Ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 227 – 228

Γενικές $10^{ου}$ Κεφαλαίου

1.

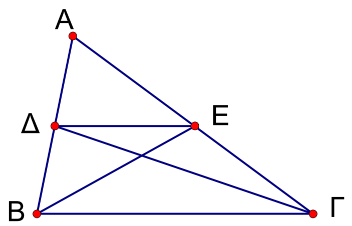
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε || ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα.. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ)

ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ)

iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ) με την επί πλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

Λύση



i)
Έχουν ίδια βάση ΒΓ και ίσα αντίστοιχα ύψη αφού ΔΕ || ΒΓ

ii)
Στα δύο μέλη της ισότητας του i) προσθέτουμε το (ΑΔΕ)

iii)
Αρκεί να δειχθεί ότι (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΒΑΕ) + (ΒΕΓ), ή

(ΓΑΔ) = (ΒΕΓ)

Επειδή ΓΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ ⇒ (ΓΑΔ) = (ΓΔΒ)

και επειδή ΔΕ || ΒΓ ⇒ (ΓΔΒ) = (ΒΕΓ)

Άρα (ΓΑΔ) = (ΒΕΓ)

2.

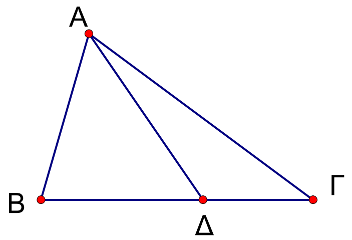
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε $B\Delta = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}B\Gamma$, $\lambda > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $(AB\Delta) = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}(AB\Gamma)$

ii) $(AB\Delta) \le \frac{1}{4}(AB\Gamma)$

iii) $(A\Gamma\Delta) \ge \frac{3}{4}(AB\Gamma)$

Λύση



i)

Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ έχουν ίδιο ύψος από το Α $\Rightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$

Από την υπόθεση, όμως έχουμε $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}$

Άρα $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\lambda}{\lambda^2+4} \Rightarrow (AB\Delta) = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}(AB\Gamma)$

ii)

$(AB\Delta) \le \frac{1}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} \le \frac{1}{4}$

$\frac{\lambda}{\lambda^2+4} \le \frac{1}{4}$

$4\lambda \le \lambda^2 + 4$

$0 \le \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$0 \le (\lambda-2)^2$ που ισχύει

iii)

$(A\Gamma\Delta) \ge \frac{3}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow (AB\Gamma) - (AB\Delta) \ge \frac{3}{4}(AB\Gamma)$

$(AB\Gamma) - \frac{\lambda}{\lambda^2+4}(AB\Gamma) \ge \frac{3}{4}(AB\Gamma)$

$1 - \frac{\lambda}{\lambda^2+4} \ge \frac{3}{4}$

$1 - \frac{3}{4} \ge \frac{\lambda}{\lambda^2+4}$

$\frac{1}{4} \ge \frac{\lambda}{\lambda^2+4}$

$\lambda^2 + 4 \ge 4\lambda$

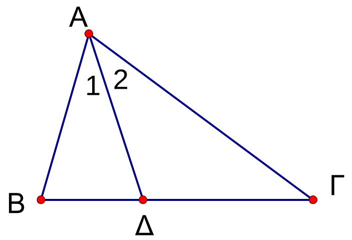
$\lambda^2 + 4 - 4\lambda \ge 0$

$(\lambda-2)^2 \ge 0$ που ισχύει

3.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$ (Θεώρημα διχοτόμου).

Λύση



$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \;\Rightarrow\; \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)}=\frac{AB\cdot A\Delta}{A\Delta\cdot A\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ έχουν ίδιο ύψος από το A $\Rightarrow$ $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ **(2)**

$$(1),\ (2) \;\Rightarrow\; \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$$

4.

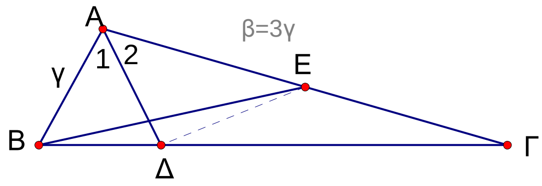
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 3\gamma$, ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:

i) $(AB\Delta) = \frac{1}{3}(A\Delta\Gamma)$

ii) $(AB\Delta).(\Delta E\Gamma) = (A\Delta\Gamma).(BE\Delta)$

iii) $(\Delta E\Gamma) = \frac{3}{8}(AB\Gamma)$

Λύση



i)

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{AB \cdot A\Delta}{A\Delta \cdot A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{3\gamma} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad (AB\Delta) = \frac{1}{3}(A\Delta\Gamma)$$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)}$

