

### 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 83 – 85

#### Α' Ομάδας

##### 1.i)

Να λύσετε την εξίσωση  $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

**Λύση**

$$\begin{aligned} 4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 &\Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42 \\ -9x &= -45 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

##### 1.ii)

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4} &\Leftrightarrow 4(1-4x) - 5(x+1) = x-4 + 5 \cdot 5 \\ 4 - 16x - 5x - 5 &= x - 4 + 25 \\ -16x - 5x - x &= -4 + 5 - 4 + 25 \\ -22x = 22 &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

##### 1.iii)

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60}$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60} &\Leftrightarrow 30x - 20x = 15x - 12x - 49 \\ 30x - 20x - 15x + 12x &= -49 \\ 7x = -49 &\Leftrightarrow x = -7 \end{aligned}$$

##### 1.iv)

Να λύσετε την εξίσωση  $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$

**Λύση**

$$\begin{aligned} 1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6 &\Leftrightarrow 1,2x + 1,2 - 2,5 + 1,5x = 8,6 \\ (1,2 + 1,5)x &= 8,6 - 1,2 + 2,5 \\ 2,7x = 9,9 &\Leftrightarrow x = \frac{9,9}{2,7} = \frac{99}{27} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

**2.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

**Λύση**

$$2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4$$

$$0x = 3 \quad \text{αδύνατη}$$

**2.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$

**Λύση**

$$2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - (5-x) = -5 + 7x$$

$$6x - 5 + x = -5 + 7x$$

$$0x = 0 \quad \text{ταυτότητα, ρίζα της είναι κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**3.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $(\lambda - 1)x = \lambda - 1$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

- Όταν  $\lambda - 1 = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 1$ .  
 Η εξίσωση  $\Leftrightarrow 0x = 0$  ταυτότητα, ρίζα της είναι κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- Όταν  $\lambda - 1 \neq 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda \neq 1$ .  
 Η εξίσωση  $\Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = 1$

**3.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $(\lambda - 2)x = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

- Όταν  $\lambda - 2 = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 2$ .  
 Η εξίσωση  $\Leftrightarrow (2 - 2)x = 2 \Leftrightarrow 0x = 2$  αδύνατη
- Όταν  $\lambda - 2 \neq 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda \neq 2$ .  
 Η εξίσωση  $\Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}$

**3.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

- Όταν  $\lambda(\lambda - 1) = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 0$  ή  $\lambda - 1 = 0$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1.$$

α) Για  $\lambda = 0$ , η εξίσωση  $\Leftrightarrow 0(0 - 1)x = 0 - 1$

$$0x = -1 \text{ αδύνατη}$$

β) Για  $\lambda = 1$ , η εξίσωση  $\Leftrightarrow 1(1 - 1)x = 1 - 1$

$$0x = 0 \text{ ταυτότητα, ρίζα της}$$

είναι κάθε  $x \in \mathbb{R}$

- Όταν  $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda - 1 \neq 0$   
 $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq 1$

η εξίσωση  $\Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda}$

**3.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

- Όταν  $\lambda(\lambda - 1) = 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda = 0$  ή  $\lambda - 1 = 0$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1.$$

α) Για  $\lambda = 0$ , η εξίσωση  $\Leftrightarrow 0(0 - 1)x = 0^2 + 0$

$$0x = 0 \text{ ταυτότητα, ρίζα της}$$

είναι κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Για  $\lambda = 1$ , η εξίσωση  $\Leftrightarrow 1(1 - 1)x = 1^2 + 1$

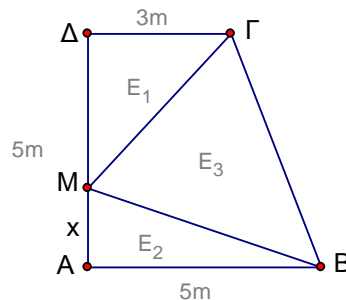
$$0x = 2 \text{ αδύνατη}$$

- Όταν  $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda - 1 \neq 0$   
 $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq 1$

η εξίσωση  $\Leftrightarrow x = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$

4.

Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην AD, ώστε για τα εμβαδά  $E_1 = (M\Delta\Gamma)$ ,  $E_2 = (MAB)$  και  $E_3 = (MB\Gamma)$  να ισχύει :



i)  $E_1 + E_2 = E_3$       ii)  $E_1 = E_2$

Λύση

$$E_1 + E_2 + E_3 = \text{Εμβαδόν του τραπέζιου } ABGD = \frac{5+3}{2} \cdot 5 = \frac{8}{2} \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20 \text{m}^2$$

$$\text{Άρα } E_1 + E_2 + E_3 = 20 \text{m}^2 \quad (1)$$

i) Επειδή  $E_1 + E_2 = E_3$  η (1)  $\Rightarrow$   $E_3 + E_3 = 20$   
 $2E_3 = 20$   
 $E_3 = 10 \text{m}^2$

Επανερχόμαστε στην ισότητα  $E_1 + E_2 = E_3 \Leftrightarrow$   
 $E_1 + E_2 = 10$   
 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5-x) = 10$   
 $5x + 3(5-x) = 20$   
 $5x + 15 - 3x = 20$   
 $2x = 20 - 15$   
 $2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{m}$

ii)  $E_1 = E_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (MA) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta\Gamma) \cdot (M\Delta)$   
 $(AB) \cdot (MA) = (\Delta\Gamma) \cdot (M\Delta)$   
 $5 \cdot x = 3 \cdot (5-x)$   
 $5x = 15 - 3x$   
 $5x + 3x = 15$   
 $8x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{8}$

5.

Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε προς 5 % και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175 € τόκοι.. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

**Λύση**

Έστω  $x$  το κεφάλαιο που κατατέθηκε με επιτόκιο 5%,

οπότε  $4000 - x$  είναι το κεφάλαιο που κατατέθηκε με επιτόκιο 3%

Οι τόκοι που απέδωσε το πρώτο είναι  $x \cdot \frac{5}{100} = \frac{5x}{100}$

Οι τόκοι που απέδωσε το δεύτερο είναι  $(4000 - x) \cdot \frac{3}{100} = \frac{12000 - 3x}{100}$ .

Το άθροισμα των τόκων είναι 175 € .

$$\text{Άρα } \frac{5x}{100} + \frac{12000 - 3x}{100} = 175 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 12000 - 3x = 17500$$

$$2x = 17500 - 12000$$

$$2x = 5500$$

$$x = \frac{5500}{2} = 2750 \text{ €}.$$

Επομένως 2750 € τοκίστηκαν προς 5 % και 1250 τοκίστηκαν προς 3 %.

**6.**

Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή :

$$\text{i)} \quad v = v_0 + \alpha t, \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{ως προς } t) \qquad \text{ii)} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{ως προς } R_1)$$

**Λύση****i)**

$$v = v_0 + \alpha t \Leftrightarrow \alpha t = v - v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{\alpha}$$

**ii)**

Περιορισμός :  $R, R_1, R_2 \neq 0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_1 R_2 = R R_2 + R R_1$$

$$R_1 R_2 - R R_1 = R R_2$$

$$(R_2 - R) R_1 = R R_2 \quad (1)$$

- Όταν  $R_2 - R = 0$ , δηλαδή όταν  $R_2 = R$

η εξίσωση (1)  $\Leftrightarrow 0 = R R_2 \Leftrightarrow R = 0$  ή  $R_2 = 0$  που είναι άτοπο

- Όταν  $R_2 - R \neq 0$ , δηλαδή όταν  $R_2 \neq R$

η εξίσωση (1)  $\Leftrightarrow R_1 = \frac{R R_2}{R_2 - R}$

**7.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

**Λύση**

$$x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$(x-4)(x+1)^2 = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad (x+1)^2 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

**7.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} (x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)(4+x) = 0 \\ &(x-2)(x-2+4+x) = 0 \\ &(x-2)(2x+2) = 0 \\ &x-2=0 \quad \text{ή} \quad 2x+2=0 \\ &x=2 \quad \text{ή} \quad 2x=-2 \\ &x=2 \quad \text{ή} \quad x=-1 \end{aligned}$$

**8.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0 &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - x^2(x-1) = 0 \\ &(x-1)[x(x+1) - x^2] = 0 \\ &(x-1)(x^2 + x - x^2) = 0 \\ &(x-1)x = 0 \\ &x-1=0 \quad \text{ή} \quad x=0 \\ &x=1 \quad \text{ή} \quad x=0 \end{aligned}$$

**8.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + x^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1)(x-1) = 0 \\ &(x+1)(x+1+x-1) = 0 \\ &(x+1)2x = 0 \\ &x+1=0 \quad \text{ή} \quad x=0 \\ &x=-1=0 \quad \text{ή} \quad x=0 \end{aligned}$$

