ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

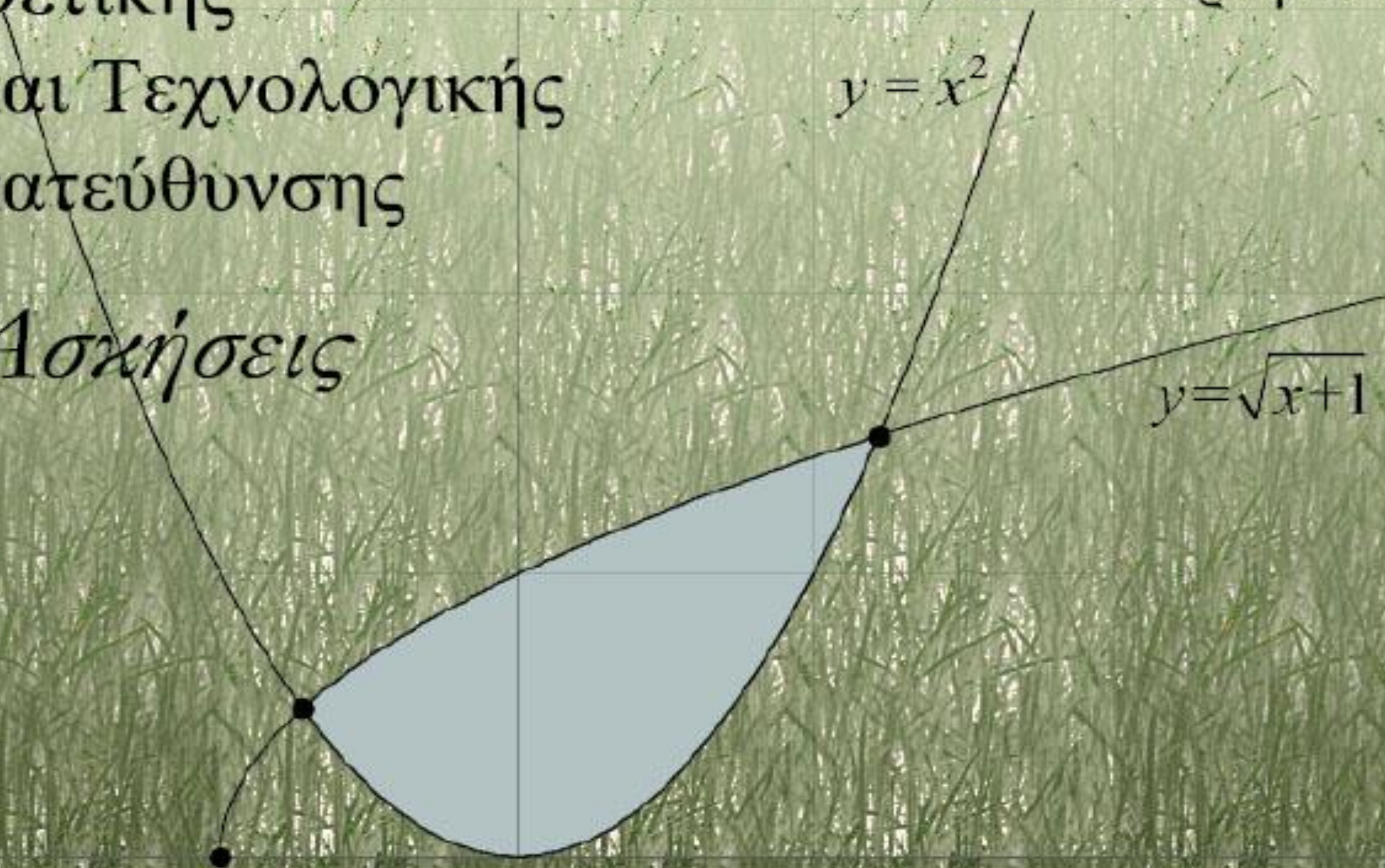
Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Θετικής
και Τεχνολογικής
κατεύθυνσης

Ασκήσεις



Σχολικό Έτος 2012-2013

Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ταξη Γ, Μαθηματικα Θετικης και Τεχνολογικης Κατευθυνσης, Ασκησεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

26 Σεπτεμβρίου 2011
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί Αριθμοί

