10.4
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 220 – 221

Ερωτήσεις κατανόησης

1.

Με την βοήθεια του τύπου $Ε = \frac{1}{2}βγημΑ$, να αποδείξετε ότι $Ε \leq \frac{1}{2}βγ$

Λύση

$Ε = \frac{1}{2}β\,γ\,ημΑ \ \leq \frac{1}{2}βγ \cdot 1 = \frac{1}{2}βγ$

Η ισότητα ισχύει όταν $ημΑ = 1$, δηλαδή $\hat{Α} = 90^o$, δηλαδή σε ορθογώνιο τρίγωνο

2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = 9 και ρ = 1,5 . Ποια είναι η περίμετρος του τριγώνου;

Λύση

$Ε = τ \cdot ρ \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 1{,}5\,τ \quad \Leftrightarrow \quad τ = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2τ = 12$

3.

Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;

Απάντηση

i) $Ε = \frac{1}{2}α\,υ_α = \frac{1}{2}β\,υ_β = \frac{1}{2}\,υ_γ$

ii) $Ε = \frac{1}{2}β\,γ\,ημΑ = \frac{1}{2}α\,γ\,ημΒ = \frac{1}{2}β\,α\,ημΓ$

iii) $Ε = τ\,ρ$

iv) $Ε = \frac{α \cdot β \cdot γ}{4R}$

v) $Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 18, ΒΓ = 20 και ΑΓ = 34. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση

Με τον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ βρίσκουμε το εμβαδόν (ΑΒΓ).

$\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1}{2}(20+34+18) = 36$

$\tau - \alpha = 36 - 20 = 16$

$\tau - \beta = 36 - 34 = 2$

$\tau - \gamma = 36 - 18 = 18$

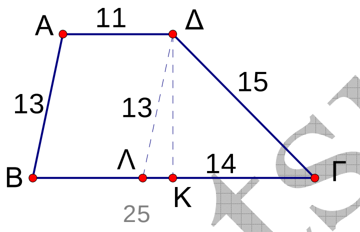
$(AB\Gamma) = \sqrt{36\cdot16\cdot2\cdot18} = \sqrt{36\cdot16\cdot36} = 6\cdot4\cdot6 = 144.$

$(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = 2\cdot144 = 288.$

2.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ||ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.

Λύση



Φέρουμε ΔΛ||ΑΒ και το ύψος ΔΚ.

Τότε ΑΒΛΔ παρ/μμο.

Άρα ΔΛ = ΑΒ = 13 και

ΛΓ = ΒΓ – ΒΛ = 25 – ΑΔ = 25 – 11 = 14.

Με τον τύπο $\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ υπολογίζουμε το ύψος ΔΚ στο τρίγωνο ΔΛΓ

$\alpha = \Lambda\Gamma = 14,\quad \beta = \Delta\Gamma = 15,\quad \gamma = \Delta\Lambda = 13$

$\tau = \frac{1}{2}(14+15+13) = \frac{1}{2}42 = 21$

$\tau - \alpha = 21 - 14 = 7$

$\tau - \beta = 21 - 15 = 6$

$\tau - \gamma = 21 - 13 = 8$

$\Delta K = \frac{2}{14}\sqrt{21\cdot7\cdot6\cdot8} = \frac{1}{7}\sqrt{3\cdot7\cdot7\cdot2\cdot3\cdot2^3} = \frac{1}{7}\sqrt{2^4\cdot3^2\cdot7^2} = \frac{1}{7}2^2.3.7 = 12$

$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(B\Gamma + A\Delta)\cdot\Delta K = \frac{1}{2}(25+11)\cdot12 = 36\cdot6 = 216.$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4, ΑΓ = 7 και $\hat{A} = 60^{o}$. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση

$E = \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}7\cdot 4\,\eta\mu 60^{o} = 7\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε

i) το εμβαδόν

ii) το ύψος υ_α

iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση

i)

$E = \frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma = \frac{1}{2}6\cdot 8 = 24$

ii)

Πυθαγόρειο: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow B\Gamma = 10$

$E = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B\Gamma\,.\,\upsilon_\alpha = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}10\,\upsilon_\alpha = 24 \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \frac{24}{5}$

iii)

$\tau = \frac{1}{2}(10 + 8 + 6) = \frac{1}{2}24 = 12$

$E = \tau\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{E}{\tau} \Leftrightarrow \rho = \frac{24}{12} = 2$.

