11.1 – 11.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 237 – 238

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα των οποίων οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες ;
Απάντηση

Ναι. Είναι το ισόπλευρο τρίγωνο

2.
Ποιο είναι το απόστημα κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο;

Απάντηση

Είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου .

3.
Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν

Α. έχει μόνο ίσες πλευρές

Β. έχει μόνο τις γωνίες του ίσες

Γ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η Γ διότι οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του περιγεγραμμένου του κύκλου συνεπώς οι γωνίες του πολυγώνου θα είναι και αυτές ίσες σαν εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα οπότε το πολύγωνο θα είναι κανονικό

4.
Μεταξύ των λ_ν , α_ν και R ισχύει

Α. $\lambda_\nu^2 + \frac{\alpha_\nu^2}{4} = R^2$ Β . $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = 4R^2$

Γ $\lambda_\nu^2 = 4(R^2 - \alpha_\nu^2)$ Δ. $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = \frac{R^2}{4}$

Λύση

Το σωστό είναι το Γ διότι : $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 - \alpha_\nu^2$

$$\lambda_\nu^2 = 4(R^2 - \alpha_\nu^2)$$

5.

Μεταξύ των ω_ν, φ_ν ισχύει

Α. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 1\llcorner$ Β $\omega_\nu + \varphi_\nu = 2\llcorner$ Γ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 270^o$ Δ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 3\llcorner$

Λύση

$$\omega_\nu + \varphi_\nu = \frac{360^o}{\nu} + 180^o - \frac{360^o}{\nu} = 180^o$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.

Λύση

$$\varphi_5 = 180^0 - \frac{360^0}{5} = 180^0 - 72^0 = 108^0 \quad \text{και} \quad \omega_5 = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

$$\varphi_6 = 180^0 - \frac{360^0}{6} = 180^0 - 60^0 = 120^0 \quad \text{και} \quad \omega_5 = \frac{360^0}{6} = 60^0$$

$$\varphi_{10} = 180^0 - \frac{360^0}{10} = 180^0 - 36^0 = 144^0 \quad \text{και} \quad \omega_{10} = \frac{360^0}{10} = 36^0$$

$$\varphi_{12} = 180^0 - \frac{360^0}{12} = 180^0 - 30^0 = 150^0 \quad \text{και} \quad \omega_{12} = \frac{360^0}{12} = 30^0$$

2.

Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108^o, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι α. 15 β. 12 γ. 10 δ. 5 ε. 8.

Λύση

$$180^0 - \frac{360^0}{\nu} = 108^0 \Leftrightarrow 180^0 - 108^0 = \frac{360^0}{\nu}$$

$$72^0 = \frac{360^0}{\nu}$$

$$72^0\nu = 360^0 \Leftrightarrow \nu = 5$$

3.

Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι $\lambda = 2$. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους.

Λύση

$$\frac{\alpha_5}{\alpha'_5} = \frac{\lambda_5}{\lambda'_5} = 2 \qquad \frac{R}{R'} = \frac{\lambda_5}{\lambda'_5} = 2 \qquad \frac{P_5}{P'_5} = \frac{5\lambda_5}{5\lambda'_5} = \frac{\lambda_5}{\lambda'_5} = 2 \qquad \frac{E_5}{E'_5} = 2^2 = 4$$

4.

Τα πλήθη ν_1, ν_2 των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων: $\nu^3 - 3\nu^2 - 7\nu - 15 = 0$, $\quad 2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}$.

Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.

Λύση

Η εξίσωση $\nu^3 - 3\nu^2 - 7\nu - 15 = 0$, με σχήμα Horner, γίνεται

$$(\nu - 5)(\nu^2 + 2\nu + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu - 5 = 0 \quad \text{ή} \quad \nu^2 + 2\nu + 3 = 0.$$

Επειδή ο ν είναι φυσικός αριθμός, έχουμε $\nu^2 + 2\nu + 3 > 0$.
Άρα $\nu = 5$

Ελέγχουμε αν η τιμή $\nu = 5$ επαληθεύει την εξίσωση $2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}$

$$2.5 - 9 = \sqrt{5 - 4}$$

$$1 = \sqrt{1} \quad \text{που ισχύει.}$$

Έτσι, οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα μόνο το 5, άρα τα πολύγωνα είναι κανονικά πεντάγωνα, άρα είναι όμοια.