Στο i) αποδείχθηκε ότι $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{1}{3}$ **(1)**

Τα τρίγωνα ΒΕΔ, ΔΕΓ έχουν ίδιο ύψος από το Ε $\Rightarrow \frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$

Αλλά , από Θ. Διχοτόμου, έχουμε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{3\gamma} = \frac{1}{3}$

Άρα $\frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{1}{3}$ **(2)**

Από (1) και (2) $\Rightarrow \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)}$

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{8}$

Αυτά τα τρίγωνα έχουν $\hat{\Gamma}$ κοινή $\Rightarrow$

$$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Delta.\Gamma E}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}.\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\beta}{\beta+\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{3\gamma}{3\gamma+\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{3+1} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

5.

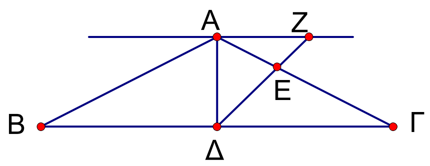
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και $\hat{A} = 120^o$.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν του.

ii) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.

iii) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

Λύση



i)

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}βγ.ημΑ$$
$$= \frac{1}{2}6.\ 6\ ημ120^0$$
$$= 18\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

ii)

Τα τρίγωνα ΔΕΓ, ΑΔΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Γ} \Rightarrow \frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΓΔ\cdot ΓΕ}{ΓΔ\cdot ΓΑ} = \frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{2}{3}$

άρα $(ΔΕΓ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$

αλλά $(ΑΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}9\sqrt{3}$

άρα $(ΔΕΓ) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

iii)

Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι όμοιο του ΓΕΔ $\Rightarrow \frac{(ΑΕΖ)}{(ΓΕΔ)} = \left(\frac{ΑΕ}{ΕΓ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Άρα $(ΑΕΖ) = \frac{1}{4}(ΓΕΔ) \Rightarrow (ΑΕΖ) = \frac{1}{4}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

6.

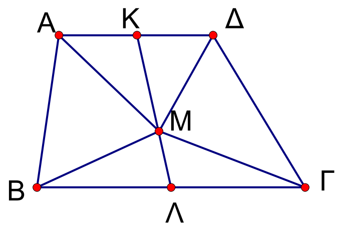
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ||ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ)

ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), γι οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.

Λύση



i)
Τα δύο τραπέζια είναι ισοδύναμα, αφού έχουν ίσες βάσεις και ίδιο ύψος.

ii)
ΜΚ διάμεσος του τριγώνου ΜΑΔ $\Rightarrow$
(ΜΚΑ) = (ΜΚΔ) **(1)**

ΜΛ διάμεσος του τριγώνου ΜΒΓ $\Rightarrow$ (ΜΛΒ) = (ΜΛΓ) **(2)**

Από το i) έχουμε (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ) **(3)**

(3) – (2) – (1) $\Rightarrow$ (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ)

7.

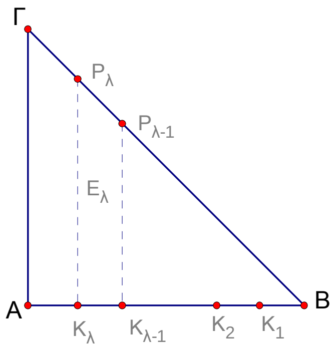
Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός, ν ≥ 2) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.

i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να αποδείξετε ότι $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$.

Λύση

i)



Έστω K_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$ τα σημεία διαίρεσης και $K_\lambda P_\lambda$ οι παράλληλες στην ΑΓ.

Θα είναι $K_{\lambda-1}K_\lambda = \dfrac{\gamma}{\nu}$ και $K_\lambda P_\lambda = BK_\lambda = \lambda \dfrac{\gamma}{\nu}$

$$E_\lambda = \frac{K_\lambda P_\lambda + K_{\lambda-1}P_{\lambda-1}}{2} K_{\lambda-1}K_\lambda$$

$$= \frac{\lambda\frac{\gamma}{\nu} + (\lambda - 1)\frac{\gamma}{\nu}}{2} \cdot \frac{\gamma}{\nu}$$

$$= \frac{\lambda + \lambda - 1}{2} \cdot \frac{\gamma^2}{\nu^2}$$

$$= \frac{2\lambda - 1}{2} \cdot \frac{\gamma^2}{\nu^2} \quad \text{για } \lambda = 1, 2, \ldots, \nu$$

ii)