Ασκήσεις Αποδεικτικές

1.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta\gamma = \alpha\,\upsilon_\alpha$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\llcorner$.

Λύση

Είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ και $E = \frac{1}{2}\alpha\,\upsilon_\alpha \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha\,\upsilon_\alpha \Rightarrow \eta\mu A = 1 \Rightarrow \hat{A} = 1\llcorner$.

2.

Αν $Ε$ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ με πλευρές $α$, $β$, $γ$, να αποδείξετε ότι:

i) $Ε < τ(τ-α) \;\Leftrightarrow\; Α < 1\llcorner$

ii) $Ε = τ(τ-α) \;\Leftrightarrow\; Α = 1\llcorner$

iii) $Ε > τ(τ-α) \;\Leftrightarrow\; Α > 1\llcorner$

Λύση

i)

$$Ε < τ(τ-α) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} < τ(τ-α)$$

$$τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ) < τ^2(τ-α)^2$$

$$(τ-β)(τ-γ) < τ\,(τ-α)$$

$$τ^2 - τγ - τβ + βγ < τ^2 - τα$$

$$βγ < τγ + τβ - τα$$

$$βγ < τ\,(β + γ - α)$$

$$βγ < \frac{1}{2}\,(α + β + γ)\,(β + γ - α)$$

$$2βγ < αβ + αγ - α^2 + β^2 + βγ - βα + γβ + γ^2 - γα$$

$$α^2 < β^2 + γ^2 \;\Leftrightarrow\; Α = 1\llcorner$$

ii)

Ίδια καταγραφή (αντί για ανισότητες θα έχουμε ισότητες).

iii)

Ίδια καταγραφή.

3.

Αν δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \dfrac{αβγ}{α'β'γ'}$

Λύση

Από τον τύπο $Ε = \dfrac{αβγ}{4R}$ έχουμε $\dfrac{Ε}{Ε'} = \dfrac{\frac{αβγ}{4R}}{\frac{α'β'γ'}{4R}} = \dfrac{αβγ}{α'β'γ'}$

4.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} \neq 1∟$ φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι

$(AZH) = (AB\Gamma)\ \sigma\upsilon\nu^2 A$.

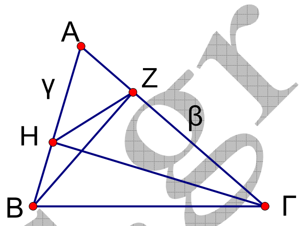
Λύση

- Όταν $\hat{A} < 1∟$

  $(AZH) = \frac{1}{2} AH \cdot AZ \cdot \eta\mu A$ **(1)**

  Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ είναι $AH = \beta\ \sigma\upsilon\nu A$ και

  στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΒ είναι $AZ = \gamma\ \sigma\upsilon\nu A$



  $(1) \Rightarrow (AZH) = \frac{1}{2}\beta\ \sigma\upsilon\nu A\ \gamma\ \sigma\upsilon\nu A\ \eta\mu A$

  $= \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A\ \sigma\upsilon\nu^2 A$ **(2)**

  Αλλά $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A$

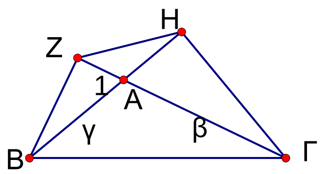
  $(2) \Rightarrow (AZH) = (AB\Gamma)\ \sigma\upsilon\nu^2 A$