5.

Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

$$180^0 - \frac{360^0}{\nu} < 90^0 \quad \Leftrightarrow \quad 180^0 - 90^0 < \frac{360^0}{\nu}$$

$$90^0 < \frac{360^0}{\nu}$$

$$90^0 \nu < 360^0$$

$$\nu < 4 \quad \text{άρα} \quad \nu = 3.$$

6.

Αν ένα κανονικό ν–γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο (μ > ν) είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι

i) $\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4\left(\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2\right)$

ii) $\lambda_\nu > \lambda_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\nu < \alpha_\mu$

Λύση

i)

Είναι $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ και $\alpha_\mu^2 + \dfrac{\lambda_\mu^2}{4} = R^2 \Rightarrow \alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = \alpha_\mu^2 + \dfrac{\lambda_\mu^2}{4}$

$$4\alpha_\nu^2 + \lambda_\nu^2 = 4\alpha_\mu^2 + \lambda_\mu^2$$

$$\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4\alpha_\mu^2 - 4\alpha_\nu^2$$

$$\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4(\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2)$$

ii)

$$\lambda_\nu > \lambda_\mu \Leftrightarrow \lambda_\nu^2 > \lambda_\mu^2 \Leftrightarrow \lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 > 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$$

$$4(\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2) > 0$$

$$\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2 > 0$$

$$\alpha_\mu^2 > \alpha_\nu^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu$$

7.

Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Να αποδείξετε ότι :

i) Κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,

ii) Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,

iii) Δύο διαγώνιοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και

iv) Αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε $\mathrm{AH^2 = A\Gamma.\, H\Gamma}$

Λύση

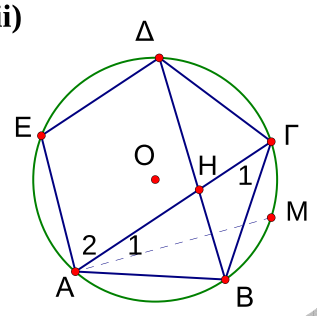
i)

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ.

ΒΑ = ΒΓ $\Rightarrow$ τρίγωνο ΒΑΓ ισοσκελές.

$\overset{\frown}{\mathrm{AE}} = \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \mathrm{E\Delta} \parallel \mathrm{A\Gamma} \Rightarrow$ ΑΓΔΕ τραπέζιο με ΑΕ = ΓΔ, άρα ισοσκελές.

ii)



ΑΜ η διχοτόμος

$$\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{360^0}{5} = 72^0 = \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}$$

$$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}}{2} = 36^0 \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 = 18^0$$

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta E}}}{2} = \frac{2\cdot 72^0}{2} = 72^0$$

$$\mathrm{E\hat{A}M} = \hat{\mathrm{A}}_2 + \hat{\mathrm{A}}_1 = 72^0 + 18^0 = 90^0 \Rightarrow \mathrm{AM} \perp \mathrm{AE}$$

iii)

Όπως είναι $\mathrm{E\Delta} \parallel \mathrm{A\Gamma}$, έτσι είναι και $\mathrm{EA} \parallel \mathrm{\Delta B}$, άρα ΑΕΔΗ παραλληλόγραμμο και επειδή ΕΑ = ΕΔ, είναι ρόμβος πλευράς λ_5.

iv)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_5^2 = \mathrm{A\Gamma\cdot H\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda_5}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{H\Gamma}}{\lambda_5}$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΗΒΓ, το οποίο ισχύει διότι $\hat{\Gamma}_1$ κοινή και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ, μ, ν, όπου $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}$$

Λύση

Θα υπάρχει σημείο του δαπέδου που θα είναι κοινή κορυφή των τριών πολυγώνων.

