10.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 227

Ερωτήσεις Κατανόησης

1 .
Τι λέγεται τετραγωνισμός πολυγώνου

Απάντηση

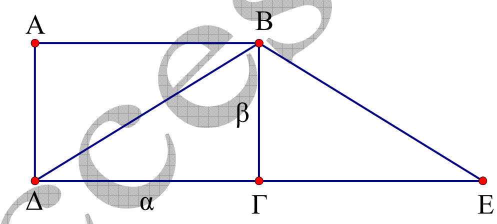
Η κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με το πολύγωνο

2.

Πως μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο ;

Λύση

Στην προέκταση της ΔΓ παίρνουμε τμήμα ΓΕ = ΔΓ = α τότε το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΑΒΓΔ διότι



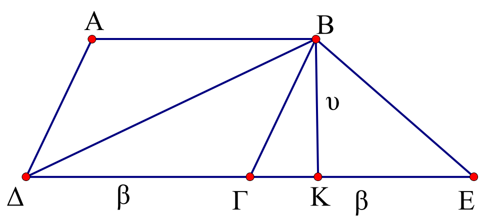
$(Β\Delta Ε) = \frac{1}{2}\Delta Ε\cdot ΒΓ = \frac{1}{2}\cdot 2α\cdot β = α\,β = (ΑΒΓ\Delta)$

3.

Πως μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο ;

Λύση

Στην προέκταση της ΔΓ παίρνουμε τμήμα ΓΕ = ΔΓ = β τότε το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διότι



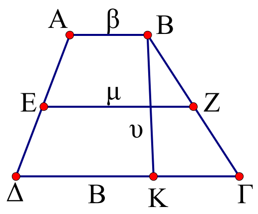
$(Β\Delta Ε) = \frac{1}{2}\Delta Ε\cdot ΒΚ = \frac{1}{2}\cdot 2β\cdot υ = β\,υ = (ΑΒΓ\Delta)$

4.

Πως μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο ;

Λύση

Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι



$(ΑΒΓΔ) = \dfrac{(Β+β)υ}{2}$

Αν μ είναι η διάμεσος του τραπεζίου

τότε $μ = \dfrac{Β+β}{2}$ οπότε $(ΑΒΓΔ) = μ\cdot υ$

Συνεπώς αν x είναι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου τότε

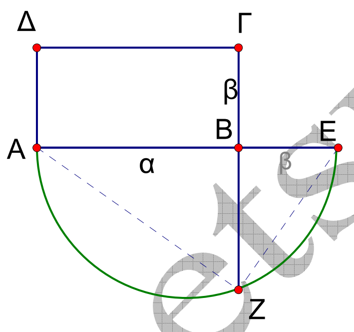
$x^2 = μ\cdot υ$ επομένως το x είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων μ και υ που κατασκευάζεται με γνωστό τρόπο (πρόβλημα 2 σελίδα 187)

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α, β.

Λύση



Σύνθεση

Έστω ΑΒΓΔ το δοσμένο ορθογώνιο.

Προεκτείνουμε την ΑΒ = α κατά τμήμα ΒΕ = β.

Με διάμετρο ΑΕ γράφουμε ημικύκλιο .

Η προέκταση του τμήματος ΓΒ τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ.

Φανταζόμαστε τετράγωνο πλευράς ΒΖ, που είναι και το ζητούμενο.

Απόδειξη

Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ορθογώνιο με ύψος ΖΒ,

άρα $ΖΒ^2 = ΑΒ.\ ΒΕ \Rightarrow ΖΒ^2 = α.β$

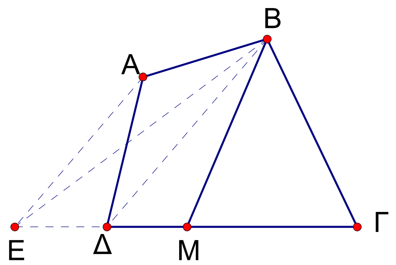
2.
Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών α, β αντίστοιχα.

Λύση

Έστω x η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου.
Τότε θα είναι $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$, άρα x θα είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.

3.
Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.

Λύση



Ανάλυση
Ας είναι ΑΒΓΔ το δοσμένο τετράπλευρο.

Έστω ΒΜ η ζητούμενη ευθεία.
Τότε (ΑΒΜΔ) = (ΒΜΓ)

Μετασχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΒΜΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο ΒΜΕ φέροντας ΑΕ|| ΒΔ.

Τότε (ΒΜΕ) = (ΒΜΓ) και επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν κοινό ύψος από το Β, θα έχουν ίσες βάσεις ΜΕ = ΜΓ, δηλαδή Μ μέσο του ΓΕ.

Σύνθεση
Γράφουμε το δοσμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ.
Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ και από το Α παράλληλη στη ΒΔ, που τέμνει την προέκταση της ΓΔ σε σημείο Ε.
Τοποθετούμε το μέσο Μ του τμήματος ΓΕ, οπότε η ΒΜ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Απόδειξη
ΒΜ διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ $\Rightarrow$ (ΒΜΕ) = (ΒΜΓ)
Αλλά, από τη σύνθεση, είναι (ΒΜΕ) = (ΑΒΜΔ). Άρα (ΑΒΜΔ) = (ΒΜΓ)

4.

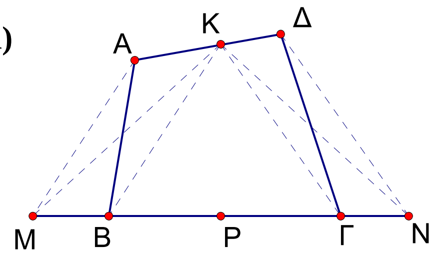
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.

i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.

ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

Λύση

i)



Ανάλυση

Έστω ΚΜΝ το ζητούμενο τρίγωνο.

Αρκεί να έχουμε (ΚΜΝ) = (ΑΒΓΔ),

ή αρκεί (ΚΒΜ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΝ) = (ΚΒΑ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΔ),

ή αρκεί (ΚΒΜ) + (ΚΓΝ) = (ΚΒΑ) + (ΚΓΔ),

ή αρκεί (ΚΒΜ) = (ΚΒΑ) και (ΚΓΝ) = (ΚΓΔ)

ή αρκεί $AM \parallel KB$ και $\Delta N \parallel K\Gamma$

Σύνθεση

Φέρουμε τις ΚΒ, ΚΓ.

Από το Α παράλληλη στην ΚΒ, που τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Μ και από το Δ παράλληλη στην ΚΓ, που τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Ν.

Το τρίγωνο ΚΜΝ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

$AM \parallel KB \Rightarrow$ (ΚΒΜ) = (ΚΒΑ) **(1)**

$\Delta N \parallel K\Gamma \Rightarrow$ (ΚΓΝ) = (ΚΓΔ) **(2)**

(ΚΒΓ) = (ΚΒΓ) **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ (ΚΜΝ) = (ΑΒΓΔ).

ii)

Χρησιμοποιώντας το i), η ζητούμενη ευθεία είναι η ΚΡ, όπου Ρ το μέσο του τμήματος ΜΝ.