# Κεφάλαιο 1

# Διαφορικός Λογισμός

## 1.1 Συναρτήσεις

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;
2. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;
3. Πως ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου μεταξύ δύο συναρτήσεων;
4. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της $f$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxy$;
5. Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$;
6. **i)** Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα;
   **ii)** Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;
7. **i)** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο;
   **ii)** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;
8. Τι εννοούμε με τον όρο ”ακρότατα” της συνάρτησης;

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   i) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2x-6}$  ii) $f(x) = \dfrac{|x|-4}{x^2+x-6}$
   iii) $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{x^3-4x^2-7x+10}$  iv) $f(x) = \dfrac{2x-9}{|x-3|-5}$
10. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   i) $f(x) = \sqrt{x-3}$  ii) $g(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$
   iii) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$  iv) $K(x) = \ln(2-x^2)$
11. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  ii) $g(x) = \ln(x-2) + \dfrac{x}{x-5}$
   iii) $h(x) = \sqrt{2x-1} + \ln(5-x)$
12. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των επόμενων συναρτήσεων, με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
   i) $f(x) = x^2-6x-7$  ii) $f(x) = \dfrac{|x|-2}{x^2+1}$
   iii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$  iv) $f(x) = \ln(x-2)$
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x-5}{\sqrt{x}-1}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4,7)$.

   **i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f$.

**ii)** Να υπολογίσετε το $\alpha$.

**iii)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παραάστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14. Για ποιές τιμές του $x$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - x - 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x|-1}$ .

**i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f$.

**ii)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

**iii)** Για ποιές τιμές του $x$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται ”ψηλότερα” από την ευθεία με εξίσωση $y = 5$;

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2–1$ και ένα τυχαίο σημείο $A(x, y)$ της γραφικής παράστασης της $f$.

**α)** Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του σημείου ως συνάρτηση του $x$.

**β)** Να εκφράσετε την απόσταση $d(x)$ του από την αρχή των αξόνων ως συνάρτηση του $x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $d(x)$.

**γ)** Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης των οποίων η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ίση με 1.

17. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μία αποθήκη, που να έχει σχήμα ορθογώνιου με περίμετρο $20m$. Αν η μία πλευρά του παραθύρου έχει μήκος $x\ m$, τότε:

**α)** Να εκφράσετε την άλλη πλευρά του ορθογώνιου παραθύρου ως συνάρτηση του $x$.

**β)** Να βρείτε τη συνάρτηση $E(x)$ που μας δίνει το εμβαδόν του παραθύρου, καθώς και το πεδίο ορισμού της.

**γ)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ παίρνει μέγιστη τιμή την $25m^2$.

**δ)** Τι σχήμα πρέπει να έχει το παράθυρο προκειμένου να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή φωτεινότητα στην αποθήκη, δηλαδή το εμβαδόν του παραθύρου να είναι μέγιστο;

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{αν } x < 1 \\ 2x^2 - x + \alpha & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

**i)** Να βρείτε τα $f(0), f(-2)$ και $f(1)$.

**ii)** Αν $f(1) = f(-2) - 2f(0)$ να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|2x^2 - x^3|}{\sqrt{x^2-4x+4}}$.

**i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

**ii)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

**iii)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

**i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

**ii)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

**iii)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-2}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(3, 2)$.

**i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f$.

**ii)** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha$ και $\beta$.

**iii)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

**iv)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

22. Έστω $f(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(1, –7)$ και $B(–2, –4)$ τότε:

**i)** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha$ και $\beta$.

**ii)** Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικής παράστασης της $f$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x^2-16}$ και $g(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις:
i) $f+g$ ii) $f-g$ iii) $f \cdot g$ iv) $\frac{f}{g}$

## 1.2 Όρια - Συνέχεια

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Αν για τις συναρτήσεις $f, g$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ , όπου $l_1, l_2$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = l_1 \cdot l_2$

   (β′) $\lim\limits_{x\to x_0}$ συν$x =$ συν$x_0$.

   (γ′) $\lim\limits_{x\to x_0}$ εφ$x =$ σφ$x_0$ .

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A$;

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

3. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x}{3x+8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x-6}$

   iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x-5}{x^2-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x-12}{5x+10}$

4. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2-11x+5}{x^2+x-2}$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x+2}{x^2-4}$

5. Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{4x-12}$

   iii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{3-\sqrt{8-x}}$

   iv) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2x^2-3x-2}$

6. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-1} & \text{αν } x<1 \\ x^5+3x^4-2 & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x-14}{x^3-1} & \text{αν } x\neq 2 \\ 0,75 & \text{αν } x=2 \end{cases}$.

   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-5x^2+4x-21}{x^2-2x-3} & \text{αν } x\neq 3 \\ 7 & \text{αν } x=3 \end{cases}$.

   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+14x-5}{x+5} & \text{αν } x\neq -5 \\ \alpha & \text{αν } x=-5 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Να βρεθεί ο $\alpha$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -5$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7x^2-18x+8}{2x-4} & \text{αν } x\neq 2 \\ \alpha^2-6\alpha+14 & \text{αν } x=2 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

    Να βρεθεί ο $\alpha$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{αν } x<-3 \\ x^2+5x & \text{αν } x\geq -3 \end{cases}$.

    Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4\alpha x + 1 & \text{αν } x < 1 \\ \ln x + \alpha^2 x + 5 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθεί ο $\alpha$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 5\beta - \alpha + 1 & \text{αν } x < 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} + \alpha x + \beta & \text{αν } x > 2 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθούν οι $\alpha, \beta$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

## 1.3 Η έννοια της παραγώγου - Παράγωγος συνάρτησης

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

   (α′) Η παράγωγος της $f$ στο $x_0$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς $x$, όταν $x = x_0$.

   (β′) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$.

   (γ′) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή $t_0$, είναι $\upsilon(t_0) = f''(t_0)$.

3. Να εξηγήσετε ότι υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους.

4. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της $f$;

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 0$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ και η $F(x) = cf(x)$. Να αποδείξετε ότι $F'(x) = cf'(x)$.

9. Έστω η συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και η $F(x) = f(x) + g(x)$.
   Να αποδείξετε ότι $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

10. Να συμπληρώσετε τα κενά στον επόμενο πίνακα:

| | |
|---|---|
| $(c)' = ......$ | $(cf(x))' = ......$ |
| $(x)' = ......$ | $(f(x) + g(x))' = ...........$ |
| $(x^\rho)' = ......$ | $(f(x)g(x))' = ....................$ |
| $(\sqrt{x})' = ......$ | $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = ........................$ |
| $(\text{ημ}x)' = ......$ | $(f(g(x)))' = ..............$ |
| $(\text{συν}x)' = ......$ | |
| $(e^x)' = ......$ | |
| $(\ln x)' = ......$ | |

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

11. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + \alpha$ ii) $f(t) = t^2\text{ημ}\theta + \theta t + 1$
    iii) $f(x) = \alpha x^8 - 5\alpha^2 x^3 + (\alpha + 1)x - \alpha + 2$

12. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$ ii) $f(x) = x^2 e^x$ iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$ iv) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

13. Να βρεθούν οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων:
    i) $f(x) = x^2 e^{1-x}$ ii) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ iii) $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$
    iv) $f(x) = \text{ημ}e^x$ iv) $f(x) = e^{\text{συν}x}$

14. Έστω $f(x) = \alpha\text{ημ}x - \beta\text{συν}x$ , με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f''(x) = 0$

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{x+1}$.

    **i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

    **ii)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

    **iii)** Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

    **i)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

    **ii)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

    **iii)** Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$, ώστε $f'(\alpha) = -1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-3x}(\text{ημ}x + \text{συν}x$ , $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + 6f'(x) + 10f(x) = 0$$

18. Η μία πλευρά ενός ορθογωνίου είναι $xm$ και η άλλη $2m$ μεγαλύτερη. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν $x = 5m$.

19. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(x, 0)$ , με $x > 0$ και $B(0, x + 7)$. Να βρείτε:

    **α)** Τη συνάρτηση που δίνει την απόσταση των σημείων $A$ και $B$, καθώς και τη συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου $OAB$.

    **β)** Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης όταν $x = 5$ και το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν $x = 2, 5$.

20. Η πλευρά $\alpha(t)$ σε $cm$ ενός τετραγώνου μεταβάλλεται ως προς το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\alpha(t) = 2t + 1$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου κατά τη χρονική στιγμή $t = 4s$.

21. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = xe^{x-1}$ στο σημείο της με τετμημένη 1.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο της $O(0, 0)$, με τον άξονα $x'x$.

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 11x + 8$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ στο οποίο η εφαπτόμενή της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°.

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 1 - 2x$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1) - 2x + 3$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της $f$ οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία με εξίσωση $x + y + 1 = 0$.

26. Έστω $f(x) = x^2 + 5x - 2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της $f$ οι οποίες είναι κάθετες με την ευθεία με εξίσωση $x + 3y = 6$.

