10.1 – 10.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 217 – 218
Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού
i) Τετραγώνου
ii) Ορθογωνίου
iii) Παραλληλογράμμου
iv) Τριγώνου
v) Τραπεζίου

Απάντηση

i) $E = \alpha^2$ **ii)** $E = \alpha\ \beta$ **iii)** $E = \beta\ \upsilon$ **iv)** $E = \frac{1}{2}\beta\ \upsilon$ **v)** $E = \frac{(B+\beta)}{2}\upsilon$

2.
Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16, πόσο είναι το εμβαδόν του;
Λύση
Η πλευρά του τετραγώνου α είναι : $\alpha = 4$, άρα $E = 16$

3.
Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha = 9$, $\beta = 4$ και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευρά x . Να βρεθεί το x
Λύση
$x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

4.
Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha < \beta$. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα υ_α και υ_β ;
Λύση
Είναι $\alpha\ \upsilon_\alpha = \beta\ \upsilon_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} < 1$ αφού $\alpha < \beta$ άρα $\upsilon_\beta < \upsilon_\alpha$.

5.

Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 , με τι ισούται το γινόμενο μίας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;

Λύση

Αν α είναι η πλευρά του ρόμβου και υ το αντίστοιχο σ' αυτή ύψος τότε είναι

$E = \dfrac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \alpha\,\upsilon$ όπου δ_1 , δ_2 οι διαγώνιοι του ρόμβου. Οπότε $\alpha\,\upsilon = 10$

6.

Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m με έναν άλλο σχήματος ορθογωνίου με πλάτος 40 και περίμετρο ίση με την περίμετρο του τετραγώνου . Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από αυτή την ανταλλαγή ; Αιτιολογήστε την απάντηση .

Λύση

Η περίμετρος του τετραγώνου είναι 240m.

Το μήκος του ορθογωνίου είναι $\dfrac{240-80}{2} = 80$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = 60^2 = 3600m^2$

και του ορθογωνίου είναι $E' = 40 \cdot 80 = 3200m^2$

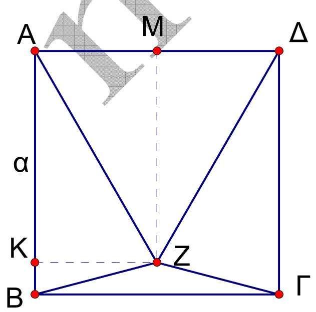
Άρα ο χωρικός έχασε από την ανταλλαγή .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α = 4 κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.

Λύση



$(ΑΒΓΔ) = \alpha^2 = 4^2 = 16$

Τρ.ΖΑΔ ισόπλευρο πλευράς α $\Rightarrow$

$(ΖΑΔ) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

Φέρουμε $ΖΚ \perp ΑΒ$ και $ΖΜ \perp ΑΔ$.

Τότε $ΖΚ = ΜΑ = \dfrac{\alpha}{2}$

$(ΑΒΖ) = \dfrac{1}{2}\,ΑΒ\,.\,ΖΚ = \dfrac{1}{2}\,\alpha\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4^2}{4} = 4$

$(ΖΒΓ) = (ΑΒΓΔ) - (ΑΒΖ) - (ΔΓΖ) - (ΖΑΔ)$

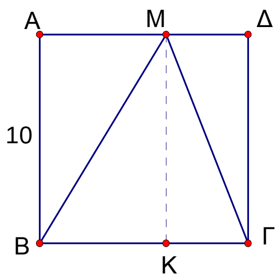
$= 16 - 2\,.\,4 - 4\sqrt{3} \;=\; 16 - 8 - 4\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}$

2.

Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι Α: 25, Β: 40, Γ: 50, Δ: 75, Ε: 100.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση



Φέρουμε $MK \perp B\Gamma$

$(MB\Gamma) = \frac{1}{2}\,B\Gamma . MK = \frac{1}{2}\,10 . 10 = 50,$

επειδή όμως $(AB\Gamma\Delta) = 10^2 = 100 \Rightarrow$

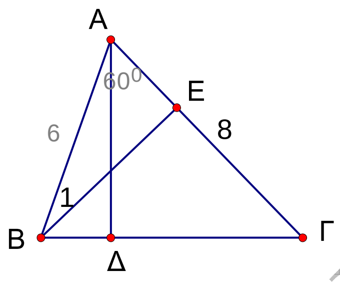
$(AMB) + (\Delta M\Gamma) = 50.$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A} = 60^o$. Να βρεθούν:

i) το ύψος υ_β, **ii)** το εμβαδόν (ΑΒΓ), **iii)** το ύψος υ_α.

