11.4 – 11.5

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 245

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στην στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
Μήκος κύκλου ακτίνας R	αR
Μήκος τόξου μ^o σε κύκλο ακτίνα R	$2\pi R$
Μήκος τόξου α rad σε κύκλο ακτίνα R	$\frac{\pi R \mu}{360}$
	$2\alpha R$
	$\frac{\pi R \mu}{180}$

2.

Το μήκος L τόξου ενός κύκλου ακτίνας R με χορδή λ_6 είναι

Α.$6R$ Β. πR Γ. $\frac{1}{3}\pi R$ Δ.$2\pi R$ Ε. $\frac{1}{3}R$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντηση

Λύση

Σωστό είναι το Γ , αφού η χορδή του τόξου είναι η λ_6 , το τόξο θα είναι 60^o,

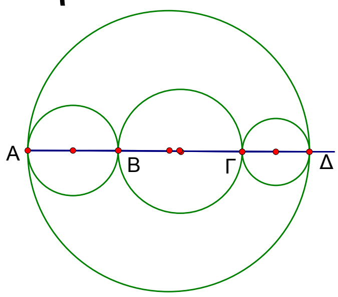
άρα το μήκος του είναι $\ell = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{1}{3}\pi R$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν L_1, L_2, L_3 και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

Λύση



$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3 &= 2\pi\frac{AB}{2} + 2\pi\frac{B\Gamma}{2} + 2\pi\frac{\Gamma\Delta}{2} \\ &= \pi(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta) \\ &= \pi\ A\Delta \\ &= 2\pi\frac{A\Delta}{2} = L \end{aligned}$$

2.

Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm.

Λύση

Η ακτίνα του κύκλου θα είναι το απόστημα $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$L = 2\pi 5\sqrt{3} = 10\pi\sqrt{3}$

3.

Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 5cm.

Λύση

Οι μοίρες του τόξου είναι $\mu = \frac{360}{10} = 36$.

Το μήκος του τόξου θα είναι $\ell = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi\cdot 5\cdot 36}{180} = \pi$ cm

4.

Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι $R = 2\rho$.

Λύση

Ο κύκλος ακτίνας R έχει μήκος $2\pi R$, άρα διανύει απόσταση $\nu \cdot 2\pi R$.

Ο κύκλος ακτίνας ρ έχει μήκος $2\pi\rho$, άρα διανύει απόσταση $2\nu \cdot 2\pi\rho$.

Διανύουν, όμως, την ίδια απόσταση

Άρα $\quad \nu \cdot 2\pi R = 2\nu \cdot 2\pi\rho \quad \Rightarrow \quad R = 2\rho$.

5.

Δίνεται κύκλος (O,R) και τα διαδοχικά του σημεία A, B, Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ ως συνάρτηση του R.

Λύση

$$AB = R\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 90^{o} \quad \Rightarrow \quad \ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$$

$$B\Gamma = R\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{B\Gamma} = 120^{o} \quad \Rightarrow \quad \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi R 120}{180} = \frac{2\pi R}{3}$$

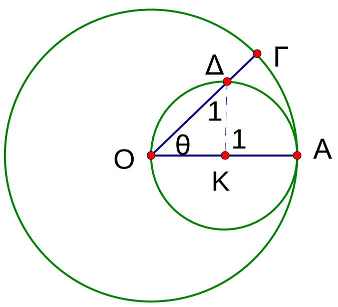
$$\overset{\frown}{\Gamma A} = 360^{o} - 90^{o} - 120^{o} = 150^{o} \quad \Rightarrow \quad \ell_{\overset{\frown}{\Gamma A}} = \frac{\pi R 150}{180} = \frac{5\pi R}{6}$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Με διάμετρο την ακτίνα OA ενός κύκλου (O,R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (K) Στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.

Λύση



Έστω θ σε μοίρες η γωνία $A\hat{O}\Gamma$

$K\Delta = KO \quad \Rightarrow \quad \hat{\Delta}_1 = \theta$

$\hat{K}_1 = 2\theta$ σαν εξωτερική του τριγώνου $KO\Delta$

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi R\theta}{180}$$

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Delta}} = \frac{\pi \frac{R}{2} 2\theta}{180} = \frac{\pi R\theta}{180}$$

Άρα $\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \ell_{\overset{\frown}{A\Delta}}$

2.

Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ισούται με το ημιάθροισμα ή την ημιδιαφορά των μηκών αυτών, όταν αντίστοιχα ο κύκλος αυτός περιέχει στο εσωτερικό του ή όχι το μικρότερο κύκλο.