## 1.4 Εφαρμογές των παραγώγων

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα από το οποίο συμπεραίνουμε το είδος μονοτονίας μιας συνάρτησης $f$, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$, από το πρόσημο της παραγώγου της.

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

   (α′) Αν για μια συνάρτηση $f$ ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \beta)$, τότε η $f$ παρουσιάζει στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ για $x = x_0$ μέγιστο.

   (β′) Αν μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta$.

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = xe^x$ ii) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

5. i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα:
   i) $f(x) = 2x + \text{συν}x$ ii) $f(x) = \ln x - x$ iii) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f$ με $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ και $x > 0$. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της $f$ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες $Ox, Oy$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $M$, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι μέγιστο.

8. Κάθε μέρα $840$ επιβάτες χρησιμοποιούν το τραίνο προκειμένου να μεταβούν από μία πόλη σε μία άλλη, αν το εισιτήριο είναι $8$ ευρώ. Έχει παρατηρηθεί ότι για κάθε μείωση του εισιτήριου κατά $20$ λεπτά, έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των επιβατών κατά $30$ άτομα. Αν γίνουν $x$ διαδοχικές μειώσεις των $20$ λεπτών, τότε:

   α) Να εκφράσετε, ως συνάρτηση του $x$, την τιμή του εισιτήριου, το πλήθος των επιβατών και και τα έσοδα σε ευρώ για τη συγκεκριμένη διαδρομή.

   β) Να βρείτε το $x$ ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα.

   γ) Πόσο θα είναι η τιμή του εισιτήριου και τα μέγιστα έσοδα, για την τιμή του $x$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

# Κεφάλαιο 2

# Στατιστική

## 2.1 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Ποιές μεταβλητές ονομάζονται ποιοτικές ή κατηγορικές;
2. Ποιές μεταβλητές ονομάζονται ποσοτικές;
   Από αυτές ποιές λέγονται διακριτές και ποιές συνεχείς;
3. Τι ονομάζουμε συχνότητα της τιμής $x_i$ μιας μεταβλητής $X$;
4. Ποιά σχέση συνδέει τις συχνότητες των τιμών $x_i$ μιας μεταβλητής $X$, με το μέγεθος του δείγματος $\nu$;
5. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα της τιμής $x_i$ μιας μεταβλητής $X$;
6. Αν $f_i$ είναι η σχετική συχνότητα της τιμής $x_i$ , $i = 1, 2, \cdots , k$ μιας μεταβλητής $X$, να αποδείξετε ότι:
   (α′) $0 \leq f_i \leq 1$
   (β′) $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1$
7. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα και τι αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής $x_i$ μιας ποσοτικής μεταβλητής $X$;
8. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα και τι διάγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων;
9. Ποιά σχέση συνδέει το τόξο ενός κυκλικού διαγράμματος με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα;
10. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις.
    (α′) Το άθροισμα των συχνοτήτων σε μια κατανομή συχνοτήτων είναι ίσο με 1.
    (β′) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $\nu_i$ μιας μεταβλητής $X$ με το μέγεθος του $\nu$ του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα $f_i$ της τιμής $x_i$.
    (γ′) Το άθροισμα όλων των αθροιστικών σχετικών συχνοτή-των (επί τοις εκατό) των τιμών μιας μεταβλητής είναι ίσο με 1.
    (δ′) Οι αθροιστικές συχνότητες $N_i$ μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής $x_i$.
    (ε′) Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i$ μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής $x_i$.
    (ϛ′) Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατωτέρου και του ανωτέρου ορίου της κλάσης.
    (ζ′) Σε ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους, οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.
    (η′) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης.
    (θ′) Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους.
    (ι′) Σε ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος $\nu$ του δείγματος.
11. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις.

(α′) Το ζεύγος που αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων είναι:
Α. $(x_i, \nu_i)$ Β. $(x_i, f_i)$ Γ. $(\nu_i, f_i)$ Δ. $(\nu f_i, x_i)$

(β′) Σε ένα δείγμα μεγέθους $\nu$ με συχνότητα $\nu_i$ της τιμής $x_i$ μιας μεταβλητής $X$ η σχετική συχνότητα $f_i$ ισούται με:
Α.$f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$ Β. $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ Γ. $f_i = \nu_i - \nu$ Δ. $f_i = \dfrac{100}{\nu_i}$

(γ′) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής $X$, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu, k \leq \nu$, τότε αν στην τιμή $x_i$ αντιστοιχίσουμε τη συχνότητα $\nu_i$ ισχύει:
Α. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = 100$ Β. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = 100$
Γ. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = k$ Δ. $\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_k = \nu_k$

(δ′) Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με $a_i$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το $a_i$ ισούται με:
Α. $360^0 \nu_i$ Β. $360^0 f_i$ Γ. $90^0 f_i$ Δ. $180^0 f_i$

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

12. Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή μιας μεταβλητής $X$ ενός δείγματος.
   **i)** Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
   **ii)** Να σχεδιάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

| Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ |
|---|---|
| 1 | 9 |
| 2 | 15 |
| 4 | 6 |

13. Να συμπληρώσετε την τιμή που λείπει στον διπλανό πίνακα, ώστε σε αυτόν να δίνονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής $X$ για ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 200$. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 1 | $0,15$ |
| 2 | $0,2$ |
| 3 | |
| 4 | $0,35$ |
| 5 | $0,06$ |
| 6 | $0,14$ |

14. Πήραμε δείγμα 30 πτυχιούχων οδοντιάτρων και ζητήσαμε να μάθουμε τον χρόνο που απαιτήθηκε για την απόκτηση πτυχίου. Οι απαντήσεις που δόθηκαν έδωσαν τους ακόλουθους χρόνους σε έτη:
$7 \quad 8 \quad 6 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \quad 7 \quad 8$
$6 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 5$
α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).
β) Πόσοι οδοντίατροι πήραν πτυχίο το πολύ σε 7 χρόνια;
γ) Ποιο είναι το ποσοστό των οδοντιάτρων που πήρε πτυχίο σε περισσότερο από 5 χρόνια;
δ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

15. Οι ομάδες αίματος που προέκυψαν από την εξέταση ενός δείγματος $\nu$ ατόμων είναι οι επόμενες:
B A A O AB A O O AB O B AB B A O O AB A O B

i) Να βρείτε το μέγεθος $\nu$ του δείγματος.
ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων
iii) Στο παραπάνω δείγμα ποια ομάδα αίματος είναι: α) πιο συχνή; β) πιο σπάνια;
iv) Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που έχει:
α) ομάδα αίματος O; β) ομάδα αίματος A;
v) Πώς ονομάζεται η γραφική παράσταση με την οποία παρουσιάζουμε τα παραπάνω δεδομένα;
Να σχεδιαστεί η γραφική αυτή παράσταση για τις συχνότητες $\nu_i$ , $i = 1, 2, 3, 4$.

16. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται η ετήσια παραγωγή (σε τόνους) μιας περιοχής. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

| Προιόν | Παραγωγή $\nu_i$ |
|---|---|
| Σιτάρι | 240 |
| Βαμβάκι | 450 |
| Καπνός | 90 |
| Καλαμπόκι | 20 |

17. Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε βαθμούς Κελσίου):
$25 \quad 26 \quad 26 \quad 26 \quad 24 \quad 21 \quad 21 \quad 22 \quad 24 \quad 26 \quad 25 \quad 27 \quad 22 \quad 22 \quad 24$
$23 \quad 23 \quad 26 \quad 25 \quad 26 \quad 22 \quad 23 \quad 27 \quad 24 \quad 23 \quad 21 \quad 21 \quad 23 \quad 23 \quad 22$
α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων
β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν:
i) Μικρότερη από $230^0C$;
ii) Μεγαλύτερη από $240^0C$;
iii) Τουλάχιστον $240^0C$;

18. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

| $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | $0,4$ | | | | |
| 2 | | | 10 | | | |
| 3 | 5 | $0,25$ | 15 | | | |
| 4 | | | | $0,9$ | | |
| 5 | | | | | 10 | |
| Σύνολο | | | | | | |

19. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής $X$.

| Κλάσεις [ - ) | Κεντρικές τιμές $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | Σχετ. συχνότητα $f_i$ | Αθρ. σχετ. συχν. $F_i\%$ |
|---|---|---|---|---|
| $1-5$ | | | | 20 |
| $5-9$ | | | | 50 |
| $9-13$ | | | | 85 |
| $13-17$ | | | | 95 |
| $17-21$ | | | | 100 |
| Σύνολο | | 200 | | |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

20. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής $400$ οθονών τηλεόρασης από την παραγωγή ενός εργοστασίου.
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|---|---|---|---|---|
| $[400, 500)$ | 15 | | | |
| $[500, 600)$ | 45 | | | |
| $[6007500)$ | 60 | | | |
| $[700, 800)$ | 75 | | | |
| $[800, 900)$ | 70 | | | |
| $[1000, 1100)$ | 60 | | | |
| $[1100, 1200)$ | 50 | | | |
| $[400, 500)$ | 25 | | | |
| | 400 | | | |