$E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu = (AB\Gamma) \Rightarrow$

$$\frac{2\cdot 1 - 1}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{\nu^2} + \frac{2\cdot 2 - 1}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{\nu^2} + \ldots + \frac{2\nu - 1}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{\nu^2} = \frac{1}{2}\gamma\cdot\gamma \Rightarrow$$

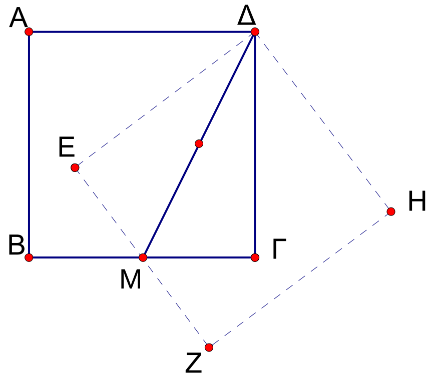
$$\frac{1}{\nu^2} + \frac{3}{\nu^2} + \ldots + \frac{2\nu - 1}{\nu^2} = 1 \Rightarrow$$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$.

8.

Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.

Λύση



Το κάθε τετράγωνο έχει πλευρά 6, αφού έχει εμβαδόν 36.

(ΑΒΜΖΗΔ) = (ΑΒΜΔ) + (ΔΜΖΗ) **(1)**

$$(ΑΒΜΔ) = \frac{ΑΔ+ΒΜ}{2}ΑΒ = \frac{6+3}{2}6 = 27$$

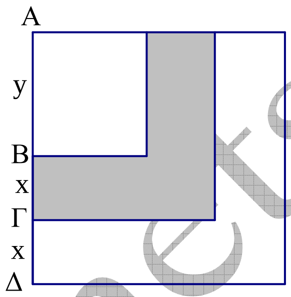
(ΔΜΖΗ) = ……………………… = 27

(1) $\Rightarrow$ (ΑΒΜΖΗΔ) = 54

9.

Τρία τετράγωνα, των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή Α και είναι τοποθετημένα το ΄να πάνω στο άλλο, όπως δείχνει το σχήμα. Αν ΒΓ = ΓΔ και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.

Λύση



Θέτουμε ΑΒ = y ακέραιος και ΒΓ = x = ΓΔ με ΑΓ = y + x ακέραιο, άρα και x ακέραιος.
Η διαφορά των εμβαδών μεσαίου-μικρού τετραγώνου είναι 17,

άρα $(y+x)^2 - y^2 = 17$

$y^2 + 2xy + x^2 - y^2 = 17$

$x(2y+x) = 17$ **(1)**

Επειδή x, y θετικοί ακέραιοι, θα είναι και ο 2y + x θετικός ακέραιος με 2y + x > x

(1) $\Rightarrow$ x = 1 και 2y + x = 17

2y + 1 = 17 $\Rightarrow$ y = 8

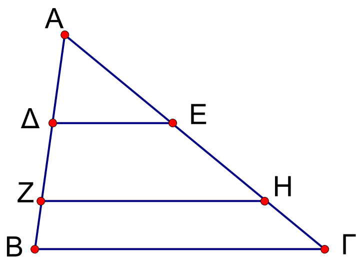
Εμβαδόν του μικρότερου τετραγώνου = $y^2 = 8^2 = 64$

Εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου = $(y+2x)^2 = (8+2\cdot 1)^2 = 10^2 = 100$.

10.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις θετικοί αριθμοί λ, μ, ν. Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ, που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών λ, μ, ν.

Λύση



Αν ΔΕ, ΖΗ είναι οι ζητούμενες, θα είναι

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{\lambda}=\frac{(\text{ΔΖΗΕ})}{\mu}=\frac{(\text{ΖΒΓΗ})}{\nu}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{\lambda+\mu+\nu} \quad \textbf{(1)}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(\text{ΑΔΕ})}{\lambda}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{\lambda+\mu+\nu} \Rightarrow$$

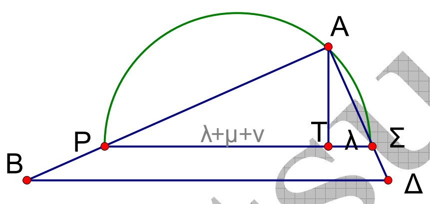
$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} \quad \textbf{(2)}$$

τρ.ΑΔΕ όμοιο του τρ.ΑΒΓ $\quad \dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\dfrac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΑΒ}^2}$

$$(2) \Rightarrow \frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΑΒ}^2}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} \Rightarrow \text{ΑΔ}=\text{ΑΒ}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}} \quad \text{(αλγεβρική λύση)}$$

Για τη γεωμετρική λύση, πρέπει το τμήμα ΑΔ να κατασκευασθεί.