1.1 Ισότητα,πράξεις μιγαδικών αριθμών

1.1.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

1. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

1. $2 + 3i = 2 + (\lambda + 1)\, i$
2. $\lambda + 1 + 5i = 2 + \left(\lambda^2 - 3\lambda + 7\right) i$
3. $\lambda\,(1 + i) = 2 + 2i$

2. Να γίνουν οι πράξεις:

1. $(2 + 3i) + (6 + 11i)$
2. $(4 + 5i) + (6 - 2i)$
3. $(3 - 9i) - (6 - 8i)$
4. $(23 - i)\,(1 + i)$
5. $(12 - i)\,(3 + 4i)$
6. $(1 + i)\,(2 + i)$
7. $(4 + 6i)\,(7 - 3i)$
8. $(1 - i)\,(2 - i)\,(3 - i)$

3. Να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί:

1. $\frac{1+i}{2-i}$
2. $\frac{1-2i}{2+3i}$
3. $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$
4. $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$
5. $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}$
6. $\frac{1}{2+3i} + \left(\frac{2}{4+i}\right)^2$

4. Έστω $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$. Να υπολογίσετε τα:

1. $z_1^2 + z_2^2$
2. $z_1\,(z_2 - \bar{z}_1)$
3. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z_1+i} - \bar{z}_2\right)}$
5. $\frac{z_1}{z_2+\frac{\bar{z}_1}{z_2}}$
6. $\frac{z_1+\bar{z}_2}{\bar{z}_1 z_2} + \frac{\bar{z}_1+z_2}{z_1\bar{z}_2}$

5. Να επαληθεύσετε την ισότητα: $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

6. Αν $z_1 = 2 + 3i$ και $z_2 = 1 - i$ να υπολογισθεί ό $\overline{\frac{\bar{z}_1((z_1+z_2))}{z_2}}$

7. Δείξτε ότι $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i) = x^4 + 4$

8. Δείξτε ότι:

$\left(t-1-i\sqrt{2}\right)\left(t-1+i\sqrt{2}\right)\left(t-2+i\sqrt{3}\right)\left(t-2-i\sqrt{3}\right) = t^4-6t^3+18t^2-26t+21$

9. Για ποιές τιμές των πραγματικών αριθμών x, y είναι οι μιγαδικοί

$$z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5, \;\; z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$$

είναι συζυγείς;

10. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z είναι αντιστοίχως x και y. Ποιό είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\bar{z} - 7$;

11. Αν $z^6 = -117 + 44i$ και $z^7 = -278 - 29i$ ποιός είναι ο z;

12. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ το μιγαδικό:

$$\frac{(1+i)^{80} - (1+i)^{82}}{i^{96}}$$

13. Με $z = 3 - 4i$ να υπολογίσετε την παράσταση $z^2 + \bar{z} + (z - \bar{z})^2$

14. Αν $z = 2 + 5i$ να υπολογισθεί η παράσταση $\mathrm{Re}\,(z+1) + \mathrm{Im}\,(iz)$.

15. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $(2+i)^3 = \lambda + (5\lambda + 1)\,i$;

16. Από τις εξετάσεις του 1954. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Υπολογίσατε την παράστασιν $\left(2+i\sqrt{2}\right)^3 + \left(2-i\sqrt{2}\right)^3$.

17. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 αν είναι γνωστό ότι $z_1 + 3z_2 = 8$ και $4z_1 - 3iz_2 = 17 + 9i$.

18. Να παραγοντοποιήσετε στο $\mathbb{C}$ τις παραστάσεις:

1. $x^2 + y^2$
2. $4x^2 + y^2$

19. Πότε ισχύει $\overline{z_1 + z_2 i} = z_1 - z_2 i$;

20. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z, w αν είναι γνωστό ότι $z + w = 7 + 2i$ και $z = \overline{w} + 2i - 3$

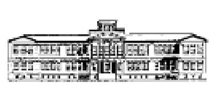
21. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμού x, y αν είναι γνωστό ότι:

$$\frac{x-i}{3+i} + \frac{y-i}{3-i} = i$$

22. Να βρεθούν οι πραγματικοί κ, λ έτσι ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί $2\kappa + 3\lambda + 3i$ και $1 + (\kappa - 11\lambda)\,i$ να είναι ίσοι.