β) Να κάνετε: i) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων
ii) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
iii) Το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων

21. Σε $150$ αυτοκίνητα μετρήθηκε ο χρόνος που απαιτήθηκε, ώστε από θέση στάσης ($0Km/h$) να αναπτύξουν στιγμιαία ταχύτητα $100Km/h$. Από τη μέτρηση προέκυψε ο διπλανός πίνακας.
α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.
δ) Ποιο είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων που χρειάστηκε από $21sec$ και περισσότερο για να αναπτύξει ταχύτητα $100Km/h$;

| Χρόνος σε sec | Αριθμός αυτοκινήτων |
|---|---|
| $10-12$ | 3 |
| $12-14$ | 21 |
| $14-16$ | 54 |
| $16-18$ | 39 |
| $18-20$ | 15 |
| $20-22$ | 9 |
| $22-24$ | 6 |
| $24-26$ | 3 |

## 2.2 Μέτρα θέσης και διασποράς

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Αν $x_i$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής, $f_i$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες και $\bar{x}$ η μέση τιμή, να αποδείξετε ότι:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

2. Πως ορίζεται ο σταθμικός μέσος $\nu$ τιμών μιας μεταβλητής;

3. Τι ονομάζουμε διάμεσο $\nu$ παρατηρήσεων;

4. Τι ονομάζουμε εύρος ή κύμανση ενός συνόλου παρατηρήσεων;
Είναι αξιόπιστο μέτρο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής;

6. Πότε ένα δείγμα τιμών θεωρείται ομοιογενές;

7. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις.

   (α′) Η διάμεσος ($\delta$) ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή.

   (β′) Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε $cm$ και η διακύμανση εκφράζεται σε $cm$.

   (γ′) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

   (δ′) Ο συντελεστής μεταβλητότητας $CV$ παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς.

   (ε′) Τα μέτρα ασυμμετρίας καθορίζουν τη μορφή της κατανομής.

   (ϛ′) Τα μέτρα ασυμμετρίας εκφράζονται μόνο σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης.

8. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις.

   (α′) Σε ένα δείγμα μεγέθους $\nu$ αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής $X$ είναι $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$. Τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με:
   Α. $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ Β. $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ Γ. $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$ Δ. $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$

   (β′) Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με:
   Α. 2 τυπικές αποκλίσεις Β. 3 τυπικές αποκλίσεις Γ. 4 τυπικές αποκλίσεις Δ. 6 τυπικές αποκλίσεις

   (γ′) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 15 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 9 και 21 είναι περίπου:
   Α. 34% Β. 68% Γ. 95% Δ. $47,5\%$

   (δ′) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 40 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 35 και 50 είναι περίπου:
   Α. $47,5\%$ Β. 68% Γ. $81,5\%$ Δ. 34%

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

9. Το μέσο ύψος 25 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι $172cm$. Ποιό θα είναι το μέσο ύψος των μαθητών και των μαθητριών της τάξης αν:
α) φύγει ένας μαθητής με ύψος $176cm$;
β) έρθουν δύο μαθήτριες με ύψος $168cm$ και $170cm$;
γ) φύγουν δύο μαθητές με ύψος $180cm$ ο καθένας και έρθουν πέντε μαθήτριες με ύψος $174cm$ η καθεμία;

10. Ένα δοχείο περιέχει 5 σφαιρίδια που το καθένα φέρει τους αριθμούς $1, 2, 3, 3, 4, 5$ αντίστοιχα. Κάθε φορά που επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από το δοχείο, ο αριθμός του σημειώνεται και το σφαιρίδιο επανατοποθετείται στο δοχείο. Το πείραμα επαναλαμβάνεται 50 φορές και τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Συχνότητα | $x$ | 11 | $y$ | 8 | 9 |

Αν η μέση τιμή είναι $2,7$ να προσδιορίσετε τις τιμές του $x$ και του $y$.

Απ. x=15 , y=7

11. Η μέση επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών $10$ μαθητών και $14$ μαθητριών μιας τάξης είναι $14,75$. Αν η μέση επίδοση των μαθητριών είναι $15,5$ , να βρείτε τη μέση επίδοση των μαθητών.

Απ. 13,7

12. Ένας αγρότης σημείωσε τον αριθμό των αυγών που συγκέντρωσε σε μια περίοδο $150$ ημερών. Η κατανομή συχνοτήτων των αυγών που μάζεψε παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

| Αριθμός αυγών | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Συχνότητα | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 13 | 18 | 22 | 35 | 30 | 10 |

α) Να υπολογιστεί η διάμεσος του αριθμού των αυγών.
β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αριθμού των αυγών.
γ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων και να σχολιαστεί η μορφή του.

13. Ο διπλανός πίνακας δίνει την ηλικία $22$ πλοίων.
Να υπολογιστούν:
α) η μέση τιμή
β) η διάμεσος

| Ηλικία σε χρόνια | $\nu_i$ |
|---|---|
| $[0,4)$ | 3 |
| $[4,8)$ | 5 |
| $[8,12)$ | 6 |
| $[12,16)$ | 6 |
| $[16,20]$ | 2 |

14. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητές τους. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

**α)**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $0,12$ | $0,2$ | $0,18$ | $0,3$ | $0,2$ |

με $\nu$ άρτιο.

**β)**

| $x_i$ | 0 | 2 | 3 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $0,15$ | $0,12$ | $0,1$ | $0,12$ | $0,08$ | $0,2$ | $0,13$ | $0,1$ |

15. Δίνεται ο πίνακας:

| Κλάσεις | Κέντρο κλάσης | $\nu_i$ | $x_i\nu_i$ | $x_i-\bar{x}$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $\nu_i(x_i-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[4,6)$ | | 7 | | | | |
| $[6,8)$ | | 13 | | | | |
| $[8,10)$ | | 17 | | | | |
| $[10,12)$ | | 18 | | | | |
| $[12,14)$ | | 29 | | | | |
| $[14,16)$ | | 11 | | | | |
| $[16,18]$ | | 5 | | | | |
| | Σύνολα | | | | | |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής της κατανομής.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

16. Τα ημερομίσθια ενός δείγματος 70 εργατών μιας βιομηχανίας δίνονται στον επόμενο πίνακα:

| Αποδοχές σε | $x_i$ | $\nu_i$ | $x_i^2$ | $x_i\nu_i$ | $x_i^2\nu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[30,35)$ | | 8 | | | |
| $[35,40)$ | | 10 | | | |
| $[40,45)$ | | 16 | | | |
| $[45,50)$ | | 15 | | | |
| $[50,55)$ | | 10 | | | |
| $[55,60)$ | | 8 | | | |
| $[60,65]$ | | | | | |
| Σύνολα | | | | | |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής της κατανομής.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

17. Τα βάρη σε κιλά των $30$ μελών μιας ομάδας αθλητών είναι τα ακόλουθα:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 74 | 52 | 67 | 68 | 71 | 76 | 86 | 81 | 73 | 68 | 64 | 75 | 71 | 57 | 67 |
| 57 | 59 | 72 | 79 | 64 | 63 | 70 | 74 | 77 | 79 | 65 | 68 | 76 | 83 | 61 |

**α)** Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις πλάτους 6 κιλών και να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων απολύτων και αθροιστικών.

**β)** Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

**γ)** Πόσοι αθλητές έχουν βάρος λιγότερο από 77 κιλά σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα;
Πόσοι ακριβώς αθλητές έχουν βάρος λιγότερο από 77 κιλά σύμφωνα με τις παρατηρήσεις;
Να εξηγήσετε γιατί έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα.

18. Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής είναι ίση με το μηδέν. Αν $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$ είναι οι τιμές της μεταβλητής και $\bar{x}$ η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \cdots = t_\nu = \bar{x}$.

19. Ο μέσος $\nu$ αριθμών ισούται με 5. Αν προσθέσουμε τον αριθμό 13 στους $\nu$ αριθμούς, ο νέος μέσος ισούται με 6. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών.
Απ. 7

20. Σε ένα δείγμα μεγέθους 25 δίνεται η μέση τιμή $10,2$ και η τυπική απόκλιση $2,1$. Να υπολογιστούν τα $\sum x_i$ , $\sum x_i^2$.

Απ. 255 , 2711,25

21. Οι αριθμοί $\alpha, \beta, 8, 5, 7$ έχουν μέσο 6 και διακύμανση 2. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha$ και $\beta$, αν είναι $\alpha > \beta$.