Λύση



i)

$\hat{A} = 60^o \Rightarrow \hat{B}_1 = 30^0 \Rightarrow AE = \frac{AB}{2} = 3.$

Πυθαγόρειο στο τρ.ΕΑΒ:

$\upsilon_\beta^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow \upsilon_\beta = 3\sqrt{3}$

ii)

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,A\Gamma . BE = \frac{1}{2}\,8 . 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

iii)

ΕΓ = 8 – 3 = 5

Πυθαγόρειο στο τρ.ΕΒΓ: $B\Gamma^2 = \Gamma E^2 + BE^2 = 5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 25 + 27 = 52 \Rightarrow$

$B\Gamma = 2\sqrt{13}$

$(AB\Gamma) = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\,B\Gamma . A\Delta = 12\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\,2\sqrt{13} . A\Delta = 12\sqrt{3}$

$A\Delta = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{39}}{13}$

4.

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση

Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε $x + y = 7$, οπότε $y = 7 - x$ και

(Πυθαγόρειο): $x^2 + y^2 = 5^2$

$$x^2 + (7-x)^2 = 25$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \text{ ή } x = 4$$

Για $x = 3$ η εξίσωση $y = 7 - x \Leftrightarrow y = 4$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = xy = 3 \cdot 4 = 12$

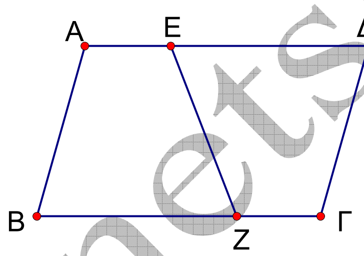
5.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος υ = 5. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.

i) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.

Λύση



i)
(ΑΒΓΔ) = 10·5 = 50

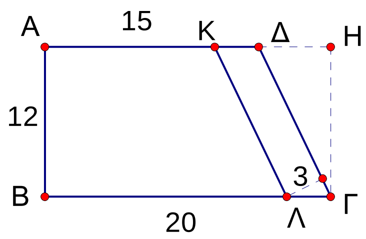
ii)
(ΑΕΖΒ) = (ΕΖΓΔ) αφού έχουν ίσες βάσεις και ίδιο ύψος. Άρα 25 το καθένα.

6.

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ || ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$,

ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μία λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;

Λύση



Έστω ΚΛΓΔ παραλληλόγραμμο ο καινούργιος δρόμος.
Για να υπολογίσουμε την πλευρά του ΓΔ, φέρουμε $ΓΗ \perp ΑΔ$.
Τότε ΓΗ = ΒΑ = 12 και
ΔΗ = ΑΗ – ΑΔ = ΒΓ – ΑΔ = 20 – 15 = 5.

Πυθαγόρειο στο τρ.ΓΗΔ: $ΓΔ^2 = ΓΗ^2 + ΗΔ^2$
$= 12^2 + 5^2$
$= 144 + 25 = 169 = 13^2 \Rightarrow ΓΔ = 13.$

Άρα (ΚΛΓΔ) = ΓΔ ·3 = 13·3 = 39

Όμως (ΑΒΓΔ) = $\frac{ΒΓ + ΑΔ}{2}ΑΒ = \frac{20+15}{2}12 = 35 \cdot 6 = 210$

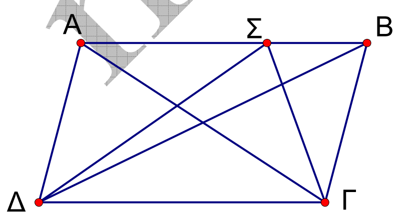
Άρα (ΑΒΛΚ) = 210 – 39 = 171 m^2.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι (ΣΔΒ) = (ΣΓΒ).