23. Να βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι $z + 3\bar{z} = 5 + 7i$.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:



1. $x^2 - 4x + 13 = 0$
2. $2x^2 - 2x + 5 = 0$
3. $3t^2 - 2t + 2 = 0$
4. $x^2 - 2\,(\sigma\upsilon\nu\theta)\,x + 1 = 0$

25. Αν $z = a + bi$ και $z^2 + z = -3 + 15i$ να βρεθούν τα a, b.

26. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ είναι πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι οι

$$z = \alpha\,(\beta + \gamma i)^2 + \delta\,(\varepsilon + \zeta i) + \eta,\ w = \alpha\,(\beta - \gamma i)^2 + \delta\,(\varepsilon - \zeta i) + \eta$$

είναι συζυγείς.

27. Έστω $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και κ, λ πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\kappa z + \lambda z^2\right)\left(\kappa z^2 + \lambda z\right)$ είναι μη αρνητικός πραγματικός.

28. Για τον μιγαδικό αριθμό z είναι γνωστό ότι $z^2 = z - 5$. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $z^3 = -4z - 5$
2. $z^4 = -9z + 20$
3. $z^5 = 11z + 45$

29. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(z)) + \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z)) + \mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) + \mathrm{Im}(\mathrm{Im}(z))$$

Girolamo Cardano
1501-1576

30. Με $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ να υπολογίσετε τα z^2, z^3, z^6

31. Να βρεθεί ο x όταν $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+3i} + \frac{1}{x-3i}$

32. Ο Girolamo Cardano, ένας από τους πρωτεργάτες της Άλγεβρας στο έργο του Ars Magna (Μεγάλη Τέχνη) που εξεδόθη το 1545, γράφει:

> Αν κάποιος σας πει να διαιρέσετε το 10 σε δύο μέρη, που αν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους θα δώσουν 30 ή 40, είναι φανερό ότι πρόκειται για ένα αδύνατο πρόβλημα.

1. Να εξηγήσετε γιατί ο Cardano ονομάζει το πρόβλημα αδύνατο.
2. Ποια τιμή, αντί του 30 ή του 40, θα μπορούσε να κάνει το πρόβλημα «δυνατό»;

33. Έστω ότι οι α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha + \beta i = \frac{z-2}{z+2}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{z\bar{z}-4}{z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4}$ και $\beta = \frac{2i(\bar{z}-z)}{z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4}$.

34. Να αποδείξετε ότι $\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = 1 - \bar{z}$

35. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+3}$.

36. Μπορεί άραγε να ισχύει $z\bar{z} = 2$; $\frac{z}{\bar{z}} = 2$;

1.1.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

37. Δείξτε ότι αν $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ με $a, b \neq 0$ και ισχύει

$$(a+bi)(x+yi) = \left(a^2+b^2\right)i$$

τότε $x = b$ και $y = a$.

38. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = \left(x^2 - y^2 + x\right) + (2xy + y)\,i$. Να εκφράσετε τον w συναρτήσει του z.

39. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{1-i^{\nu}}{1-i}$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν.

40. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον αριθμό $z = \frac{p+qi}{p-qi} + \frac{p-qi}{p+qi}$ όπου $p, q \in \mathbb{R}$.

41. Έστω $z = x + yi$. Να βρεθεί ο z αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $w = (z-2)(\bar{z}+i)$ είναι πραγματικός.

42. Έστω ω ένας μη πραγματικός μιγαδικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή:

$$z = \alpha + \beta\omega, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

43. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\kappa+i} + \frac{1}{\lambda+2i} = \frac{19}{26} - \frac{17}{26}i$$

44. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + i$ και $z = 2 - i$. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ έτσι ώστε $z = \kappa z_1 + \lambda z_2$.

45. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τότε

$$\mathrm{Re}\left((\alpha+\beta+\gamma i)(\beta+\gamma+\alpha i)(\gamma+\alpha+\beta i)\right) = 2\alpha\beta\gamma$$

46. Να αποδείξετε ότι αν $z^3 = 1$ και $z \notin \mathbb{R}$ τότε

$$\left(1 - z + z^2\right)^5 + \left(1 + z - z^2\right)^5 = 32$$

47. Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ πολλαπλασιαζόμενος επί τον αριθμό $2 + 3i$ έχει γινόμενο φανταστικό αριθμό. Ποια σχέση συνδέει τα x, y;

48. Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{z-1}$, $z \neq 1$.
Αν είναι $f(i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ και $f(1+i) = 2 - 5i$ βρείτε το $f(2+i)$.