**9.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

**Λύση**

$$\begin{aligned} x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 &\Leftrightarrow x(x-2)^2 = (x-2)^2 \\ x(x-2)^2 - (x-2)^2 &= 0 \\ (x-2)^2(x-1) &= 0 \\ (x-2)^2 = 0 &\text{ ή } x-1 = 0 \\ x-2 = 0 &\text{ ή } x-1 = 0 \\ x = 2 &\text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

**9.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$

**Λύση**

$$\begin{aligned} (x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2) &\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1) - (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \\ (x-1)(x-2)[x+2 - (x+1)] &= 0 \\ (x-1)(x-2)(x+2-x-1) &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x-1 = 0 &\text{ ή } x-2 = 0 \\ x = 1 &\text{ ή } x = 2 \end{aligned}$$

**10.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \\ (x-2)(x^2-1) &= 0 \\ x-2 = 0 &\text{ ή } x^2-1 = 0 \\ x = 2 &\text{ ή } x^2 = 1 \\ x = 2 &\text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$



**10.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0 &\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (2x - 1)(x - 2) = 0 \\ &(x - 2)[x^2 - (2x - 1)] = 0 \\ &(x - 2)(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &(x - 2)(x - 1)^2 = 0 \\ &x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad (x - 1)^2 = 0 \\ &x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \\ &x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \end{aligned}$$

**11.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$

**Λύση**

Περιορισμοί :  $x - 1 \neq 0$  και  $x^2 - x \neq 0$   
 $x \neq 1$  και  $x(x - 1) \neq 0$   
 $x \neq 1$  και  $x \neq 0$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow x(x^2 - x) = x - 1$   
 $x x(x - 1) - (x - 1) = 0$   
 $(x - 1)(x^2 - 1) = 0$   
 $x - 1 = 0$  ή  $x^2 - 1 = 0$   
 $x = 1$  ή  $x^2 = 1$   
 $x = 1$  ή  $x = 1$  ή  $x = -1$   
 $x = -1$  λόγω των περιορισμών

**11.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$

**Λύση**

Περιορισμοί :  $x^2-1 \neq 0$  και  $x^2-2x+1 \neq 0$   
 $(x-1)(x+1) \neq 0$  και  $(x-1)^2 \neq 0$   
 $x-1 \neq 0$  και  $x+1 \neq 0$   
 $x \neq 1$  και  $x \neq -1$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0$   
 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0$   
 $1 + \frac{2}{x-1} = 0$   
 $x-1+2=0$   
 $x=-1$  αδύνατη λόγω των περιορισμών

**12.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

**Λύση**

Περιορισμοί : Ε.Κ.Π =  $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $x-1 \neq 0$  και  $x+1 \neq 0$   
 $x \neq 1$  και  $x \neq -1$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow x+1+x-1=2$   
 $2x=2$   
 $x=1$  αδύνατη λόγω των περιορισμών

**12.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

**Λύση**

Περιορισμοί : Ε.Κ.Π =  $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq -2$$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)}$

$$3x - 2(x+2) = x - 4$$

$$3x - 2x - 4 = x - 4$$

$$0x = 0, \quad \text{ταυτότητα,} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x \neq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

**12.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$

**Λύση**

Περιορισμοί : Ε.Κ.Π =  $(x-2)(x+2) \neq 0$

$$x-2 \neq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0$$

$$x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2$$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$

$$1 = \frac{x}{x-2}$$

$$x-2 = x$$

$$0 = 2 \quad \text{αδύνατη}$$

**12.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1}$

**Λύση**

Περιορισμοί : Ε.Κ.Π =  $(x - 1)(x + 1) \neq 0$

$$x - 1 \neq 0 \quad \text{και} \quad x + 1 \neq 0$$

$$x \neq 1 \quad \text{και} \quad x \neq -1$$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1}, \text{ ταυτότητα, } x \in \mathbb{R} \text{ με } x \neq -1 \text{ και } x \neq 1$$

**13.**

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το γινόμενο τους.