- Όταν $\hat{A} > 1∟$

  $(AZH) = \frac{1}{2} AH \cdot AZ \cdot \eta\mu A$ **(3)**

  Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ είναι $AH = \beta\ \sigma\upsilon\nu A_1$ και

  στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΒ είναι $AZ = \gamma\ \sigma\upsilon\nu A_1$



  $(3) \Rightarrow (AZH) = \frac{1}{2}\beta\ \sigma\upsilon\nu A_1\ \gamma\ \sigma\upsilon\nu A_1\ \eta\mu A$

  $= \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A\ \sigma\upsilon\nu^2 A_1$ **(4)**

  Αλλά $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A$ και $\sigma\upsilon\nu A_1 = -\sigma\upsilon\nu A$

  $(4) \Rightarrow (AZH) = (AB\Gamma)\left(-\sigma\upsilon\nu A\right)^2 = (AB\Gamma)\ \sigma\upsilon\nu^2 A$

5.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}$

Λύση

Είναι $E = \frac{1}{2}\alpha.\upsilon_\alpha \Rightarrow 2E = \alpha.\upsilon_\alpha \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{2E}$ και κυκλικά. Άρα

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{\alpha}{2E} + \frac{\beta}{2E} + \frac{\gamma}{2E} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E} = \frac{2\tau}{2E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho}$$

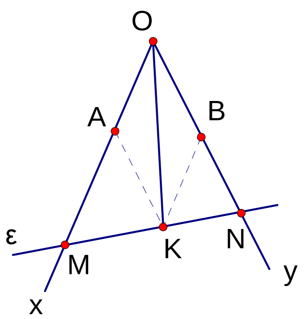
Σύνθετα Θέματα

1.

i) Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε, που τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να Αποδείξετε ότι το άθροισμα $\dfrac{1}{(OKM)}+\dfrac{1}{(OKN)}$ είναι σταθερό.

ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν E_1, E_2, . . . , E_6 είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{E_1}+\dfrac{1}{E_3}+\dfrac{1}{E_5}=\dfrac{1}{E_2}+\dfrac{1}{E_4}+\dfrac{1}{E_6}$.

Λύση



i)
Κατ'αρχήν, με οριακές θέσεις της ευθείας ε μπορούμε να εντοπίσουμε την ποσότητα του αθροίσματος.

Μια οριακή θέση της ε είναι να γίνει $KA \parallel Oy$. Τότε το εμβαδόν (ΟΚΜ) γίνεται (ΟΚΑ) και το (ΟΚΝ) απειρίζεται, οπότε το $\dfrac{1}{(OKN)}$ μηδενίζεται, αφού το Ν εξαφανίζεται στο άπειρο.

Αντίστοιχα σκεπτόμαστε, όταν η ε γίνει $KB \parallel Ox$.
Εδώ να παρατηρήσουμε ότι το ΟΑΚΒ είναι παρ/μμο, άρα (ΟΚΑ) = (ΟΚΒ)

Θα αποδείξουμε, λοιπόν, ότι $\dfrac{1}{(OKM)}+\dfrac{1}{(OKN)}=\dfrac{1}{(OKA)}$ ή ότι

$$\frac{(OKA)}{(OKM)}+\frac{(OKB)}{(OKN)}=1$$

Τα τρίγωνα ΟΚΑ, ΟΚΜ έχουν κοινό ύψος από το Κ, άρα

$$\frac{(OKA)}{(OKM)}=\frac{OA}{OM}=\frac{BK}{OM}=\frac{NK}{NM}$$

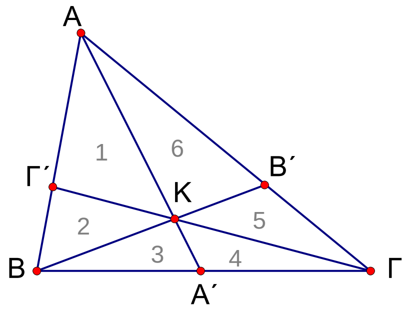
Ομοίως

$$\frac{(OKB)}{(OKN)}=\frac{OB}{ON}=\frac{AK}{ON}=\frac{MK}{MN}$$

Άρα

$$\frac{(OKA)}{(OKM)}+\frac{(OKB)}{(OKN)}=\frac{NK}{NM}+\frac{MK}{MN}=\frac{NK+MK}{MN}=\frac{MN}{MN}=1$$

ii)