49. Να λύσετε την εξίσωση $(1-i)^{18}\,x = (1+i)^{31}$.

50. Έστω $z = \frac{2+i}{1-i}$. Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z + \frac{1}{z}$.

51. Να βρείτε τον w αν $\left(3w^2+w+1\right)^2+\left(w^2+2w+2\right)^2=0$.

52. Έστω u ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Πως πρέπει να επιλέξουμε το μιγαδικό αριθμό z ώστε ο αριθμός $(z-u)(z-\overline{u})$ να είναι πραγματικός;

53. Για το μιγαδικό αριθμό z είναι γνωστό ότι $\mathrm{Re}(z)=2$ και $\mathrm{Im}(z)=-1$. Να βρείτε τα $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$ και $\mathrm{Im}\left(z^2\right)$.

54. Έστω η εξίσωση $x^2-2mx+m=0$ με ρίζες $x_1\neq x_2$. Να βρείτε τις x_1, x_2 αν είναι γνωστό ότι $x_1^3+x_2^3=x_1^2+x_2^2$.

55. Βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι $z^2=-5+12i$.

56. Να αποδείξετε ότι αν ο θετικός ακέραιος ν δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε $\left(1+i^{2\nu}\right)\left(1+i^{\nu}\right)=0$.

57. Από τις εξετάσεις του 1980. Να βρείτε το άθροισμα των ν-όρων:

$$\Sigma=i+(2+3i)+(4+5i)+\ldots+[(2\nu-2)+(2\nu-1)\,i]$$

58. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $\left(z-\frac{1}{\bar{z}}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{z}\right)$ είναι πραγματικός.

59. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέσμη Ι. Έστω ω με $\omega^3=1$, όπου $\omega\in\mathbb{C}$ και $\omega\neq 1$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$y=(1-\omega)\left(1-\omega^2\right)\left(1-\omega^4\right)\left(1-\omega^5\right)$$

60. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1+\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta-i\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$$

61. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών είναι αριθμοί πραγματικοί. Είναι άραγε οι δύο μιγαδικοί συζυγείς;

62. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z\bar{z}+\beta(z-\bar{z})=\gamma+\delta i$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ μη μηδενικοί πραγματικοί.

63. Έστω ότι $z+\frac{1}{z}=1$. Ποιές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $A_\nu=z^\nu+\frac{1}{z^\nu}$;

64. Ο Bombelli σε κάποιο πρόβλημα χρειάσθηκε να βρεί μιγαδικούς αριθμούς $\alpha+\beta i$ ώστε

$$(\alpha+\beta i)^3=2+11i$$

1. Να επαληθεύσετε ότι ο μιγαδικός $2+i$ είναι λύση του προβλήματος.

2. Να βρείτε τους άλλους μιγαδικούς αριθμούς που είναι επίσης λύσεις του προβλήματος.

Rafael Bombelli
1526-1572

65. Να αποδείξετε ότι αν για τους θετικούς ακέραιους $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ ισχύει $i^{\kappa} + i^{\lambda} + i^{\mu} + i^{\nu} = 0$ τότε θα ισχύει $i^{\kappa+4\lambda} + i^{\lambda+4\mu} + i^{\mu+4\nu} + i^{\nu+4\kappa} = 0$.

66. Έστω $w_1 = p^3 - 3p^2 i$, $w_2 = pq^2 - i$, $w_3 = p^2 + pqi$ όπου οι p, q είναι διάφοροι μη μηδενικοί πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $\frac{w_1 + iw_2}{w_3}$ είναι φανταστικός τότε ισχύει $p + q = -1$.