[Απ. $\alpha = 6$ , $\beta = 4$]

22. Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών ως προς το βάρος τους. Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από $45Kg$ έως $75Kg$ και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.
i) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος.
ii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

[Απ. i)$\bar{x} = \delta = 60Kg$ , $R \simeq 30Kg$ ii)Είναι]

23. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ και οι αντίστοιχες συχνότητές τους.
α) Αν $\bar{x} = 2,25$ , να συμπληρώσετε την τρίτη συχνότητα.
β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

| Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 4 | |
| 5 | 1 |

24. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ και οι αντίστοιχες συχνότητές τους. Από τον πίνακα έχουν χαθεί η δεύτερη και η τέταρτη συχνότητα.
i) Αν $\bar{x} = 1,8$ , να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων αυτών.
ii) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση.

| Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | |
| 2 | 4 |
| 3 | |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| Σύνολο | 15 |

25. Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σε ένα μάθημα. Η μέση τιμή είναι $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση $s$. Το επόμενο τετράμηνο η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξάνεται κατά 2 μονάδες.
i) Ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή και ποιά η νέα τυπική απόκλιση;
ii) Δείξτε ότι $\bar{x} = \dfrac{2CV_2}{CV_1 - CV_2}$.

26. Μία βιομηχανία κατασκευάζει 4 προιόντα Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστά 10% , 20% , 30% , 40% αντίστοιχα με το κόστος κατασκευής $5, 4, 3, 2$ αντίστοιχα.
i) Να υπολογιστεί το μέσο κόστος και ο συντελεστής μεταβλητότητας του κόστους κατασκευής των Α, Β, Γ, Δ.
ii) Να βρείτε πόσο τουλάχιστον πρέπει να αυξηθεί το κόστος κατασκευής κάθε προιόντος ώστε το κόστος κατασκευής των τεσσάρων προιόντων να είναι ομοιογενές.
iii) Αν ελαττωθεί το κόστος κατασκευής κάθε προιόντος κατά 10% και στη συνέχεια γίνει αύξηση κατασκευής κατά $0,3$ ανά μονάδα προιόντος να βρεθεί πόσο γίνεται ο συντελεστής μεταβολής $CV$.

[Απ. i)$\bar{x} = 3$ , $CV = 33,3$% ii)$\geq 7$ iii)30%]

27. Θεωρούμε τη μεταβλητή $X$ η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \cdots, X_k$ και τη μεταβλητή $Y$ με τιμές $y_i = \dfrac{x_i - \alpha}{\beta}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$. Να βρεθούν οι τιμές των $\bar{y}$ και $s_y$ αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση $\bar{x}$ της μεταβλητής $X$.

28. Η κατανομή των ημερομισθίων μιας επιχείρησης ακολουθεί την κανονική κατανομή και το 50% περίπου των υπαλλήλων έχει ημερομίσθιο μεγαλύτερο των 44 ενώ το 16% περίπου έχει ημερομίσθιο μικρότερο των 35.
α) Να βρεθεί η μέση τιμή των ημερομισθίων καθώς και η τυπική απόκλισή τους.
β) Αν 54 υπάλληλοι παίρνουν από 26 έως 35, να βρεθεί το συνολικό αριθμό των υπαλλήλων.
γ) Πόσοι υπάλληλοι παίρνουν ημερομίσθιο μεγαλύτερο των 62; δ) Να βρεθεί η διάμεσος και ο συντελεστής μεταβλητότητας των ημερομισθίων.
ε) Αν κάθε ημερομίσθιο αυξηθεί κατά 10%, ποιές θα είναι οι νέες τιμές των $\bar{x}, s$ και $CV$;

29. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει σιδεροσωλήνες. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς το μήκος είναι κανονική με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση $s$. Το 95% των σωλήνων έχουν μήκος από $4,6$ έως $5,4$ μέτρα.
α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το εύρος της κατανομής.
β) Τι ποσοστό σωλήνων έχουν μήκος μεταξύ των $4,8$ και $5,6$ μέτρων;
γ) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική αν έχει μήκος μικρότερο των $4,4m$ ή μεγαλύτερο των $5,6m$. Αν το εργοστάσιο παράγει 50000 σωλήνες από τις οποίες οι 140 είναι ελαττωματικές, να εξεταστεί αν το εργοστάσιο παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας.

30. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο μια ορισμένη μέρα έχουν μέση διάρκεια ζωής 1400 ώρες και ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής είναι 5%.
α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.
β) Αν για τη διάρκεια ζωής $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ των λαμπτήρων ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 98245 \cdot 10^5$, να βρεθεί το πλήθος $\nu$ των λαμπτήρων.
γ) Αν το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή, να βρεθεί πόσοι λαμπτήρες έχουν διάρκεια ζωής περισσότερο από 1470 ώρες.

31. Έστω $x_i$ οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων και $s^2$ είναι η διακύμανση. Να αποδείξετε ότι:

$$s^2 = 0 \Longleftrightarrow x_i = \bar{x}, \quad 1 \leq i \leq \nu$$

32. Αν $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των τιμών $x_i$ μιας μεταβλητής $X$ ενός δείγματος, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\nu_1(x_1 - \bar{x}) + \nu_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots + \nu_k(x_k - \bar{x}) = 0$$

33. Η μέση τιμή των τιμών $x_1, x_2, \cdots, x_k$ μιας μεταβλητής $X$ ενός δείγματος είναι 0 και η τυπική απόκλισή τους είναι 1. Να αποδείξετε ότι:

$$\nu_1(x_1^2 - 1) + \nu_2(x_2^2 - 1) + \ldots + \nu_k(x_k^2 - 1) = 0$$

34. Θεωρούμε δύο μεταβλητές $X$ και $Y$ ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων με τιμές $x_i$ και $y_i$ αντίστοιχα ($1 \leq i \leq \nu$). Οι τιμές των δύο μεταβλητών συνδέονται με τη σχέση $y_i = \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma$. Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{y} = \alpha\overline{x^2} + \beta\bar{x} + \gamma = \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x} + \gamma + \alpha s_x^2$$

35. Αν $c$ σταθερός αριθμός να αποδείξετε ότι:

**α)** $\bar{x} = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c) + c$

**β)** $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c)^2 - (c - \bar{x})^2$

**γ)** $\dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - c)^2 \geq s^2$

Να εξηγήσετε τη σημασία της σχέσης **γ)**

36. Να αποδείξετε ότι: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i(x_i - \bar{x})$

37. Σε ένα δείγμα $\nu$ παρατηρήσεων, $x_i$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ και $y_i$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής $Y$. Αν $x_i + y_i$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής $Z$, να αποδείξετε ότι:

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + \frac{2}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

38. Να αποδείξετε ότι: $s^2 \neq \bar{x}$.

39. Σε μια ερώτηση στα μαθηματικά απάντησαν $\nu$ μαθητές σε χρόνους $t_1, t_2, ..., t_\nu$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + ... + (t_\nu - x)^2$ , $x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 2$, ίσο με 8.

   **α)** Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

   **β)** Να αποδείξετε ότι : $g'(0) = -4\nu$.

   **γ)** Να βρείτε το μικρότερο πλήθος $\nu$ ώστε το δείγμα $t_1, t_2, ..., t_\nu$ να είναι ομοιογενές.

   **δ)** Αν $\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 48$, Να βρείτε το πλήθος $\nu$ των μαθητών.

40. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

$$7\ ,\ 5\ ,\ \alpha\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ \beta\ ,\ 8\ ,\ 6\ ,\ \gamma\ ,\ 5\ ,\ 3\ ,$$

   όπου $\alpha, \beta, \gamma$ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$ , $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

   **α)** Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma$ , έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.

   **β)** Για τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma$, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $S_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

   **γ)** Έστω $y_1, y_2, ..., y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, ..., x_{11}$ επί μια θετική σταθερά $c_1$ και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά $c_2$. Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών $c_1$ και $c_2$.

# Κεφάλαιο 3

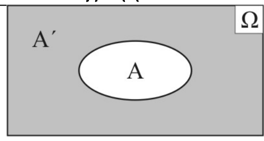
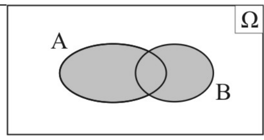
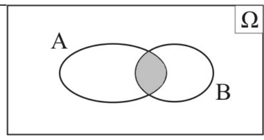
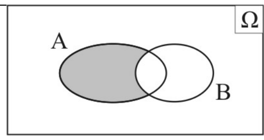
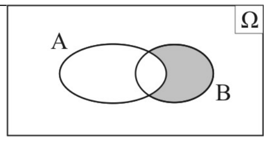
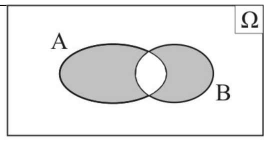
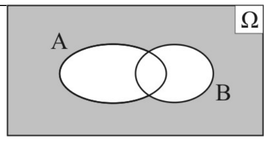
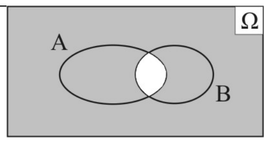
# Πιθανότητες

## 3.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

### 3.1.1 Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Ποιό πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό και ποιό πείραμα τύχης;
2. Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης;
3. Τι λέμε ενδεχόμενο ή γεγονός ενός πειράματος τύχης;
4. Ποιό ενδεχόμενο λέγεται απλό και ποιό σύνθετο;
5. Ποιό είναι το βέβαιο και ποιό το αδύνατο ενδεχόμενο;
6. Πότε δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$ λέγονται ασυμβίβαστα;
   Πως αλλιώς λέμε τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα;