Λύση

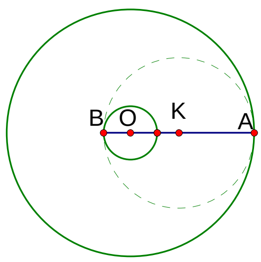
Έστω O το κέντρο των δύο ομόκεντρων κύκλων και K το κέντρο του τρίτου.

Ονομάζουμε A, B τα σημεία επαφής του κύκλου (K) με το μεγάλο και μικρό κύκλο (O) αντίστοιχα.
Οπότε τα A και B θα ανήκουν στη διάκεντρο OK.

Ονομάζουμε L_1 το μήκος του μεγάλου κύκλου (O), L_2 του μικρού και L το μήκος του κύκλου (K).

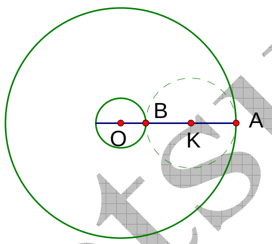
- Όταν ο κύκλος (K) περιέχει στο εσωτερικό του το μικρό κύκλο (O).

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 2\,\pi\, OA + 2\,\pi\, OB \\ &= 2\,\pi\,(OA + OB) \\ &= 2\,\pi\,(AB) \\ &= 2\,\pi\,(2\,KA) \\ &= 2\,(2\,\pi\, KA) = 2\,L \end{aligned}$$



- Όταν κύκλος (K) δεν περιέχει στο εσωτερικό του το μικρό κύκλο (O).

$$\begin{aligned} L_1 - L_2 = {} & 2\,\pi\, OA - 2\,\pi\, OB \\ & 2\,\pi\,(OA - OB) \\ & 2\,\pi\,(AB) \\ & 2\,\pi\,(2\,KA) \\ & 2\,(2\,\pi\, KA) = 2\,L \end{aligned}$$



3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 13cm$, $\beta = 14cm$ και $\gamma = 15cm$. Να βρείτε το μήκος

i) του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

ii) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

Λύση

$2\tau = \alpha + \beta + \gamma = 13 + 14 + 15 = 42 \quad \Rightarrow \quad \tau = 21,\ \tau - \alpha = 8,\ \tau - \beta = 7,\ \tau - \gamma = 6$

$E = (AB\Gamma) = \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = \sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2} = 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84$

Γνωρίζουμε ότι $E = \tau\,\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \dfrac{E}{\tau} = \dfrac{84}{21} = 4$

Άρα $L_{\varepsilon\gamma\gamma} = 2\,\pi\, 4 = 8\,\pi$ cm

Γνωρίζουμε ότι $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \quad \Rightarrow \quad 4RE = \alpha\beta\gamma$

$4\,R.84 = 13.14.15$

$336\,R = 2730$

$R = \dfrac{2730}{336} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{65}{4}$

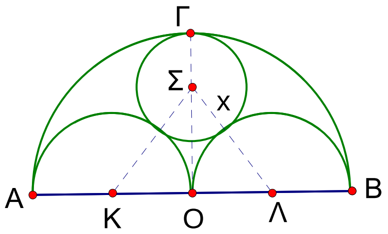
Άρα $L_{\pi\varepsilon\rho.} = 2\pi\,\dfrac{65}{4} = \dfrac{65\pi}{2}$

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται ημικύκλιο (O,R) διαμέτρου AB. Με διαμέτρους τις AO και OB γράφουμε, στο εσωτερικό του πρώτου, ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.

Λύση



Έστω (Σ , x) ο κύκλος που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων.

Θα είναι $ΣΚ = x + \frac{R}{2} = ΣΛ$

Άρα το Σ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ΟΓ του τμήματος ΚΛ και

θα είναι $ΟΣ = ΟΓ - ΣΓ = R - x$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΣΟΛ: $ΟΣ^2 + ΟΛ^2 = ΣΛ^2$

$$(R-x)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{R}{2}\right)^2$$

$$R^2 - 2Rx + x^2 + \frac{R^2}{4} = x^2 + xR + \frac{R^2}{4}$$

$$R^2 = 3Rx$$

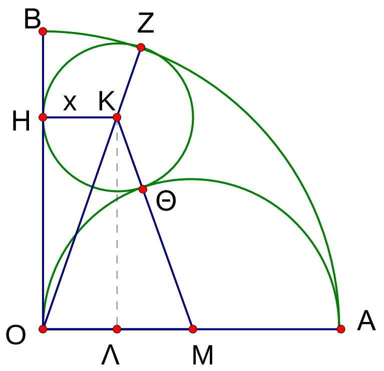
$$x = \frac{R}{3}$$

Άρα $L = 2\,\pi\, x = 2\,\pi\,\frac{R}{3} = \frac{2\pi R}{3}$

2.