67. Έστω $F(z) = (1+z)^4 + \frac{1}{1+z^2}$. Αν $F(1+i) = -\frac{34}{5} + \frac{118}{5} i$ ποιο είναι το $F(1-i)$;

68. Αν $z + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ να βρείτε το $z^2 + \frac{1}{z^2}$

69. Για ποιές τιμές των πραγματικών αριθμών x, y ο αριθμός $(x+yi)^3$ είναι πραγματικός και μεγαλύτερος του 8;

70. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{xi - y}{x + yi}\right)^{4n} - \left(\frac{x + yi}{xi - y}\right)^{4n+1} = 1 + i$$

71. Έστω ότι $(X + Yi)^3 = x + yi$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 4\left(X^2 - Y^2\right)$$

72. Έστω α, β, γ τρεις ανα δύο διάφοροι μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν οι α, β, γ ικανοποιούν κάποια από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιοούν και τις υπόλοιπες:

1. $\frac{1}{\beta - \gamma} + \frac{1}{\gamma - \alpha} + \frac{1}{\alpha - \beta} = 0$
2. $(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) + (\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma) = 0$
3. $(\beta - \gamma)^2 = (\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$
4. $(\gamma - \alpha)^2 = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$
5. $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$
6. $(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0$
7. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

73. Έστω ότι $\zeta^5 = 1$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\zeta}{1+\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{1+\zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1+\zeta} + \frac{\zeta^4}{1+\zeta^3} = 2$$

1.1.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

74. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τριάδα θετικών ακεραίων κ, λ, μ είναι $i^{\kappa} + i^{\lambda} + i^{\mu} \neq 0$.

75. Ο αριθμός $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ είναι πραγματικός ($n \in \mathbb{N}$). Πότε είναι αρνητικός;

76. Να αποδείξετε ότι αν $w^3 = 1$, $w \neq 1$ και ο n είναι θετικός άρτιος τότε

$$\left(1 - w + w^2\right)\left(1 - w^2 + w^4\right)\left(1 - w^4 + w^8\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - w^{2^{n-1}} + w^{2^n}\right) = 2^n$$

77. Έστω z_1, z_2, z_3 τρεις ανά δύο διάφοροι μιγαδικοί αριθμοί ώστε $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \notin \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως $z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3$ όπου α, β, γ πραγματικοί με άθροισμα 1.

1.2 Μέτρο μιγαδικων αριθμών

1.2.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

78. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z όταν:

1. $z = 1 + i$ 2. $z = 4 + 3i$ 3. $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

79. Αν $|z| = 2$ ποιο είναι το μέτρο του $\bar{z}$; Του z^2; Του $\frac{1}{z^3}$;

80. Αν ο μιγαδικός αριθμός $x+yi$ έχει μέτρο 3 ποιό είναι το μέτρο του $2y+2xi$;

81. Από τις εξετάσεις του 2001. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

82. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

83. Για ποια τιμή του λ είναι $|z| = 3$ όταν:

1. $z = 1 + \lambda i$ 2. $z = \lambda + 3(\lambda + 1)i$

84. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών:
$z_1 = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi$, $z_2 = -\eta\mu\varphi + i\sigma\upsilon\nu\varphi$, $z_3 = \frac{2t}{1+t^2} + i\frac{1-t^2}{1+t^2}$

85. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$z_1 = (1+i)(2+i)(3+i), \quad z_2 = \frac{1+i}{(2+i)(3+i)}$$

86. Αν $|z_1| = \sqrt{2}$ και $|z_2| = 3$ ποιο είναι το μέτρο του $\frac{z_1^3 z_2}{\bar{z}_1^4}$;

87. Έστω $z = 2 - 4i$. Να υπολογίσετε τα

1. $|z+2+i|$
2. $|2z-i|$
3. $|z|^2 - z^2$
4. $\frac{1}{|z+i|}$

88. Για ποιους μιγαδικούς αριθμούς ισχύει $|z|^2 = z^2$;

89. Να αποδείξετε ότι αν $|z_1| > 1,\ \ |z_2| < 2$ τότε $|2z_1 + \bar{z}_2| > |2 + z_1 z_2|$.

90. Για τον z είναι γνωστό ότι έχει μέτρο 1 και δεν είναι πραγματικός. Να αποδείξετε ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = \frac{\alpha+i}{\alpha-i}, \alpha \in \mathbb{R}$.

91. Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right| \leq 2\left(|z_1| + |z_2|\right)$.

92. Να λύσετε τη εξίσωση $4z^2 + 8\left|z\right|^2 = 3$.

93. Να βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ και $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

94. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $z^3 = |z|$.

95. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|z+\alpha i| = |z+\beta i|$ και οι $\alpha,\ \beta$ είναι διάφοροι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει $z - \bar{z} = -\left(\alpha + \ \beta\right) i$.

