Ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 204
Γενικές $9^{ου}$ κεφαλαίου

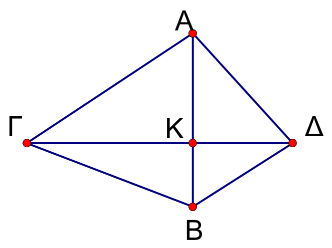
1.

Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε $ΑΒ \perp ΓΔ$ είναι να ισχύει $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$.

Λύση

Ευθύ:

Έχουμε υπόθεση $ΑΒ \perp ΓΔ$. Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$



Έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ, ΓΔ.

Πυθαγόρειο στο τρ.ΚΑΓ : $ΑΓ^2 = ΚΑ^2 + ΚΓ^2$

Πυθαγόρειο στο τρ.ΚΑΔ : $ΑΔ^2 = ΚΑ^2 + ΚΔ^2$

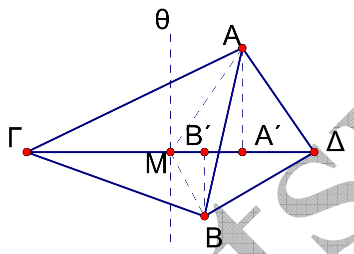
Αφαιρούμε κατά μέλη: $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΚΓ^2 - ΚΔ^2$

Ομοίως $ΒΓ^2 - ΒΔ^2 = ΚΓ^2 - ΚΔ^2$

Άρα $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$

Αντίστροφο:

Έχουμε υπόθεση $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$. Θα αποδείξουμε ότι $ΑΒ \perp ΓΔ$.



Έστω $ΑΓ > ΑΔ$,

τότε $ΑΓ^2 > ΑΔ^2 \Rightarrow ΑΓ^2 - ΑΔ^2 > 0$.

Από την υπόθεση $\Rightarrow ΒΓ^2 - ΒΔ^2 > 0$

$ΒΓ^2 > ΒΔ^2$

$ΒΓ > ΒΔ$.

Άρα τα Α, Β βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη μεσοκάθετο Μθ του τμήματος ΓΔ.

Φέρουμε ΑΑ΄, ΒΒ΄ κάθετες στη ΓΔ, οπότε και τα σημεία Α΄, Β΄ θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο.

$2^ο$ Θ. διαμέσων στο τρ.ΑΓΔ: $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = 2\, ΓΔ \,.\, ΜΑ΄$

$2^ο$ Θ. διαμέσων στο τρ.ΒΓΔ: $ΒΓ^2 - ΒΔ^2 = 2\, ΓΔ \,.\, ΜΒ΄$

Άρα $2\, ΓΔ \,.\, ΜΑ΄ = 2\, ΓΔ \,.\, ΜΒ΄ \Rightarrow ΜΑ΄ = ΜΒ΄ \Rightarrow$ τα Α΄, Β΄ συμπίπτουν,

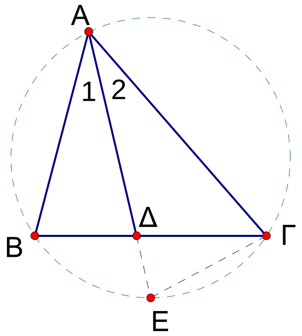
άρα ΑΑ΄Β΄Β ευθεία κάθετη στη ΓΔ .

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι

ΑΒ . ΑΓ = $ΑΔ^2$ + ΒΔ . ΔΓ.

Λύση



Γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.
Η προέκταση της διχοτόμου ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε.

ΑΔΕ, ΒΔΓ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$
ΔΑ .ΔΕ = ΔΒ. ΔΓ
ΔΑ (ΕΑ – ΔΑ) = ΔΒ. ΔΓ
ΔΑ .ΕΑ – $ΑΔ^2$ = ΔΒ. ΔΓ
ΔΑ. ΕΑ = $ΑΔ^2$ + ΔΒ. ΔΓ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΑ. ΕΑ = ΑΒ .ΑΓ ,

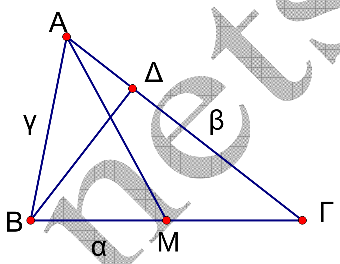
ή ότι $\dfrac{ΔΑ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΕΑ}$,

ή ότι τρ.ΔΑΒ όμοιο του τρ.ΓΑΕ,
που ισχύει, αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{B} = \hat{E}$. (σε ίδιο τόξο)

3.

Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ ύψος του, να αποδείξετε ότι $AM^2 = BM^2$ +ΑΔ. ΑΓ.