### 3.1.2 Πράξεις με ενδεχόμενα

| Συμβολισμός | Ενδεχόμενο | Επεξήγηση | Διάγραμμα Venn |
|---|---|---|---|
| $A'$ | όχι $A$ | Το $A'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το $A$ |   |
| $A \cup B$ | $A$ ή $B$ | Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα $A, B$ |   |
| $A \cap B$ | $A$ και $B$ | Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα $A, B$ |   |
| $A - B = A \cap B'$ | Διαφορά του $B$ από το $A$ | Το $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το $A$ αλλά όχι το $B$ |   |
| $B - A = B \cap A'$ | Διαφορά του $A$ από το $B$ | Το $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το $B$ αλλά όχι το $A$ |   |
| $(A - B) \cup (B - A)$ | Διαφορά του $B$ από το $A$ ή διαφορά του $A$ από το $B$ | Το $(A - B) \cup (B - A)$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το $A$ ή μόνο το $B$ |   |
| $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | όχι $A$ ή $B$ | Το $(A \cup B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα $A$ , $B$ |   |
| $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | όχι $A$ και $B$ | Το $(A \cap B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα $A$ και $B$ |   |

## 3.2 Η έννοια της πιθανότητας

**Κατανόηση εννοιών - Θεωρία**

1. Τι αναφέρει ο νόμος των μεγάλων αριθμών ή στατιστική ομαλότητα.
2. Να διατυπώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.
3. Έστω $\Omega$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $P(\Omega) = 1$
   (β′) $P(\emptyset) = 0$
   (γ′) Για κάθε ενδεχόμενο $A$ ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.
5. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα $A$ και $B$ ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
6. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα $A$ και $A'$ ισχύει:
$$P(A') = 1 - P(A)$$
7. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A$ και $B$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
8. Αν $A$ , $B$ είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ με $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$
9. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ ισχύει
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

**Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα**

10. Σε ένα παιγνίδι μετέχουν δύο παίκτες και νικητής αναδεικνύεται αυτός που πρώτος θα πετύχει δύο νίκες. Οι δύο παίκτες έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν.
    **α)** Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
    **β)** Ποιά είναι η πιθανότητα το παιγνίδι να ολοκληρωθεί σε δύο γύρους;

Απ. β)1/3

11. Ένας τροχός τύχης έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Στους τρεις από αυτούς έχει την ένδειξη ”χάνεις”. Στους άλλους τρεις υπάρχει η ένδειξη κέρδος 1€, 2€, 5€ αντίστοιχα. Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2€. Αν στο δείκτη σταματήσει η ένδειξη ”Χάνεις” τότε ο παίκτης δεν εισπράττει τίποτα, διαφορετικά εισπράττει το ποσό που αναγράφεται στην ένδειξη. Αν ένας παίκτης παίξει 150 φορές, να βρεθεί
    **α)** Πόσες φορές αναμένεται να εισπράξει 5€.
    **β)** Τι ποσό αναμένεται να κερδίσει ή να χάσει συνολικά.

Απ. α)25 β)Να χάσει 100€

12. Αν $A, B$ είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ και $P(A) = \dfrac{8}{15}, P(B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
    $A \cup B$ , $A'$ , $B'$ , $A' \cap B'$ , $A' \cup B'$ , $A \cap B'$ , $A' \cap B$ , $(A - B) \cup (B - A)$ , $A \cup B'$
13. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(\omega_1) = \lambda - \frac{3}{4}$, $P(\omega_2) = 2\mu - \frac{7}{2}$ όπου $\lambda, \mu$ θετικοί ακέραιοι. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$

Απ. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

14. Θεωρούμε ένα ενδεχόμενο $A$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$[P(A)]^2 + [P'(A)]^2 = 1$$

. Να αποδείξετε ότι το $A$ είναι το αδύνατο ή το βέβαιο ενδεχόμενο.

15. Ένα Γυμνάσιο έχει $24$ εκπαιδευτικούς από τους οποίους οι $14$ είναι καθηγήτριες. Οι Μαθηματικοί είναι $4$, από τους οποίους 3 είναι καθηγητές και μια καθηγήτρια. Αν επιλέξουμε έναν εκπαιδευτικό, να βρείτε την πιθανότητα να είναι καθηγητής ή Μαθηματικός.

Απ. $\frac{11}{24}$

16. Σε μια πόλη κυκλοφορούν δύο περιοδικά, το ΑΛΦΑ και το ΒΗΤΑ. Το $25\%$ των κατοίκων έχει διαπιστωθεί ότι διαβάζει το ΑΛΦΑ, το $85\%$ δεν διαβάζει το ΒΗΤΑ, ενώ το $38\%$ των κατοίκων διαβάζει ένα τουλάχιστον από τα δύο περιοδικά.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:

**α)** Ένας κάτοικος να διαβάζει και τα δύο περιοδικά.

**β)** Ένας κάτοικος να μην διαβάζει κανένα περιοδικό.

Απ. α)2% β)62%

17. Έχει διαπιστωθεί ότι το $68\%$ των ατόμων που εργάζονται σε μία επιχείρηση γνωρίζει Αγγλικά, το $16\%$ γνωρίζει Γερμανικά, ενώ το $26\%$ δεν γνωρίζει καμμιά από τις δύο γλώσσες. Να βρείτε την πιθανότητα ένα άτομο να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες.

Απ. 10%

18. Ένα παλιό αυτοκίνητο χαλάει $65\%$ από βλάβη μηχανής, $20\%$ από αμέλεια οδηγού και $5\%$ Από βλάβη μηχανής και αμέλεια οδηγού. Επίσης χαλάει και από άλλες αιτίες. Ποιά είναι η πιθανότητα να χαλάσει το αυτοκίνητο μόνο από βλάβη μηχανής ή μόνο από αμέλεια οδηγού;

Απ. 75%

19. Ο ποιοτικός έλεγχος σε ένα μηχάνημα που παράγεται από μια βιομηχανία έδειξε ότι: Η πιθανότητα να μην λειτουργεί είναι 4%. Η πιθανότητα να έχει άλλο ελάττωμα είναι 6%. Η πιθανότητα να μην λειτουργεί και να έχει άλλο ελάττωμα είναι 2%.
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρεθεί η πιθανότητα:

**i)** Να μην λειτουργεί ή να έχει άλλο ελάττωμα.

**ii)** Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει άλλο ελάττωμα μόνο.

Απ. i)8% ii)6%

20. Μια ομάδα έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει το πρωτάθλημα, 35% να κερδίσει το κύπελο και 77% να κερδίσει έναν τουλάχιστον τίτλο. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

**i)** Να κερδίσει και τους δύο τίτλους.

**ii)** Να μην κερδίσει κανέναν τίτλο.

**iii)** Να κερδίσει μόνο το πρωτάθλημα.

Απ. i)8% ii)23% iii)42%

21. Η πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία, να είναι αριστερόχειρας είναι $\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να είναι αριστερόχειρας και να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{12}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

**α)** Να είναι αριστερόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

**β)** Να είναι αριστερόχειρας αλλά να μην φοράει γυαλιά.

**γ)** Να είναι δεξιόχειρας και να μην φοράει γυαλιά.

**δ)** Να είναι δεξιόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

Απ. α) β) γ) δ)

22. Αν $A, B$ είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ και $P(A) = \dfrac{3}{4}$ , $P(B) = \dfrac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι:
α) $P(A \cup B) \geq 0,75$
β) $\dfrac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{3}{8}$.

23. Αν $A, B$ είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ και $P(A) = \dfrac{2}{3}$ , $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A, B$ είναι ασυμβίβαστα.
β) Να αποδείξετε ότι: $P(A' \cap B) \leq \dfrac{1}{3}$.

24. Αν $A, B$ είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ και $P(A) = \dfrac{1}{2}$ , $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4} \leq P(B) \leq \dfrac{3}{4}$.

25. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A, B$ του $\Omega$ τα οποία ορίζονται ως εξής:
$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\}$
$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}$

**α)** Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(B \cup A')$.

**β)** Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

**γ)** Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B - A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου $X$ είναι ενδεχόμενο του $\Omega$ τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

# ΘΕΜΑΤΑ 2012

## ΘΕΜΑ Α:

**Α1.** Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

*(Μονάδες 7)*

**Α2.** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α.

*(Μονάδες 4)*

**Α3.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

*(Μονάδες 4)*

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων.

**β)** Η παράγωγος της $f$ στο $x_0$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς $x$, όταν $x = x_0$.

**γ)** Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, τότε ισχύει ότι Ρ(Α)>Ρ(Β).

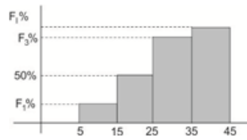
**δ)** Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς..

**ε)** $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

*(Μονάδες 10)*

## ΘΕΜΑ Β:

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.