Τούτο συμβαίνει διότι έχουν ίδια βάση ΣΒ και αντίστοιχα ύψη ίσα, αφού ΓΔ || ΣΒ.

2.

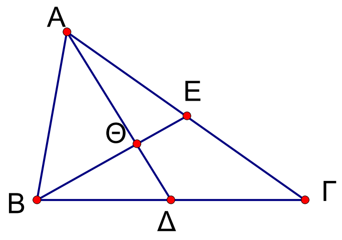
Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ),

ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ)

iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

Λύση



i)
Έχουν ίσες βάσεις ΑΕ = ΕΓ και ίδιο ύψος από το Β

ii)
Θυμόμαστε ότι κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα

Έτσι (ΒΕΓ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓ) και (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓ), οπότε (ΒΕΓ) = (ΑΒΔ).

Αφαιρούμε, από τα δύο μέλη, το (ΒΘΔ).

Τότε (ΔΓΕΘ) = (ΑΘΒ)

iii)

Ομοίως είναι (ΑΒΔ) = (ΑΒΕ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓ).

Αφαιρούμε, από τα δύο πρώτα μέλη, το (ΑΒΘ).

3.

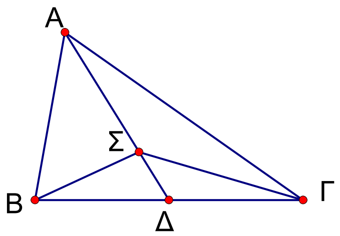
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ)

ii) ΑΒ . ΣΖ = ΑΓ. ΣΕ και

iii) (ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = $\frac{1}{3}$(ΑΒΓ)

Λύση

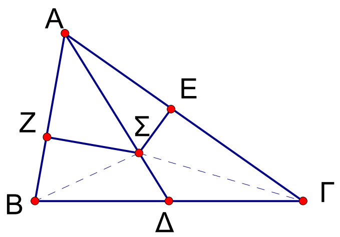


i)

ΑΔ διάμεσος του τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow$ (ΑΒΔ) = (ΑΔΓ)

ΣΔ διάμεσος του τρ.ΣΒΓ $\Rightarrow$ (ΣΒΔ) = (ΣΔΓ)

Αφαιρούμε κατά μέλη

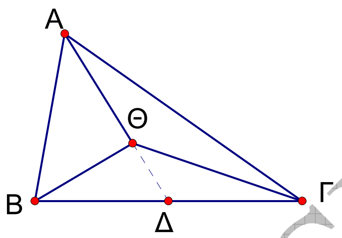


ii)

(i) $\Rightarrow$ (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ)

$\frac{1}{2}$ ΑΒ . ΣΖ = $\frac{1}{2}$ ΑΓ. ΣΕ $\Rightarrow$

ΑΒ . ΣΖ = ΑΓ. ΣΕ



iii)

Κατά το ii) έχουμε (ΑΒΘ) = (ΑΓΘ) και

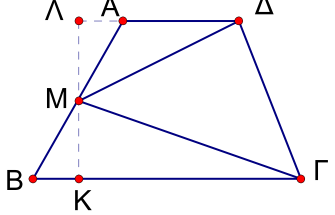
ομοίως = (ΒΓΘ).

Άρα το καθένα = $\frac{1}{3}$(ΑΒΓ)

4.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ || ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).

Λύση



Έστω ΚΜΛ το ύψος του τραπεζίου.

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}(ΒΓ + ΑΔ) .ΚΛ$$

$$= ΒΓ \cdot \frac{ΚΛ}{2} + ΑΔ \cdot \frac{ΚΛ}{2}$$

$$= ΒΓ.\ ΜΚ + ΑΔ\ .\ ΜΛ$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} ΒΓ.\ ΜΚ + \frac{1}{2} ΑΔ\ .\ ΜΛ \right)$$

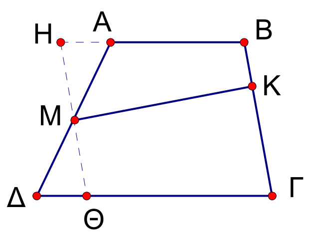
$$= 2\left[(ΜΒΓ)+(ΜΑΔ)\right].$$

Άρα και (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).