Λύση



Θ. επέκτασης του Πυθαγορείου:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2ΑΓ. ΑΔ$

$2ΑΓ. ΑΔ = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$

$ΑΓ. ΑΔ = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}$

Άρα $BM^2 + ΑΔ. ΑΓ = \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} =$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha^2}{4} = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \mu_\alpha^2$$

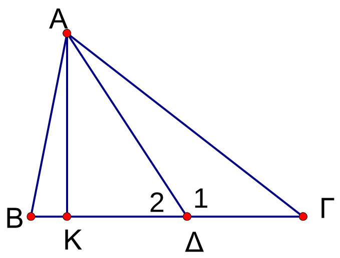
4.
Θεώρημα Stewart

i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

$$ΒΔ.\ ΑΓ^2 + ΔΓ.\ ΑΒ^2 = ΒΓ\ (ΑΔ^2 + ΒΔ.\ ΔΓ).$$

ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart, όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ).

Λύση



i)

α) Όταν η ΑΔ δεν είναι ⊥ ΒΓ

Έστω $\hat{Δ}_1$ αμβλεία και $\hat{Δ}_2$ οξεία.

Φέρουμε ΑΚ ⊥ ΒΓ

Τρ.ΑΔΓ: $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 + 2\ ΔΓ.\ ΔΚ$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με ΒΔ

$ΒΔ.\ ΑΓ^2 = ΒΔ.\ ΑΔ^2 + ΒΔ.\ ΔΓ^2 + 2\ ΒΔ.ΔΓ.\ ΔΚ$ **(1)**

Τρ.ΑΔΒ: $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 - 2\ ΔΒ.\ ΔΚ$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με ΔΓ

$ΔΓ.\ ΑΒ^2 = ΔΓ.\ ΑΔ^2 + ΔΓ.ΔΒ^2 - 2\ ΔΓ.ΔΒ.\ ΔΚ$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $ΒΔ.\ ΑΓ^2 + ΔΓ.\ ΑΒ^2 = ΑΔ^2\ (ΒΔ + ΔΓ) + ΔΓ.\ ΔΒ\ (ΔΓ + ΔΒ)$ $\Rightarrow$

$ΒΔ.\ ΑΓ^2 + ΔΓ.\ ΑΒ^2 = ΑΔ^2.\ ΒΓ + ΔΓ.\ ΔΒ.\ ΒΓ$ $\Rightarrow$

$ΒΔ.\ ΑΓ^2 + ΔΓ.\ ΑΒ^2 = ΒΓ(\ ΑΔ^2 + ΔΓ.\ ΔΒ)$

β) Όταν ΑΔ ⊥ ΒΓ

Ακολουθούμε ίδια πορεία, αλλά με Πυθαγόρεια θεωρήματα.

ii) Στην ισότητα που αποδείξαμε στο i), όπου ΑΓ θέτουμε ΑΒ.

Τότε $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ.\ ΔΓ$

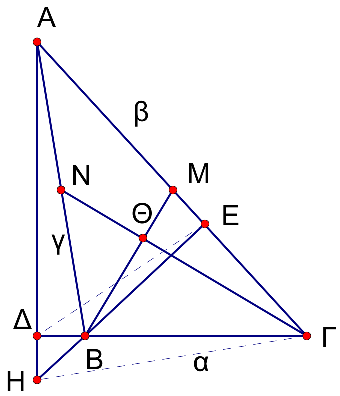
5.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta^2+\gamma^2 = 5\alpha^2$

ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $ΑΗ \cdot ΑΔ = 2\alpha^2$.

Λύση



i)

Έστω Θ το κέντρο βάρους

τρ.ΘΒΓ ορθογώνιο :

$ΘΒ^2 + ΘΓ^2 = \alpha^2$

$\left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \alpha^2$

$\frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 = \alpha^2$

$4\mu_\beta^2 + 4\mu_\gamma^2 = 9\alpha^2$

$2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 = 9\alpha^2$

$\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$.

ii)

Φέρουμε το ύψος ΒΕ και τις ΔΕ, ΗΓ.
Τα σημεία Δ, Ε βλέπουν το τμήμα ΗΓ με ορθή γωνία $\Rightarrow$
ΔΕΓΗ εγγράψιμο $\Rightarrow$ $ΑΗ \cdot ΑΔ = ΑΓ \cdot ΑΕ$ **(1)**

$\hat{Α}$ οξεία $\Rightarrow$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\,ΑΓ \cdot ΑΕ$ $\Rightarrow$