Κατασκευή του ΑΔ.



Σε ευθεία θεωρούμε τμήμα ΤΣ με μέτρο λ και τμήμα ΡΤ με μέτρο λ + μ + ν.

Με διάμετρο ΡΣ γράφουμε ημικύκλιο.

Φέρουμε ΤΑ $\perp$ ΡΣ.

Πάνω στην ΑΡ θεωρούμε σημείο Β. Από το Β φέρουμε παράλληλη στη ΡΣ, που τέμνει την ΑΣ στο Δ. Το ΑΔ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Τρίγωνο ΑΣΡ ορθογώνιο με ύψος ΑΤ $\Rightarrow \dfrac{\text{ΑΣ}^2}{\text{ΑΡ}^2}=\dfrac{\text{ΤΣ}}{\text{ΤΡ}}=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}$ **(1)**

Θ. Θαλή $\Rightarrow \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\dfrac{\text{ΑΣ}}{\text{ΑΡ}} \Rightarrow \dfrac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΑΒ}^2}=\dfrac{\text{ΑΣ}^2}{\text{ΑΡ}^2}$ **(2)**

$$(1),\ (2) \Rightarrow \frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΑΒ}^2}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}$$

11.

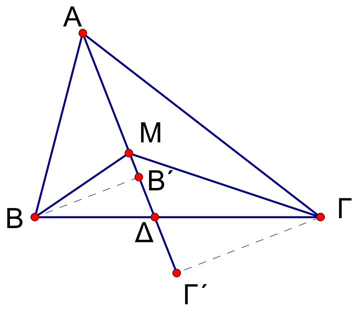
i) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν η ΑΜ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}$ **β)** $\frac{ΜΔ}{ΑΔ}=\frac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}$

ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν οι ευθείες ΑΜ, ΒΜ και ΓΜ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}+\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΜ}{ΜΔ}$

Λύση

i) α)



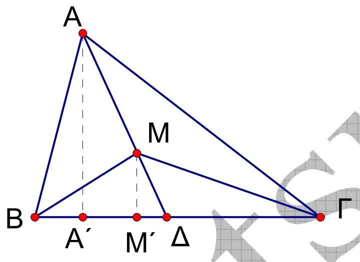
Επειδή τα τρίγωνα, που μας ενδιαφέρουν, έχουν ίδια βάση ΑΜ, φέρουμε τα αντίστοιχα ύψη τους ΒΒ΄, ΓΓ΄.

Τότε $\frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}=\frac{ΒΒ΄}{ΓΓ΄}$ **(1)**

Τρ.ΒΒ΄Δ όμοιο με το τρ.ΓΓ΄Δ $\Rightarrow \frac{ΒΒ΄}{ΓΓ΄}=\frac{ΒΔ}{ΔΓ}$

Η (1) $\Rightarrow \frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}=\frac{ΒΔ}{ΔΓ}$

i) β)



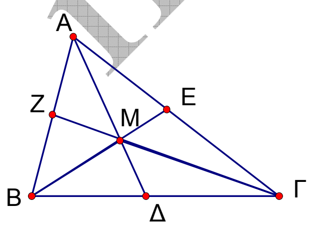
Επειδή τα τρίγωνα, που μας ενδιαφέρουν, έχουν ίδια βάση ΒΓ, φέρουμε τα αντίστοιχα ύψη τους ΜΜ΄, ΑΑ΄

Τότε $\frac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΜΜ΄}{ΑΑ΄}$ **(2)**

Τρ,ΔΜΜ΄ όμοιο με το τρ.ΔΑΑ΄ $\Rightarrow \frac{ΜΜ΄}{ΑΑ΄}=\frac{ΜΔ}{ΑΔ}$

Η (2) $\Rightarrow \frac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΜΔ}{ΑΔ}$

ii)



i)α) $\Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{(ΑΜΒ)}{(ΒΜΓ)}$ και $\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{(ΑΜΓ)}{(ΒΜΓ)}$

Άρα $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}+\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{(ΑΜΒ)}{(ΒΜΓ)}+\frac{(ΑΜΓ)}{(ΒΜΓ)}=$

$$\frac{(ΑΜΒ)+(ΑΜΓ)}{(ΒΜΓ)}=\frac{(ΑΒΓ)-(ΒΜΓ)}{(ΒΜΓ)}=$$

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΜΓ)}-1\overset{(β)}{=}\frac{ΑΔ}{ΜΔ}-1=\frac{ΑΔ-ΜΔ}{ΜΔ}=\frac{ΑΜ}{ΜΔ}$$