**Β1.** Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

*(Μονάδες 4)*

**Β2.** Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (*Μονάδες 3*) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (*Μονάδες 5*).

| Χρόνοι (λεπτά) | $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i$% | $N_i$ | $F_i$% |
|---|---|---|---|---|---|
| [5 , ) | | $\alpha+4$ | | | |
| [ , ) | | $3\alpha-6$ | | | |
| [ , ) | | $2\alpha+8$ | | | |
| [ , 45) | | $\alpha-2$ | | | |
| Σύνολο | | | | | |

*(Μονάδες 8)*

**Β3.** Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση $s$ των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.
(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \simeq 9{,}17$)

*(Μονάδες 8)*

**Β4.** Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

*(Μονάδες 5)*

## ΘΕΜΑ Γ:

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν $\nu$ φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- Και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- Μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

*(Μονάδες 7)*

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι $\nu = 3$.

*(Μονάδες 6)*

**Γ3.** Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

*(Μονάδες 6)*

**Γ4.** Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

*(Μονάδες 6)*

## ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, $x > 0$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

*(Μονάδες 5)*

**Δ2.** Έστω $\mathrm{M}(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της $f$. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον άξονα $Ox$ στο σημείο $\mathrm{K}(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $Oy$ στο σημείο $\mathrm{K}(0, f(x))$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

*(Μονάδες 7)*

**Δ3.** Έστω η ευθεία $\varepsilon$: $y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$ της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους $x_i$ να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων $y_i$ των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

*(Μονάδες 8)*

**Δ4.** Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $\mathrm{A} \neq \varnothing$ και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(\mathrm{P}(\mathrm{A})) + f(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) \geq 2 f(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))$$

*(Μονάδες 5)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2011

**ΘΕΜΑ Α:**

**Α1.** Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: Ρ(Α–Β) = Ρ(Α) – Ρ(Β).

*(Μονάδες 7)*

**Α2.** Πότε δύο ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

*(Μονάδες 4)*

**Α3.** Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα $f_i$ μιας παρατήρησης $x_i$ ενός δείγματος.

*(Μονάδες 4)*

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**β)** Σε μια κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \simeq 6\,\overline{x}$ .

**γ)** Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει

$$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

**δ)** Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

**ε)** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

*(Μονάδες 10)*

**ΘΕΜΑ Β:**

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος Ν(Ω) των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

**Β1.** Να δείξετε ότι Ν(Ω) = 68.

*(Μονάδες 6)*

**Β2.** Να υπολογιστεί η τιμή του $\lambda$.

*(Μονάδες 8)*

**Β3.** Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

*(Μονάδες 6)*

**Β4.** Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

*(Μονάδες 5)*

**ΘΕΜΑ Γ:**

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων σε κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

Α(8,0) Β(10,10) Γ(12,20) $\Delta(14, y_\Delta)$
$E(16, y_E)$ Ζ(18,10) Η(20,0)

όπου $y_\Delta$ , $y_E$ οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

**Γ1.** Να υπολογιστούν οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.

*(Μονάδες 7)*

**Γ2.** Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

*(Μονάδες 3)*

**Γ3.** Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

*(Μονάδες 7)*

**Γ4.** Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους τους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

*(Μονάδες 4)*

**Γ5.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο **Γ4** ερώτημα.

*(Μονάδες 4)*

**ΘΕΜΑ Δ:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$ , $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να μελετηθεί η $f$ ως προς τη μονοτονία.

*(Μονάδες 8)*

**Δ2.** Αν Α , Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και Ρ(Α) , Ρ(Β) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B)$ , Ρ(Α–Β) , $P(A \cup B)$ , Ρ(Β–Α).

*(Μονάδες 8)*

**Δ3.** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}$ , $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$

*(Μονάδες 3)*

**β)** Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $\nu_i = 2x_i + 1$ , i = 1, 2, 3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων $x_i$ τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

*(Μονάδες 6)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2010

## ΘΕΜΑ Α:

**Α1.** Έστω $t_1$ , $t_2$ , … , $t_ν$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους $ν$, που έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ .

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\overline{x}$ , $t_2-\overline{x}$ , … , $t_ν-\overline{x}$ .

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με το μηδέν.

*(Μονάδες 7)*

**Α2.** Αν $x_1$ , $x_2$ , … , $x_ν$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους $ν$ και $w_1$ , $w_2$ , … , $w_ν$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

*(Μονάδες 4)*

**Α3.** Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

*(Μονάδες 4)*

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Αν οι συναρτήσεις $f$, $g$ έχουν στο $x_0$ όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

**β)** Για κάθε $x>0$ ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ .

**γ)** Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή $t_0$ είναι $υ(t_0)=f'(t_0)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση $f$ λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1$ , $x_2\in Δ$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

**ε)** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης που επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

*(Μονάδες 10)*

## ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1$ , $x\in\mathbb{R}$ .

**α.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ .

*(Μονάδες 10)*

**β.** Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

*(Μονάδες 10)*

**γ.** Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

*(Μονάδες 5)*

## ΘΕΜΑ Γ:

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

| ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ | ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ $x_i$ | ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $ν_i$ |
|---|---|---|
| [0 - …] | … | 20 |
| [… - …] | 6 | 40 |
| [… - …] | … | 45 |
| [… - …] | … | 30 |
| [… - …] | … | 25 |
| ΣΥΝΟΛΟ | | 160 |

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος $c$ κάθε κλάσης είναι ίσο με 4.

*(Μονάδες 6)*

**Γ2.** Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση $s$.

*(Μονάδες 8)*

**Γ3.** Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

*(Μονάδες 5)*

**Γ4.** Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Α : «η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά»

*(Μονάδες 6)*

Δίνεται ο τύπος $s^2=\dfrac{1}{ν}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2ν_i-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_iν_i\right)^2}{ν}\right]$

## ΘΕΜΑ Δ:

Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες Ρ(Α) , Ρ(Β) και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x-P(A)\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(x-P(A)\right)^2+P(B)\ ,\ x>\mathrm{P(A)}$$

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

*(Μονάδες 13)*

**Δ2.** Αν η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\dfrac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{P(A)}=\frac{2}{3}\ \text{ και }\ \mathrm{P(B)}=\frac{1}{2}\ .$$

*(Μονάδες 2)*

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $\mathrm{P(A\cup B)}=\dfrac{5}{6}$ , να βρείτε την πιθανότητα:

**Δ3.** να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β.

*(Μονάδες 5)*

**Δ4.** να πραγματοποιηθούν μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β.

*(Μονάδες 5)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2009

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

*(Μονάδες 10)*

**Β.** Αν $x_1$, $x_2$, … , $x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu$ ($\kappa \leq \nu$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα $f_i$ της τιμής $x_i$, i = 1, 2, … , $\kappa$.

*(Μονάδες 5)*

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f$, $g$ ισχύει ότι

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g'(x) + f(x)\cdot g(x)$$

*(Μονάδες 2)*

**β.** Αν Α , Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

*(Μονάδες 2)*

**γ.** Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ισχύει ότι

$$(\eta\mu x)' = -\,\sigma\upsilon\nu x$$

*(Μονάδες 2)*

**δ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

*(Μονάδες 2)*

**ε.** Η μέση τιμή ενός συνόλου $\nu$ παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

*(Μονάδες 2)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές $x_i$, i = 1, 2, 3, 4 μιας μεταβλητής Χ με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_i$, i = 1, 2, 3, 4. Η συχνότητα $\nu_2$ που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 4$.

| $x_i$ | $\nu_i$ |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 3 | ; |
| 5 | 3 |
| 8 | 4 |

**α.** Να αποδείξετε ότι $\nu_2 = 7$.

*(Μονάδες 9)*

**β.** Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

*(Μονάδες 9)*

**γ.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής Χ είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{4{,}9} \approx 2{,}2$ .

*(Μονάδες 7)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ , όπου $\alpha$ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

**α.** δείξετε ότι $\alpha = 9$.

*(Μονάδες 7)*

**β.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{x^2 - 1}$

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$.

*(Μονάδες 10)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ , $x > 0$

όπου $\lambda$ ένας πραγματικός αριθμός.

**Α. α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η $f$ είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

*(Μονάδες 6)*

**β.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$ ως προς τα ακρότατα.

*(Μονάδες 6)*

**Β.** Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(3)$ και $f(5)$, είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

**α.** Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R = 3 + \ln\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

*(Μονάδες 7)*

**β.** Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το $\lambda$ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega \,/\, R + \delta < -2\}$$

*(Μονάδες 6)*

## ΘΕΜΑΤΑ 2008

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου $x$ πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$.

*(Μονάδες 8)*

**Β.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

*(Μονάδες 7)*

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ο τύπος
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

*(Μονάδες 2)*

**β.** Η διάμεσος $\delta$ ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

*(Μονάδες 2)*

**γ.** Αν $x > 0$, τότε $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

*(Μονάδες 2)*

**δ.** Αν $x_0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε
$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 .$$

*(Μονάδες 2)*

**ε.** Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

*(Μονάδες 2)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$, όπου $x$ πραγματικός αριθμός.