5.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

Λύση



Έστω ΑΒΓΔ το τραπέζιο, Μ το μέσο της ΑΔ και ΜΚ η απόσταση του Μ από τη ΒΓ.
Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ) = ΒΓ. ΜΚ

Από το Μ φέρουμε ||ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΔΓ στα Η, Θ αντίστοιχα.

Τότε τρ.ΜΔΘ = τρ.ΜΑΗ άρα και ισεμβαδικά και ΗΒΓΘ παραλληλόγραμμο
.
Έχουμε (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓΘΜ) + (ΜΔΘ)
= (ΑΒΓΘΜ) + (ΜΑΗ)
= (ΗΒΓΘ) = β.υ = ΒΓ. ΜΚ

6.

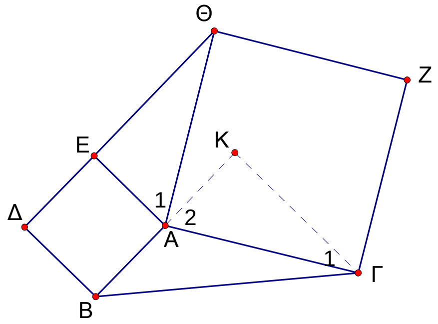
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 1$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{A} = 120^o$. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:

i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ

ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και

iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5+\sqrt{3}$

Λύση



i)

$\hat{A} = 120^o \Rightarrow \hat{A}_1 = 60^o$

Νόμος συνημιτόνων στο τρ.ΑΕΘ

$E\Theta^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\sigma\upsilon\nu 60^0$

$= 1 + 4 - 4\,\frac{1}{2} = 5 - 2 = 3$

Άρα $E\Theta = \sqrt{3}$

ii)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, στο τρίγωνο ΕΑΘ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, άρα είναι ορθογώνιο στο Ε. Άρα τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά

iii)

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε το ύψος του ΓΚ.

$\hat{A} = 120^o \Rightarrow \hat{A}_2 = 30^o \Rightarrow AK = \frac{A\Gamma}{2} = 1$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΚΑΓ $\Rightarrow K\Gamma^2 = A\Gamma^2 - AK^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

Άρα $K\Gamma = \sqrt{3}$

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB\,.\,\Gamma K = \frac{1}{2}1\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(1)**

$(AE\Theta) = \frac{1}{2}E\Theta.\,AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}\;1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(2)**

$(AB\Delta E) = 1^2 = 1$ **(3)**

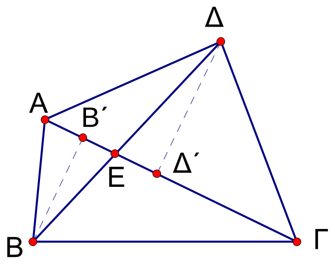
$(A\Gamma Z\Theta) = 2^2 = 4$ **(4)**

$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow (B\Gamma Z\Theta E\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 4 = 5 + \sqrt{3}$

7.

Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{2}$ ΑΓ. ΒΔ ημω.

Λύση



$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ)$$

$$= \frac{1}{2}ΑΓ.\,ΒΒ΄ + \frac{1}{2}ΑΓ.\,ΔΔ΄$$

$$= \frac{1}{2}ΑΓ.\,(ΒΒ΄ + ΔΔ΄)$$

$$= \frac{1}{2}ΑΓ.\,(ΕΒ.\,ημω + ΕΔ.\,ημω)$$

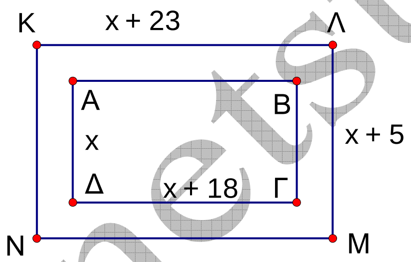
$$= \frac{1}{2}ΑΓ.\,(ΕΒ + ΕΔ)ημω$$

$$= \frac{1}{2}ΑΓ.\,ΒΔ\,ημω$$

8.

Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει, γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού, μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του $695\,m^2$. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

Λύση



Έστω ΑΒΓΔ το αρχικό οικόπεδο με πλάτος ΑΔ = x και μήκος ΔΓ = x + 18, και ΚΛΜΝ το οικόπεδο μετά την επέκταση με ΛΜ = x + 5 και ΚΛ = x + 23.