Από το i), με τέμνουσα ΓΚΓ΄, έχουμε

$$\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_5+E_6}=c$$

και με τέμνουσα ΒΚΒ΄, έχουμε

$$\frac{1}{E_6}+\frac{1}{E_1+E_2}=c$$

Άρα $\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_5+E_6}=\frac{1}{E_6}+\frac{1}{E_1+E_2}$ **(1)**

Κυκλικά ανά δεύτερο δείκτη είναι $\frac{1}{E_3}+\frac{1}{E_1+E_2}=\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3+E_4}$ **(2)**

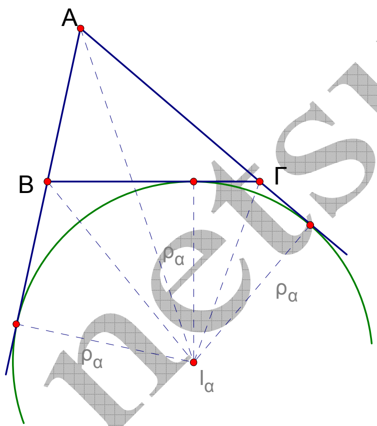
και $\frac{1}{E_5}+\frac{1}{E_3+E_4}=\frac{1}{E_4}+\frac{1}{E_5+E_6}$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_3}+\frac{1}{E_5}=\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_4}+\frac{1}{E_6}$.

2.

Αν ρ_α, ρ_β, ρ_γ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = (\tau-\alpha)\,\rho_\alpha = (\tau-\beta)\,\rho_\beta = (\tau-\gamma)\,\rho_\gamma$.

Λύση



$$(ΑΒΓ) = (ΑΒ\,I_\alpha) + (ΑΓ\ I_\alpha) - (I_\alpha\,ΒΓ)$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\rho_\alpha\ (\gamma+\beta-\alpha). \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau \ \Rightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma-2\,\alpha = 2\tau-2\,\alpha$

$\gamma+\beta-\alpha = 2(\tau-\alpha)$

(1) $\Rightarrow$ $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\rho_\alpha\,2(\tau-\alpha) = (\tau-\alpha)\,\rho_\alpha$

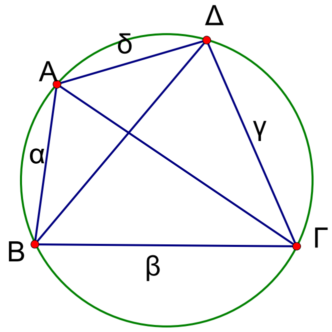
Ομοίως οι άλλες δύο ισότητες.

3.

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ, να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$

(2^{ο} Θεώρημα Πτολεμαίου)

Λύση



Έστω R η ακτίνα του κύκλου.

Εφαρμόζοντας τον τύπο $Ε = \frac{αβγ}{4R}$ έχουμε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΓΒΔ) = \frac{αδ.ΒΔ}{4R} + \frac{βγ.ΒΔ}{4R} = \frac{1}{4R}ΒΔ(αδ+βγ) \quad \textbf{(1)}$$

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ) = \frac{αβ.ΑΓ}{4R} + \frac{γδ.ΑΓ}{4R} = \frac{1}{4R}ΑΓ(αβ+γδ) \quad \textbf{(2)}$$

(1) και (2) $\Rightarrow$ ΒΔ (αδ + βγ) = ΑΓ (αβ + γδ) $\Rightarrow \frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$