**Λύση**

Έστω  $x - 1, x, x + 1$  οι ζητούμενοι  $\Leftrightarrow (x - 1)x(x + 1) = x - 1 + x + x + 1$

$$x(x^2 - 1) - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 1 - 3) = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

- Για  $x = 0$ , οι ζητούμενοι αριθμοί είναι  $-1, 0, 1$
- Για  $x = 2$ , οι ζητούμενοι αριθμοί είναι  $1, 2, 3$
- Για  $x = -2$ , οι ζητούμενοι αριθμοί είναι  $-3, -2, -1$

**14.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $|2x - 3| = 5$

**Λύση**

$$|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5 \quad \text{ή} \quad 2x - 3 = -5$$

$$2x = 8 \quad \text{ή} \quad 2x = -2$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

**14.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $|2x-4| = |x-1|$

**Λύση**

$$|2x-4| = |x-1| \Leftrightarrow 2x-4 = x-1 \quad \text{ή} \quad 2x-4 = -(x-1)$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad 2x-4 = -x+1$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad 3x = 5$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = \frac{5}{3}$$

**14.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $|x-2| = 2x-1$

**Λύση**

Περιορισμός : Επειδή  $|x-2| \geq 0$ , για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει

$$\text{και} \quad 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$|x-2| = 2x-1 \Leftrightarrow x-2 = 2x-1 \quad \text{ή} \quad x-2 = -(2x-1)$$

$$-x = 1 \quad \text{ή} \quad x-2 = -2x+1$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad 3x = 3$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η  $x = 1$ .

**14.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  $|2x-1| = x-2$

**Λύση**

Περιορισμός : Επειδή  $|2x-1| \geq 0$ , για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει

$$\text{και} \quad x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$|2x-1| = x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = x-2 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -(x-2)$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -x+2$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad 3x = 3$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Λόγω του περιορισμού, δεν είναι αποδεκτές, δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.

**15.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$

**Λύση**

$$\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5|x| + 20 - 3|x| - 12 = 10$$

$$2|x| = 2$$

$$|x| = 1$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

**15.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2}$

**Λύση**

$$\frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4|x| + 2 - 3|x| + 3 = 3$$

$$|x| = -2 \quad \text{αδύνατη}$$

**16.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4$

**Λύση**

Περιορισμός:  $3+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$\left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4 \Leftrightarrow \frac{3-x}{3+x} = 4 \quad \text{ή} \quad \frac{3-x}{3+x} = -4$$

$$3-x = 12+4x \quad \text{ή} \quad 3-x = -12-4x$$

$$-5x = 9 \quad \text{ή} \quad 3x = -15$$

$$x = -\frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad x = -5$$

**16.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $|x-1||x-2| = |x-1|$

**Λύση**

$$\begin{aligned}
 |x-1||x-2| = |x-1| &\Leftrightarrow |x-1||x-2| - |x-1| = 0 \\
 |x-1|(|x-2| - 1) &= 0 \\
 |x-1| = 0 &\quad \text{ή} \quad |x-2| - 1 = 0 \\
 x-1 = 0 &\quad \text{ή} \quad |x-2| = 1 \\
 x-1 = 0 &\quad \text{ή} \quad x-2 = 1 \quad \text{ή} \quad x-2 = -1 \\
 x = 1 &\quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \\
 x = 1 &\quad \text{ή} \quad x = 3
 \end{aligned}$$

**B' Ομάδας****1.i)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(x + \alpha)^2 - (x - \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta)$  έχει πάντα λύση, οποιοδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

**Λύση**

$$\begin{aligned}
 (x + \alpha)^2 - (x - \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) &\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 - 2\beta x + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta \\
 x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 + 2\beta x - \beta^2 &= 2\alpha^2 + 2\alpha\beta \\
 2(\alpha + \beta)x &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
 2(\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)^2 \quad \mathbf{(1)}
 \end{aligned}$$

- Όταν  $\alpha + \beta \neq 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , η λύση της
- Όταν  $\alpha + \beta = 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow 0x = 0$  που έχει άπειρες λύσεις

Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση.

**1.ii)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha}$  έχει πάντα λύση, οποιοδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

**Λύση**

Περιορισμός :  $\alpha, \beta \neq 0$

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x - \alpha^2 = \beta x - \beta^2$$

$$\alpha x - \beta x = \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)x = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \quad (1)$$

- Όταν  $\alpha - \beta \neq 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow x = \alpha + \beta$ , η λύση της
- Όταν  $\alpha + \beta = 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow 0x = 0$  που έχει άπειρες λύσεις

Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση.