Άρα $\varphi_\lambda+\varphi_\mu+\varphi_\nu=360^0 \Rightarrow$

$$180^0-\frac{360^0}{\lambda}+180^0-\frac{360^0}{\mu}+180^0-\frac{360^0}{\nu}=360^0 \Rightarrow$$

$$180^0=\frac{360^0}{\lambda}+\frac{360^0}{\mu}+\frac{360^0}{\nu} \Rightarrow$$

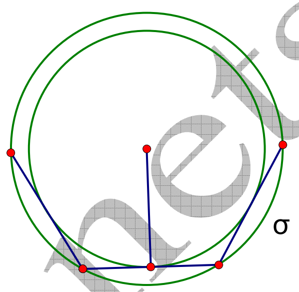
$$\frac{180^0}{360^0}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}$$

2.

Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.

Λύση



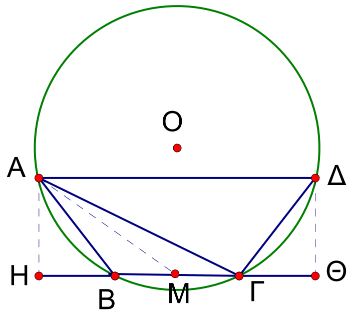
Τα αποστήματα των χορδών-πλευρών είναι ίσα σαν ακτίνες του μικρού κύκλου.
Άρα χορδές-πλευρές του πολυγώνου ίσες.

Κάθε γωνία του πολυγώνου είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε τόξο $(\nu-2)\sigma$.
Άρα γωνίες του πολυγώνου ίσες.

3.

Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού ν–γώνου ($\nu \geq 4$), να αποδείξετε ότι $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = ΑΒ \cdot ΑΔ$.

Λύση



2^o Θ. Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2\,ΒΓ.\,ΗΜ. = 2\,ΑΒ.ΗΜ$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΔ = 2 ΗΜ

Φέρουμε και $ΔΘ \perp ΒΓ$.

Είναι τρ.ΑΒΗ = τρ.ΔΓΘ, αφού

1) ορθογώνια

2) ΑΒ = ΔΓ και

3) $\hat{Β} = \hat{Γ}$ (παραπληρωματικές της φ_ν)

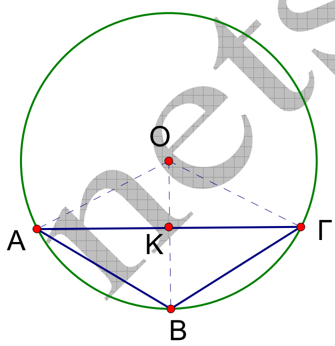
Άρα ΗΒ = ΓΘ, άρα και ΗΜ = ΜΘ.

ΑΗΘΔ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΔ = ΗΘ = 2 ΗΜ

4.

Αν $E_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν-γώνου ($\nu \geq 4$), εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R), να αποδείξετε ότι $E_{2\nu} = \frac{1}{2}P_\nu R$, όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R

Λύση



Θεωρούμε $ΑΒ = ΒΓ = \lambda_\nu$ οπότε $ΑΓ = \lambda_{2\nu}$.
Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ
οπότε ΟΚ απόστημα του ν-γώνου.

$$E_{2\nu} = \frac{1}{2}P_\nu R \iff 2\,\nu\,(ΟΑΒ) = \frac{1}{2}\,\nu\,ΑΓ.\,R$$

$$2\,\nu\,\frac{1}{2}ΟΒ.\,ΑΚ = \frac{1}{2}\,\nu\,2\,ΑΚ\,R$$

που ισχύει.

5.

Αν λ'_ν είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_ν, α_ν η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $R \cdot \lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda'_\nu$.

Λύση

Τα δύο πολύγωνα είναι όμοια, αφού έχουν ίδιο πλήθος πλευρών $\Rightarrow$

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \quad (\text{αφού} \quad \alpha'_\nu = R) \quad \Rightarrow \quad R \cdot \lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda'_\nu .$$

6.

Αν E_α, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$), να αποδείξετε ότι $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.

Λύση

Τα τρία πολύγωνα είναι όμοια, αφού έχουν ίδιο πλήθος πλευρών.

(α) πολύγωνο όμοιο του (β) $\Rightarrow \dfrac{E_\beta}{E_\alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$

(α) πολύγωνο όμοιο του (γ) $\Rightarrow \dfrac{E_\gamma}{E_\alpha} = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$

Άρα $\dfrac{E_\beta}{E_\alpha} + \dfrac{E_\gamma}{E_\alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = 1$ από το Πυθαγόρειο.