**α.** Να αποδείξετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

*(Μονάδες 7)*

**β.** Να αποδείξετε ότι $e^x \cdot f'(x) = 2 - x$.

*(Μονάδες 9)*

**γ.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

*(Μονάδες 9)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

| Α | Β |
|---|---|
| 20 | 26 |
| 26 | 32 |
| 24 | 19 |
| 22 | 20 |
| 18 | 23 |

**α.** Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

*(Μονάδες 5)*

**γ.** Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις $S_A$ και $S_B$ της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

*(Μονάδες 7)*

**δ.** Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.
Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3{,}3$.

*(Μονάδες 8)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

**α.** Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

*(Μονάδες 7)*

**β.** Ορίζουμε το ενδεχόμενο
Β : «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».
Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{5} \le P(B) \le \dfrac{7}{10}$.

*(Μονάδες 9)*

**γ.** Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο
$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + P(B)\cdot x$$
όπου $x$ πραγματικός αριθμός και Β το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

*(Μονάδες 9)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2007

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

*(Μονάδες 8)*

**Β. α)** Πότε μια συνάρτηση $f$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

*(Μονάδες 4)*

**β)** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ($\delta$) ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων, όταν ο $\nu$ είναι άρτιος αριθμός.

*(Μονάδες 3)*

**Γ.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές συχνότητες $F_i$ εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής $x_i$.

*(Μονάδες 2)*

**β.** Αν $f$, $g$ είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x).$$

*(Μονάδες 2)*

**γ.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \beta)$, τότε η $f$ παρουσιάζει στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ για $x = x_0$ ελάχιστο.

*(Μονάδες 2)*

**Γ.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = x^\nu$ , όπου $\nu$ φυσικός
$f_2(x) = \ln x$ , όπου $x > 0$
$f_3(x) = \sqrt{x}$ , όπου $x > 0$
$f_4(x) = συνx$ , όπου $x$ πραγματικός

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\cdot e^x + 3$ , όπου $x$ πραγματικός αριθμός.

**α.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$.

*(Μονάδες 10)*

**β.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.

*(Μονάδες 15)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ για τον οποίο ισχύει

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5).$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω:

$A = \{1 , 3 , x^2-x-3\}$ , $B = \{2 , x+1 , 2x^2+x-2 , -2x+1\}$ όπου $x$ πραγματικός αριθμός.

**α.** Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω, δηλαδή οι $P(-1)$ , $P(0)$ , $P(1)$ , $P(2)$ , $P(3)$ , $P(4)$ , $P(5)$.

*(Μονάδες 7)*

**β.** Να βρεθεί η μοναδική τιμή του $x$ για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1,3\}$.

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Για $x = -1$ να δειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, \quad P(B) = \frac{7}{11}, \quad P(A\cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(A \cup B')$.

*(Μονάδες 10)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Θεωρούμε δύο δείγματα με παρατηρήσεις:

Δείγμα Α: $12 , 18 , t_3 , t_4 , \ldots , t_{25}$
Δείγμα Β: $16 , 14 , t_3 , t_4 , \ldots , t_{25}$

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \ldots + t_{25} = 345$.

**α.** Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$ , $\bar{x}_B$ των δύο δειγμάτων Α και Β αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$.

*(Μονάδες 7)*

**β.** Αν $s_A^2$ είναι η διακύμανση του δείγματος Α και $s_B^2$ είναι η διακύμανση του δείγματος Β, να αποδείξετε ότι

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}.$$

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Α είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής $CV_B$ του δείγματος Β.

*(Μονάδες 10)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2006

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c$ πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)\ .\ x\in\mathbb{R}\ .$$

*(Μονάδες 10)*

**Β. α)** Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

*(Μονάδες 3)*

**β)** Πότε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

*(Μονάδες 4)*

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in$ Α, όταν $f(x)\ \le f(x_0)$ για κάθε $x$ σε μία περιοχή του $x_0$.

**β.** Αν το ενδεχόμενο Α΄, συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α, πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α.

**γ.** Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ .

**δ.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

*(Μονάδες 8)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν κατά την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

| Αριθμός βιβλίων $x_i$ | Αριθμός μαθητών $\nu_i$ |
|---|---|
| 0 | $\alpha+4$ |
| 1 | $5\alpha+8$ |
| 2 | $4\alpha$ |
| 3 | $\alpha-1$ |
| 4 | $2\alpha$ |
| Σύνολο | 50 |

**α.** Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha$.

*(Μονάδες 3)*

Στη συνέχεια να βρείτε:

**β.** Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

*(Μονάδες 7)*

**γ.** Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

*(Μονάδες 7)*

**δ.** Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

*(Μονάδες 8)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν $x$ αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

**α.** Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπίσει τον όμιλο σε μία εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του $x$ την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

*(Μονάδες 7)*

**β.** Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

*(Μονάδες 10)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x}\ + 10\ ,\ x\ge 0$.

**α.** Αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Μια τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}\ = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\frac{2f'(4)}{13}$ . Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

**i)** Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16).

*(Μονάδες 10)*

**ii)** Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί δεν είναι ομοιογενές.
Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μια από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

*(Μονάδες 10)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2005

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

*(Μονάδες 10)*

**Β. α)** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

*(Μονάδες 3)*

**β)** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

*(Μονάδες 4)*

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta$.

**β.** Ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ όπου $f, g$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

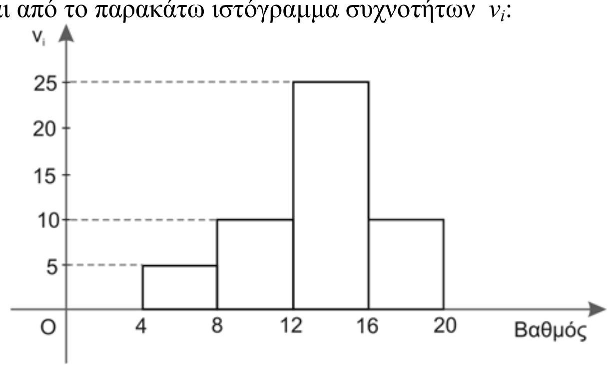
**γ.** Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

**δ.** Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

*(Μονάδες 8)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων $v_i$:




**α.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις Βαθ/γιας | Κέντρο κλάσης $x_i$ | Συχνότ. $v_i$ | Σχετ. συχν. $f_i$ | Αθρ. συχν. $N_i$ | Αθρ. σχετ. συχν. $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [4,8) | | | | | |
| [8,12) | | | | | |
| [12,16) | | | | | |
| [16,20) | | | | | |
| Σύνολο | | | | | |

*(Μονάδες 11)*

**β.** Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

*(Μονάδες 6)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Έστω $A$ και $B$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$, ώστε να ισχύουν:

**(i)** Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα $A$, $B$ είναι $\frac{7}{8}$.

**(ii)** Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \{\kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\}$, όπου $\kappa = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x-15}{x^2-6x+5}$.

**α.** Να βρεθεί το $\kappa$.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

*(Μονάδες 8)*

**γ.** Να βρεθούν οι πιθανότητες:

**(1)** Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

*(Μονάδες 6)*

**(2)** Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

*(Μονάδες 6)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

**α.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f$ στο σημείο Α(1,1).

*(Μονάδες 7)*

**β.** Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της $f$ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες $Ox$, $Oy$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $M$, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

*(Μονάδες 10)*

**γ.** Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτόμενης του ερωτήματος **(α)** έχουν μέση τιμή $\overline{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση $s_y$ των τεταγμένων των σημείων αυτών.

*(Μονάδες 8)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2004

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι ίση με 0.

*(Μονάδες 8)*

**Β.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης $f$ στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της.

*(Μονάδες 5)*

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Η συχνότητα της τιμής $x_i$ μιας μεταβλητής $X$ είναι αρνητικός αριθμός.

**β.** Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και $s$ η τυπική τους απόκλιση.

**γ.** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $\nu_i$ μιας μεταβλητής $X$ με το μέγεθος $\nu$ του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα $f_i$ της τιμής $x_i$.

*(Μονάδες 6)*

**Δ.** Στον παρακάτω πίνακα τα $A$ και $B$ συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη Ι** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη ΙΙ** σχέσεις διατυπωμένες στην γλώσσα των συνόλων.
Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλη Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλη ΙΙ** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

| **Στήλη Ι** | **Στήλη ΙΙ** |
|---|---|
| **α.** Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα $A$, $B$.<br>**β.** Πραγματοποιείται μόνο το $A$.<br>**γ.** Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα $A$ και $B$. | **1.** $A\cap B$<br>**2.** $A-B$<br>**3.** $(A\cup B)'$<br>**4.** $A\cup B$ |

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύει μια σχέση.