Είναι (ΚΛΜΝ) – (ΑΒΓΔ) = 695 $\Rightarrow$

(x + 23) (x +5) – (x + 18) x = 695

$x^2 + 5x + 23x + 115 - x^2 - 18x = 695$

10 x = 580 $\Rightarrow$ x = 58 το πλάτος και

58 + 18 = 76 το μήκος.

Σύνθετα Θέματα

1.

Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ = ΑΒ, ΓΗ = ΒΓ, ΔΘ = ΓΔ και ΑΙ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ)

ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και

iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ)

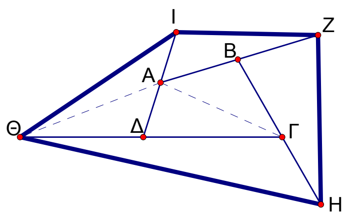
Λύση

Θυμίζουμε ότι: Κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

i)

ΘΑ διάμεσος του τριγώνου ΘΔΙ $\Rightarrow$ (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ)

ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΘΓ $\Rightarrow$ (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ)



ii)

i) $\Rightarrow$ (ΙΘΔ) = 2(ΑΔΓ) και ομοίως

(ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓ)

Προσθέτουμε κατά μέλη

(ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = $2\left[(\text{ΑΔΓ})+(\text{ΑΒΓ})\right]$

(ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ)

iii)

Σύμφωνα με το ii) θα έχουμε (ΘΓΗ) + (ΙΑΖ) = 2(ΑΒΓΔ)

Άρα (ΙΖΗΘ) = (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) + (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) + (ΑΒΓΔ)

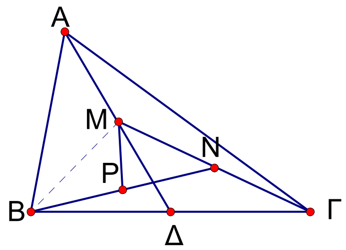
= 2(ΑΒΓΔ) + 2(ΑΒΓΔ) + (ΑΒΓΔ)

= 5(ΑΒΓΔ).

2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι $(MNP) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$.

Λύση



Φέρουμε το τμήμα ΒΜ.

ΜΡ διάμεσος του τριγώνου ΜΒΝ $\Rightarrow$

$(MNP) = \frac{1}{2}(MBN)$ **(1)**

ΒΝ διάμεσος του τριγώνου ΒΜΓ $\Rightarrow$

$(MBN) = \frac{1}{2}(BM\Gamma)$ **(2)**

$$(1) \Rightarrow (MNP) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(BM\Gamma) = \frac{1}{4}(BM\Gamma) = \frac{1}{4}\left[(MB\Delta)+(M\Delta\Gamma)\right] \quad \textbf{(3)}$$

ΒΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΔ $\Rightarrow$ $(MB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ και

ΓΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΔΓ $\Rightarrow$ $(M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma)$

$$(3) \Rightarrow (MNP) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(AB\Delta)+\frac{1}{2}(A\Delta\Gamma)\right] = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[(AB\Delta)+(A\Delta\Gamma)\right] = \frac{1}{8}(AB\Gamma).$$

3.

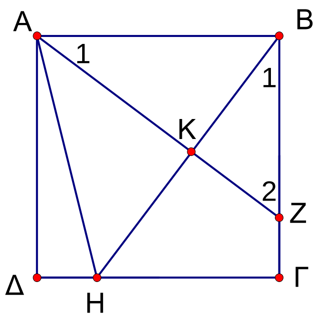
Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ZΓ = HΔ = \frac{α}{4}$.

i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.

ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.

iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

Λύση



i)

τρ.ΑΒΖ = τρ.ΒΓΗ αφού είναι ορθογώνια με

$AB = BΓ$ και $BZ = ΓH = \frac{3}{4}α \quad \Rightarrow$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

Αλλά από το ορθ. τρίγωνο ΑΒΖ είναι

$\hat{A}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o$, άρα $\hat{B}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o$

Έτσι, στο τρίγωνο ΚΒΖ είναι $\hat{K} = 90^o$.

ii)

Πυθαγόρειο στο τρ.ΒΑΖ: $AZ^2 = AB^2 + BZ^2 = α^2 + \left(\frac{3}{4}α\right)^2 = α^2 + \frac{9}{16}α^2 = \frac{25}{16}α^2$

Άρα $AZ = \frac{5}{4}α$

Στο τρ.ΒΑΖ με ύψος ΒΚ: $AB^2 = AZ \,.\, AK \quad \Rightarrow$

$$α^2 = \frac{5}{4}α \,.\, AK \quad \Rightarrow \quad AK = \frac{4}{5}α$$

Πυθαγόρειο στο τρ.ΑΔΗ: $AH^2 = AΔ^2 + ΔH^2 = α^2 + \left(\frac{1}{4}α\right)^2 = α^2 + \frac{1}{16}α^2 = \frac{17}{16}α^2$

Άρα $AH = \frac{α\sqrt{17}}{4}$

Πυθαγόρειο στο τρ.ΑΚΗ: $KH^2 = AH^2 - AK^2 = \frac{17}{16}α^2 - \left(\frac{4}{5}α\right)^2$

$$= \frac{17}{16}α^2 - \frac{16}{25}α^2$$

$$= \frac{425-256}{16.25}α^2 = \frac{169}{16.25}α^2$$

Άρα $KH = \frac{13}{20}α$

iii)

$(AKHΔ) = (AKH) + (AΔH) = \frac{1}{2}AK \,.\, KH + \frac{1}{2}AΔ \,.\, ΔH = \frac{1}{2}\frac{4}{5}α\frac{13}{20}α + \frac{1}{2}α\frac{α}{4} =$

$$\frac{52}{200}α^2 + \frac{1}{8}α^2 = \frac{52}{200}α^2 + \frac{25}{200}α^2 = \frac{77}{200}α^2$$

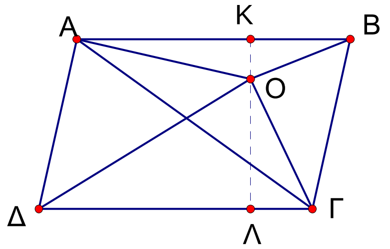
4.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και

ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ)

Λύση



i)
Φέρουμε το ύψος ΚΟΛ.

$$(ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΟΚ + \frac{1}{2}ΔΓ \cdot ΟΛ =$$

$$= \frac{1}{2}ΔΓ\,(ΟΚ + ΟΛ) =$$

$$= \frac{1}{2}ΔΓ \cdot ΚΛ = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά, κάθε διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα και, κατά συνέπεια ισεμβαδικά τρίγωνα. Δηλαδή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ)

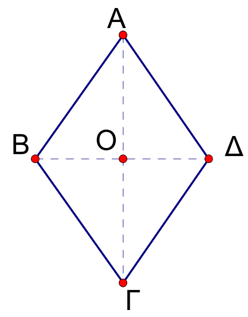
ii)
Στα δύο μέλη της αποδεικτέας ισότητας προσθέτουμε το (ΟΑΒ), οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) + (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ) + (ΟΑΒ), ή αρκεί

(ΑΒΓ) = (ΟΓΔ) + (ΟΑΒ), που ισχύει από το i).

5.

Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) $\le$ (ΚΛΜΝ)

Λύση



Έστω δ_1, δ_2 οι διαγώνιοι του ρόμβου και Ο το κέντρο του.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2}\delta_1\delta_2 \le \alpha^2$,

ή αρκεί $\delta_1\delta_2 \le 2\alpha^2$ **(A)**

Πυθαγόρειο στο τρ.ΟΑΒ: $\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 = \alpha^2 \Rightarrow$

$\frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} = \alpha^2 \Rightarrow \frac{\delta_1^2}{2} + \frac{\delta_2^2}{2} = 2\alpha^2$.

Από την (Α), αρκεί να αποδείξουμε ότι $\delta_1\delta_2 \le \frac{\delta_1^2}{2} + \frac{\delta_2^2}{2}$

ή αρκεί $2\delta_1\delta_2 \le \delta_1^2 + \delta_2^2$

ή αρκεί $0 \le \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_2$

ή αρκεί $0 \le (\delta_1 - \delta_2)^2$, που ισχύει.