**2.**

Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να έχει λύση η εξίσωση  $\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1$ ;

**Λύση**

Κατ' αρχήν πρέπει  $\alpha$  και  $\beta \neq 0$

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \beta x - \alpha x = \alpha\beta$$

$$(\beta - \alpha)x = \alpha\beta \quad (1)$$

- Όταν  $\beta - \alpha \neq 0$ , δηλαδή όταν  $\beta \neq \alpha$ , η (1)  $\Leftrightarrow x = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}$  η λύση της
- Όταν  $\beta - \alpha = 0$ , δηλαδή όταν  $\beta = \alpha$ ,  
η (1)  $\Leftrightarrow 0x = \alpha^2 \neq 0$ , από τον περιορισμό.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως, η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  και  $\alpha \neq \beta$



**3.**

Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινόπνευματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινόπνευματος περιεκτικότητας 32%;

**Λύση**

Τα 200 ml οινόπνευμα περιεκτικότητας 15% περιέχουν

$$20 \cdot \frac{15}{100} = \frac{3000}{100} = 30 \text{ ml οινόπνευμα.}$$

Έστω ότι πρέπει να προσθέσει  $x$  ml καθαρό οινόπνευμα.

Το μίγμα, που θα προκύψει, θα είναι  $x + 200$  ml και θα περιέχει

$$x + 30 \text{ ml καθαρό οινόπνευμα}$$

Αλλά τα  $x + 200$  ml μίγμα θα είναι 32% περιεκτικότητας σε οινόπνευμα,

άρα το μίγμα θα περιέχει  $(x + 200) \frac{32}{100}$  ml καθαρό οινόπνευμα.

Θα έχουμε, λοιπόν την εξίσωση  $x + 30 = (x + 200) \frac{32}{100} \Leftrightarrow$

$$100(x + 30) = (x + 200)32$$

$$100x + 3000 = 32x + 6400$$

$$100x - 32x = 6400 - 3000$$

$$68x = 3400$$

$$x = \frac{3400}{68} = 50 \text{ ml}$$

**4.**

Ένα αυτοκίνητο A κινείται με ταχύτητα 100 km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο B που κινείται με 120 km/h προσπερνάει το A. Σε πόσα λεπτά τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km;

**Λύση**

Έστω ότι σε  $t$  ώρες, μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km.

Το αυτοκίνητο A θα έχει διανύσει διάστημα  $S_A = 100t$  km.

Το αυτοκίνητο B θα έχει διανύσει διάστημα  $S_B = 120t$  km.

Οπότε  $S_B - S_A = 1 \text{ km} \Leftrightarrow 120t - 100t = 1$

$$20t = 1$$

$$t = \frac{1}{20} \text{ h} = \frac{1}{20} 60 \text{ min} = 3 \text{ min}$$

**5.**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$  για όλες τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

Περιορισμοί: Ε.Κ.Π =  $(x-\alpha)(x+\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow x-\alpha \neq 0$  και  $x+\alpha \neq 0$   
 $x \neq \alpha$  και  $x \neq -\alpha$

$$\text{Η εξίσωση} \Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{(x-\alpha)(x+\alpha)}$$

$$x+\alpha = \frac{x^2}{x+\alpha}$$

$$(x+\alpha)^2 = x^2$$

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = x^2$$

$$2\alpha x = -\alpha^2 \quad (1)$$

- Όταν  $\alpha \neq 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{2}$
- Όταν  $\alpha = 0$ , η (1)  $\Leftrightarrow 0x = 0$  ταυτότητα, έχει λύση κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq \alpha$  και  $x \neq -\alpha$  δηλαδή  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 0$

**6.**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$$\text{Η εξίσωση} \Leftrightarrow \frac{x^3-2^3}{x-2} = x^2+4$$

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{x-2} = x^2+4$$

$$x^2+2x+4 = x^2+4$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

**7.**

Να λύσετε την εξίσωση  $|2|x| - 1| = 3$

**Λύση**

$$\begin{aligned}
 |2|x| - 1| = 3 &\Leftrightarrow 2|x| - 1 = 3 \quad \text{ή} \quad 2|x| - 1 = -3 \\
 2|x| = 4 &\quad \text{ή} \quad 2|x| = -2 \\
 |x| = 2 &\quad \text{ή} \quad |x| = -1 \quad \text{αδύνατη} \\
 x = 2 &\quad \text{ή} \quad x = -2
 \end{aligned}$$

**8.**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5|$

**Λύση**

Περιορισμοί: Πρέπει  $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 1)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |3x-5|$

$$|x-1| = |3x-5|$$

$$x-1 = 3x-5 \quad \text{ή} \quad x-1 = -(3x-5)$$

$$-2x = -4 \quad \text{ή} \quad x-1 = -3x+5$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad 4x = 6$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3}{2}$$