$\alpha^2 = 5\alpha^2 - 2\,ΑΓ \cdot ΑΕ$

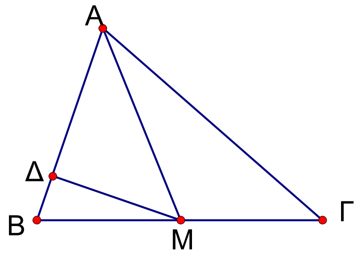
$2\,ΑΓ \cdot ΑΕ = 4\alpha^2$

$ΑΓ \cdot ΑΕ = 2\alpha^2$

Η (1) $\Rightarrow$ $ΑΗ \cdot ΑΔ = 2\alpha^2$

6.
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΒΓ^2 = 3\ ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 4\ ΑΒ \cdot ΑΔ$.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΜΒ έχουμε

$$ΒΜ^2 = μ_α^2 + γ^2 - 2\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$\left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{2β^2 + 2γ^2 - α^2}{4} + γ^2 - 2\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$\frac{α^2}{4} = \frac{2β^2 + 2γ^2 - α^2}{4} + γ^2 - 2\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

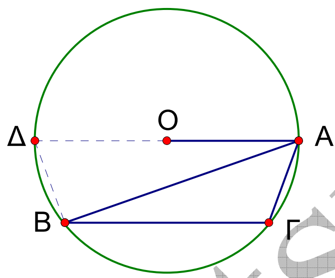
$$α^2 = 2β^2 + 2γ^2 - α^2 + 4γ^2 - 8\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$2α^2 = 2β^2 + 6γ^2 - 8\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$α^2 = β^2 + 3γ^2 - 4\ ΑΒ \cdot ΑΔ$$

7.
Δίνεται κύκλος (Ο, R), μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ είναι σταθερό.

Λύση



Φέρουμε τη διάμετρο ΑΟΔ και τη χορδή ΒΔ.
Το τραπέζιο ΑΓΒΔ είναι εγγεγραμμένο, άρα είναι ισοσκελές, δηλαδή ΔΒ = ΑΓ

$Α\hat{Β}Δ = 1∟$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο.

Πυθαγόρειο στο τρ.ΒΑΔ: $ΑΒ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2$

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = (2R)^2$$

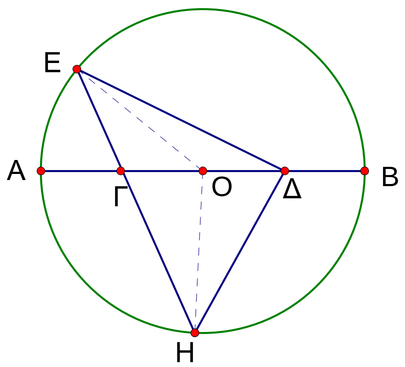
$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 4R^2$$

σταθερό.

8.

Δίνεται κύκλος (O, R), μία διάμετρος AB και Γ, Δ τα μέσα των OA, OB αντίστοιχα. Αν μία χορδή EH που διέρχεται από το Γ είναι $EH = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}H = 1\llcorner$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E^2 + \Delta H^2 = EH^2$

1^o Θ. διαμέσων στο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$:

$$E\Delta^2 + E\Gamma^2 = 2\,EO^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2}$$

$$E\Delta^2 + E\Gamma^2 = 2\,R^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{5R^2}{2}$$

$$E\Delta^2 = \frac{5R^2}{2} - E\Gamma^2 \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως στο τρίγωνο $H\Delta\Gamma$: $$H\Delta^2 = \frac{5R^2}{2} - H\Gamma^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \Delta E^2 + \Delta H^2 = 5\,R^2 - (E\Gamma^2 + H\Gamma^2) \quad \textbf{(3)}$$

$$E\Gamma + H\Gamma = \frac{R\sqrt{13}}{2} \Rightarrow (E\Gamma + H\Gamma)^2 = \frac{13R^2}{4} \Rightarrow$$

$$E\Gamma^2 + H\Gamma^2 + 2\,\Gamma E \cdot \Gamma H = \frac{13R^2}{4} \Rightarrow$$

$$E\Gamma^2 + H\Gamma^2 = \frac{13R^2}{4} - 2\,\Gamma E \cdot \Gamma H \quad \textbf{(4)}$$

$E\Gamma H$, $A\Gamma B$ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow$ $\Gamma E \cdot \Gamma H = \Gamma A \cdot \Gamma B = \frac{R}{2}\,\frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$

$$(4) \Rightarrow E\Gamma^2 + H\Gamma^2 = \frac{13R^2}{4} - 2\,\frac{3R^2}{4} = \frac{13R^2}{4} - \frac{6R^2}{4} = \frac{7R^2}{4}$$

$$(3) \Rightarrow \Delta E^2 + \Delta H^2 = 5\,R^2 - \frac{7R^2}{4} = \frac{13R^2}{4} = \left(\frac{R\sqrt{13}}{2}\right)^2 = EH^2$$