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $O\overset{\frown}{AB}$. Με διάμετρο την OA γράφουμε, στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, ημικύκλιο και στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (K) που να εφάπτεται στο ημικύκλιο, στην πλευρά OB και στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου (K) ισούται με το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

Λύση



M το κέντρο του ημικυκλίου,
Z, H, Θ τα σημεία επαφής και
x η ακτίνα του κύκλου (K).

Θα υπολογίσουμε την ακτίνα x ως συνάρτηση της ακτίνας R του τεταρτοκυκλίου.

Θ. Οξείας Γωνίας στο τρίγωνο KOM:
$KM^2 = OK^2 + OM^2 - 2\,OM \cdot O\Lambda$,
φέραμε $K\Lambda \perp OA$, οπότε $O\Lambda = x$.

Άρα $\left(K\Theta + \Theta M\right)^2 = \left(OZ - KZ\right)^2 + OM^2 - 2OM.O\Lambda \quad \Rightarrow$

$$\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(R - x\right)^2 + \left(\frac{R}{2}^2\right) - 2\frac{R}{2}x \quad \Rightarrow$$

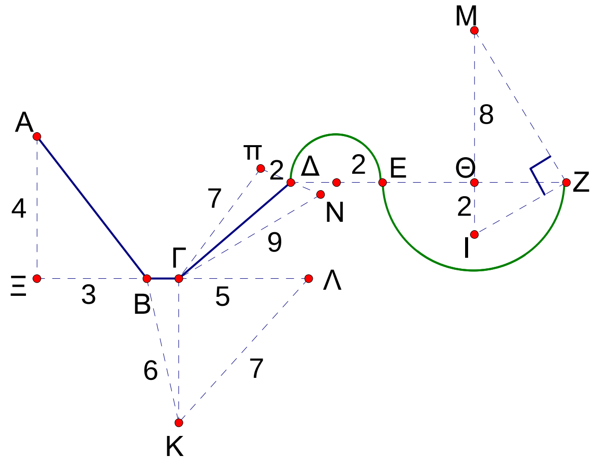
$$x^2 + Rx + \frac{R^2}{4} = R^2 - 2Rx + x^2 + \frac{R^2}{4} - Rx \quad \Rightarrow$$

$$R^2 = 4Rx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{4}$$

$$L_{\text{κύκλου }(K)} = 2\pi x = 2\pi\frac{R}{4} = \frac{\pi R}{2} \quad \text{και} \quad L_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{\pi\frac{R}{2}.180}{180} = \frac{\pi R}{2}$$

Άρα $L_{\text{κύκλου }(K)} = L_{\text{ημικυκλίου}}$

3.



Να βρείτε το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕΖ του σχήματος.

Λύση

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΞΒ: $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad \Rightarrow \quad AB = 5$ **(1)**

Είναι $7^2 < 6^2 + 5^2$, αφού $49 < 36 + 25$

Άρα η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΒΚΛ είναι οξεία $\Rightarrow$

$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 5\, B\Gamma \quad \Rightarrow \quad 49 = 36 + 25 - 10\, B\Gamma \quad \Rightarrow$

$10\, B\Gamma = 12 \quad \Rightarrow \quad B\Gamma = 1{,}2$ **(2)**

1ο Θ. Διαμέσων στο τρίγωνο ΓΠΝ: $7^2 + 9^2 = 2 \cdot \Gamma\Delta^2 + \dfrac{4^2}{2} \quad \Rightarrow$

$49 + 81 = 2 \cdot \Gamma\Delta^2 + 8 \quad \Rightarrow$

$\Gamma\Delta^2 = 61 \quad \Rightarrow \quad \Gamma\Delta = \sqrt{61}$ **(3)**

$L_{\text{ημικυκλίου } \Delta E} = \pi \cdot 2 = 2\pi$ **(4)**

Τρίγωνο ΜΖΙ ορθογώνιο με ύψος ΖΘ: $Z\Theta^2 = \Theta M \cdot \Theta I = 8 \cdot 2 = 16 \quad \Rightarrow \quad Z\Theta = 4$

$L_{\text{ημικυκλίου } EZ} = \pi \cdot 4 = 4\pi$ **(5)**

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) $\Rightarrow$

μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕΖ $= 5 + 1{,}2 + \sqrt{61} + 2\pi + 4\pi = 6{,}2 + \sqrt{61} + 6\pi$