*(Μονάδες 6)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

**Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

*(Μονάδες 10)*

**Β.** Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

*(Μονάδες 15)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 εως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

| Κλάσεις σε χλμ. | Κέντρο κλάσης $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ σε χιλ. μονάδες | Σχετική συχνότητα $f_i$% | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | Αθρ.Σχετ. συχνότητα $F_i$% |
|---|---|---|---|---|---|
| [5,15) | | 60 | | | |
| [15,25) | | | | | 68 |
| [25,35) | | | | 180 | |
| [35,45) | | | | | |
| Σύνολο | | 200 | | | |

**Α.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

*(Μονάδες 10)*

**Β.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i\,\%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

*(Μονάδες 5)*

**Γ.** Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

*(Μονάδες 6)*

**Δ.** Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

*(Μονάδες 5)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=2x^3-\frac{5}{2}x^2+x+10$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων $A$ και $B$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ είναι ίσες με τις τιμές του $x$, στις οποίες η $f$ έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

**Α.** Να δείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$.

*(Μονάδες 9)*

**Β.** Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

**i.** $P(A\cap B)$
**ii.** $P(A-B)$
**iii.** $P[(A\cap B)']$
**iv.** $P[(A-B)\cup(B-A)]$

*(Μονάδες 16)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2003

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

*(Μονάδες 8)*

**Β.** Πότε μια συνάρτηση $f$ σε ένα διάστημα $\Delta$ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

*(Μονάδες 6)*

**Γ.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος $\nu$ παρατηρήσεων.

*(Μονάδες 6)*

**Δ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

**β.** Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**γ.** Ισχύει $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ όπου $f, g$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**δ.** Δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$ του ίδιου δειγματικού χώρου $\Omega$ λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A\cap B=\varnothing$.

**ε.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

*(Μονάδες 5)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

**α.** γυναίκα ή φιλόλογος

*(Μονάδες 5)*

**β.** γυναίκα και όχι φιλόλογος

*(Μονάδες 5)*

**γ.** άνδρας και φιλόλογος

*(Μονάδες 7)*

**δ.** άνδρας ή φιλόλογος

*(Μονάδες 8)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

**Α.** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:
**α.** $\mathbb{R}$ **β.** $(-1,1)$ **γ.** $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ **δ.** $(1,+\infty)$

*(Μονάδες 5)*

**Β.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x$ του πεδίου ορισμού της.

*(Μονάδες 7)*

**Γ.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1}[(x+1)\cdot f(x)]$

*(Μονάδες 6)*

**Δ.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

*(Μονάδες 7)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

| Ομάδα Α | Ομάδα Β |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 8 | 14 |
| 9 | 6 |
| 5 | 4 |
| 3 | 12 |
| 4 | 5 |

**α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

*(Μονάδες 6)*

**β.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

*(Μονάδες 5)*

**γ.** Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

*(Μονάδες 8)*

**δ.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

*(Μονάδες 6)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2002

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.** Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής $X$ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu$, όπου $\kappa, \nu$ μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

**α.** Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα $\nu_i$, που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

*(Μονάδες 3)*

**β.** Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα $f_i$, της τιμής $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

*(Μονάδες 3)*

**γ.** Να αποδείξετε ότι:

**i)** $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$

**ii)** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$

*(Μονάδες 4)*

**Β.1.** Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα $A$, $B$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

*(Μονάδες 8)*

**Β.2. α.** Να δώσετε το κλασσικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου $A$ κάποιου δειγματικού χώρου $\Omega$.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

**i)** $P(\Omega)$ **ii)** $P(\varnothing)$

*(Μονάδες 2)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

*(Μονάδες 4)*

**β.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

*(Μονάδες 4)*

**γ.** Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της $f$.

*(Μονάδες 7)*

**δ.** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης $f$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x+5$.

*(Μονάδες 10)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε ευρώ:

8 , 10 , 13 , 13 , 15 , 16 , 18 , 14 , 14 , 9

**α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

*(Μονάδες 6)*

**β.** Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

*(Μονάδες 6)*

**γ.** Αν οι τιμές του προϊόντος υποστούν έκπτωση 10% να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

*(Μονάδες 13)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Έστω $A, B$ δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x - P(A \cup B)\right)^3 - \left(x - P(A \cap B)\right)^3, \ x \in \mathbb{R}.$$

**α.** Να δείξετε ότι: $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$

*(Μονάδες 5)*

**β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

*(Μονάδες 13)*

**γ.** Εάν τα ενδεχόμενα $A$, $B$ είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι: $f(P(A)) = f(P(B))$.

*(Μονάδες 7)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2001

**ΘΕΜΑ 1ο:**

**Α.1** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ ισχύει ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

*(Μονάδες 8,5)*

**Α.2** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ( = , ≤ , ≥ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

**α.** $P(A') \ldots 1 - P(A)$

*(Μονάδες 2)*

**β.** Αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \ldots P(A)$

*(Μονάδες 2)*

**Β.1** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Τα $A$ και $B$ είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $\Omega$ και $A'$ το αντίθετο του ενδεχομένου $A$.

**α.** Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$

**β.** Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$

*(Μονάδες 4)*

**Β.2** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $A \subseteq B$ , $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

**Α.** $\frac{1}{4}$ **Β.** $\frac{5}{12}$ **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** $\frac{1}{6}$

*(Μονάδες 2,5)*

**Β.3** *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Τα $A$ και $B$ είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $\Omega$ και ισχύει ότι $P(A) = 1/3$ , $P(B) = 1/4$ και $P(A \cap B) = 1/5$

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **α.** $P(A-B)$ | **1.** 1/20 |
| **β.** $P((B-A)')$ | **2.** 2/15 |
| **γ.** $P((A \cap B)')$ | **3.** 4/5 |
| | **4.** 1/12 |
| | **5.** 19/20 |

*(Μονάδες 6)*

**ΘΕΜΑ 2ο:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x + \text{ημ}x$.

**Α.** Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

*(Μονάδες 8)*

**Β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $A(0,1)$.

*(Μονάδες 8)*

**Γ.** Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathrm{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 .$$

*(Μονάδες 9)*

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

| Βάρος σε κιλά [ – ) | Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$ |
|---|---|
| 45 – 55 | 0,2 |
| 55 – 65 | 0,5 |
| 65 – 75 | |
| 75 – 85 | |

**Α.** Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

*(Μονάδες 8)*

**Β.** Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

*(Μονάδες 9)*

**Γ.** Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

**α.** Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

*(Μονάδες 4)*

**β.** Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

*(Μονάδες 4)*

**ΘΕΜΑ 4ο:**

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

**Α.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

*(Μονάδες 6)*

**Β.** Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

*(Μονάδες 6)*

**Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000 , πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;

*(Μονάδες 6)*

**Δ.** Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής CV.

*(Μονάδες 7)*

# ΘΕΜΑΤΑ 2000

## ΘΕΜΑ 1ο:

**Α. α)** Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

$$F'(x) = f'(x) + g'(x).$$

*(Μονάδες 8)*

**β)** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$ , $f(x)g(x)$ , $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$ ,

όπου $c$ πραγματική σταθερά.

*(Μονάδες 4,5)*

**Β. α)** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

| Στήλη Α<br>Συνάρτηση | Στήλη Β<br>Πρώτη παράγωγος |
|---|---|
| **α.** $x^2 + 3$ | **1.** $1 - ημx$ |
| **β.** $x + συνx$ | **2.** $3x^2 - 8x$ |
| **γ.** $xημx$ | **3.** $2x + 3$ |
| **δ.** $x^3 - 4x^2$ | **4.** $ημx - xσυνx$ |
| | **5.** $2x$ |
| | **6.** $3x^2 - 4x$ |
| | **7.** $ημx + xσυνx$ |

*(Μονάδες 8)*

**β)** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{είναι:}$$

**Α.** $e^x$ **Β.** $\dfrac{e^x - xe^x}{x^2}$ **Γ.** $\dfrac{e^x x + e^x}{x^2}$

**Δ.** $\dfrac{e^x x - e^x}{x^2}$ **Ε.** $\dfrac{xe^x - e^x}{x}$

*(Μονάδες 4,5)*

## ΘΕΜΑ 2ο:

**Α.** *Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής Χ σωστά συμπληρωμένο.*

| Τιμές μεταβλητής $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ | $x_i v_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 v_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | | | | 10 | 1 | 10 |
| 2 | | | | 35 | | 4 | |
| 3 | | | | | | 9 | |
| Σύνολο | ν=50 | 1 | 100 | | | | |

*(Μονάδες 16)*

**Β.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

*(Μονάδες 4)*

**Γ.** Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 0{,}49$.

Δίνεται ότι: $s^2 = \dfrac{1}{v}\left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{v} \right\}$

*(Μονάδες 5)*

## ΘΕΜΑ 3ο:

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

**Α.** να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

*(Μονάδες 8)*

**Β.** να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

*(Μονάδες 8)*

**Γ.** να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

*(Μονάδες 9)*

## ΘΕΜΑ 4ο:

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από το παρακάτω πίνακα:

| Χρόνια υπηρεσίας [ – ) | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ |
|---|---|
| 0 – 5 | 10 |
| 5 – 10 | 15 |
| 10 – 15 | 12 |
| 15 – 20 | 15 |
| 20 – 25 | 18 |
| 25 – 30 | 18 |
| 30 – 35 | 12 |

**Α.** Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

*(Μονάδες 5)*

**Β.** Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

**α)** πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

*(Μονάδες 10)*

**β)** πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

*(Μονάδες 10)*