Σύνθετα Θέματα

1.

Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι υπάρχουν τρία μόνο κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες μπορούν να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

Λύση

Θεωρούμε τον τύπο $\varphi_\nu = 180 - \dfrac{360}{\nu}$ σε μοίρες.

Έστω ότι απαιτούνται κ το πλήθος κανονικά ν-γωνα. Τότε

$$\kappa\cdot\varphi_\nu = 360 \;\Rightarrow\; \kappa\cdot\left(180-\frac{360}{\nu}\right) = 360 \;\Rightarrow$$

$$\kappa\cdot\left(1-\frac{2}{\nu}\right) = 2 \;\Rightarrow$$

$$\kappa\cdot(\nu-2) = 2\nu \;\Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{2\nu}{\nu-2} = \frac{2\nu-4+4}{\nu-2} = \frac{2(\nu-2)+4}{\nu-2} = 2+\frac{4}{\nu-2}$$

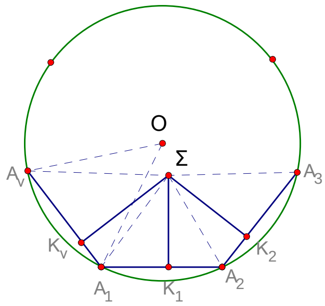
κ φυσικός $\Rightarrow$ $\dfrac{4}{\nu-2}$ φυσικός $\Rightarrow$ ο $\nu-2$ διαιρεί τον 4 $\Rightarrow$

$\nu-2 = 1$ ή 2 ή 4 $\Rightarrow$ $\nu = 3$ ή 4 ή 6

2.

Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν $d_1, d_2, \dots, d_\nu$ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι $d_1 + d_2 + \dots + d_\nu = \nu \cdot \alpha_\nu$, όπου α_ν το απόστημα του ν-γώνου.

Λύση



Έστω $A_1A_2 \dots A_\nu$ το κανονικό ν–γωνο, $\Sigma K_1, \Sigma K_2, \dots, \Sigma K_\nu$ οι αποστάσεις $d_1, d_2, \dots, d_\nu$ και Ο το κέντρο.

Φέρουμε τις $\Sigma A_1, \Sigma A_2, \dots, \Sigma A_\nu$ και τις OA_1, OA_ν.

Είναι $(\Sigma A_1 A_2) + (\Sigma A_2 A_3) + \dots + (\Sigma A_\nu A_1) = (A_1A_2 \dots A_\nu) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\lambda_\nu d_1 + \frac{1}{2}\lambda_\nu d_2 + \dots + \frac{1}{2}\lambda_\nu d_\nu = \nu\,(O A_\nu A_1) \Rightarrow$$

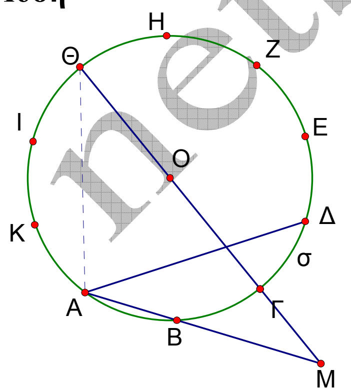
$$\frac{1}{2}\lambda_\nu (d_1 + d_2 + \dots + d_\nu) = \nu\,\frac{1}{2}\lambda_\nu \alpha_\nu \Rightarrow$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_\nu = \nu \cdot \alpha_\nu$$

3.

Σε κανονικό οκτάγωνο ΑΒΓΔ . . . Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ = ΑΔ.

Λύση



Τα σημεία Γ, Θ είναι απέναντι κορυφές του δεκαγώνου, άρα η ΓΘ είναι διάμετρος..

$\overset{\frown}{A\Delta} = 3\sigma = \overset{\frown}{A\Theta} \Rightarrow A\Delta = A\Theta$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $AM = A\Theta$ ή ότι $\hat{M} = \hat{\Theta}$.

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{A\Theta} - \overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \frac{3\sigma - \sigma}{2} = \sigma = 36^0$$

$$\hat{\Theta} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{2\sigma}{2} = \sigma = 36^0$$