |x-(-2)| < 5 \\ |x+2| < 5 \end{cases}$$

11.

Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) με τους βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η $F = \frac{9}{5}C + 32$. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41°F μέχρι 50°F . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{C}$.

Λύση

Από τις υποθέσεις δίνεται $41 \leq F < 50 \Rightarrow$

$$41 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 50$$

$$41 - 32 \leq \frac{9}{5}C \leq 50 - 32$$

$$9 \leq \frac{9}{5}C \leq 18$$

$$5 \leq C \leq 10$$

B' Ομάδας**1.**

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

i) $3 \leq 4x - 1 \leq 6$

ii) $-4 \leq 2 - 3x \leq -2$

Λύση**i)**

$$3 \leq 4x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 3 + 1 \leq 4x \leq 6 + 1$$

$$4 \leq 4x \leq 7$$

$$1 \leq x \leq \frac{7}{4}$$

ii)

$$-4 \leq 2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -4 - 2 \leq -3x \leq -2 - 2$$

$$-6 \leq -3x \leq -4$$

$$2 \geq x \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

Η διαίρεση με αρνητικό αριθμό αλλάζει τη φορά της ανίσωσης

2.

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

i) $2 \leq |x| \leq 4$

ii) $2 \leq |x-5| \leq 4$

Λύση

i)

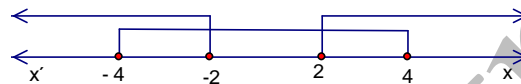
$$2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ή} \quad x \geq 2 \quad (1)$$

$$|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \quad (2)$$

Συναλήθευση των (1), (2)

$$-4 \leq x \leq -2 \quad \text{ή} \quad 2 \leq x \leq 4$$



ii)

$$2 \leq |x-5| \Leftrightarrow |x-5| \geq 2$$

$$x-5 \leq -2 \quad \text{ή} \quad x-5 \geq 2$$

$$x \leq 3 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \quad (3)$$

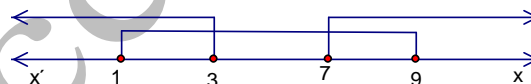
$$|x-5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-5 \leq 4$$

$$-4+5 \leq x \leq 4+5$$

$$1 \leq x \leq 9 \quad (4)$$

Συναλήθευση των (3), (4)

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{ή} \quad 7 \leq x \leq 9$$



Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$$

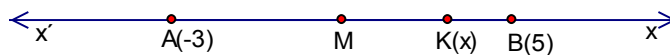
$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

3.

Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και M το μέσο του τμήματος AB .

- i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M ;
- ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-5| \leq |x+3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.
- iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

Λύση



i)

Στο μέσο M αντιστοιχεί ο αριθμός $\frac{-3+5}{2} = 1$

ii)

Έστω $K(x)$ το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της ανίσωσης

$$|x-5| \leq |x-3| \Leftrightarrow d(x, 5) \leq d(x, -3)$$

$$(KB) \leq (KA)$$

το K βρίσκεται δεξιά του μέσου M

$$x \geq 1$$

$$|\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta)$$

iii)

$$|x-5| \leq |x+3| \Leftrightarrow |x-5|^2 \leq |x+3|^2$$

$$(x-5)^2 \leq (x+3)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 \leq x^2 + 6x + 9$$

$$-16x \leq -16 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$|\alpha|^2 = \alpha^2$$

Η διαίρεση με αρνητικό αριθμό αλλάζει τη φορά της ανίσωσης

4.

Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και M το μέσο του τμήματος AB .

- i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M ;
- ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x-1| + |x-7| = 6$ και να βρείτε τις λύσεις της.
- iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x-1$ και $x-7$.

Λύση



i)

Στο μέσο M αντιστοιχεί ο αριθμός $\frac{1+7}{2} = 4$

ii)

Έστω $K(x)$ το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της εξίσωσης

$$|x-1| + |x-7| = 6 \Leftrightarrow d(x, 1) + d(x, 7) = 6$$

$|\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta)$

$$(KA) + (KB) = 6 \quad (\text{αλλά } (AB) = 7 - 1 = 6)$$

$$(KA) + (KB) = (AB)$$

το K ανήκει στο τμήμα AB

$$1 \leq x \leq 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
$x-7$		$-$	$-$	0

iii)

- Όταν $x < -1$
 $|x-1| + |x-7| = 6 \Leftrightarrow -(x-1) + [-(x-7)] = 6$
 $-x+1-x+7=6$
 $-2x=-2 \Leftrightarrow x=1$ άτοπο, αφού $x < -1$
- Όταν $1 \leq x < 7$
 $|x-1| + |x-7| = 6 \Leftrightarrow (x-1) + [-(x-7)] = 6$
 $x-1-x+7=6$
 $6=6$, που ισχύει για κάθε $1 \leq x < 7$
- Όταν $x \geq 7$
 $|x-1| + |x-7| = 6 \Leftrightarrow (x-1) + (x-7) = 6$
 $x-1+x-7=6$
 $2x=14 \Leftrightarrow x=7$, που ισχύει για $x=7$

Τελικά $1 \leq x \leq 7$