96. Να αποδείξετε ότι $|1 - \bar{z}_1 z_2| \geq 1 - |z_1|\,|z_2|$

97. Αν $|z| = 1$ να βρείτε το μέτρο του $\frac{z^2(z-i)}{1+zi}$.

98. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left|(1+i)^{34}\right| - \sqrt{2}\,|1-i|^{33}$.

99. Να βρείτε το μέτρο του $z = \left(\kappa^2 - \lambda^2\right) + 2\kappa\lambda i,\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

100. Να λύσετε την εξίσωση $z + |z| = 17 + 7i$.

101. Αν $|z| = 2,\ |w| = 3$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = z\left(\bar{z} + w\right) - w\left(z - \bar{w}\right)$$

102. Αν είναι $w - \frac{16}{\bar{w}} = 0$ ποιό είναι το μέτρο του w;

103. Δείξτε ότι $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$ και $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$

104. Βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι $|z| = 1$ και $|z+1| = 1$.

105. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ ισχύει $3x = 4y > 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| = \frac{5}{4}x$.

106. Για κάθε μιγαδικό z και κάθε θετικό πραγματικό r ισχύει $|rz| = r|z|$. Γιατί;

107. Για τους z_1, z_2 είναι γνωστό ότι $|z_1| \leq 2$ και $|z_2| \leq 3$. Να αποδείξετε ότι:

1. $|z_1 + 3z_2| \leq 11$
2. $|5z_1 - 6z_2| \leq 28$
3. $|3z_1 - 5z_2| \leq 21$
4. $\left|z_1^2 - z_2^2\right| \leq 13$

108. Έστω ότι $|u+v| = |u| = |v|$. Δείξτε ότι ή $\frac{u}{v} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είτε $\frac{u}{v} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Δείτε και την άσκηση 104

109. Το μέτρο του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών είναι 3 και το μέτρο του πηλίκου τους είναι 4. Ποια είναι τα μέτρα τους;

1.2.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

110. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει
$|z_1| = 5$, $|z_2| = 13$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{82}$.
Να βρείτε το μέτρο του αθροίσματος τους.

111. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί και $\frac{1}{z-\gamma i} = \frac{1}{\alpha+\beta i} - \frac{1}{\alpha+\gamma i}$ να βρείτε το $|z|^2$.

112. Να αποδείξετε ότι αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+1| = |z|+1$ τότε ο z είναι μη αρνητικός πραγματικός.

113. Να αποδείξετε ότι αν $x + yi = \frac{a+bi}{c+di}$ τότε $x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

114. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z|^2 + z = 0$.

115. Από τις εξετάσεις του 1980. Αν $|z+16| = 4\,|z+1|$, να δείξετε ότι $|z| = 4$.

116. Να αποδείξετε ότι αν u, v είναι μη μηδενικοί μηγαδικοί με $u + v \neq 0$ τότε ισχύει $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{u}{v}$ είναι φανταστικός.

117. Εστω ότι για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει

- $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και
- $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

Να αποδείξετε ότι οι $\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$.

118. Από τις εξετάσεις του 1979. Αν $z \neq -1 + 0i$ και $z \neq 1 + 0i$ δείξτε ότι:

1. Όταν $|z| = 1$, τότε ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός. [1]

2. Οταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός τότε $|z| = 1$.

119. Από τις εξετάσεις του 1991, Δέσμη Ι. Αν $\omega = \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι:

1. Ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός[2].

2. Ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

120. Αν $\left|\frac{z-9}{z-1}\right| = 3$ να βρείτε το $|z|$.

121. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$ τότε ισχύει και

$$\left|z - \left(\frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2\right)\right| = \left|z - \left(\frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2\right)\right|$$

122. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z αν είναι γνωστό ότι $|z + 3i| = |z + 5 - 2i|$ και $|z - 4i| = |z + 2i|$.

123. Να αποδείξετε ότι αν $(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) \cdot \ldots \cdot (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = A + Bi$ τότε $\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)\left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2\right) = A^2 + B^2$

124. Από τις εξετάσεις του 1982. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1 + iz)^\nu = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$ δεν έχει πραγματική λύση.

125. Για ποιους z ισχύει $|z - i| + |z + 3| = 1$;

126. Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 = z - 1$. Δείξτε ότι

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$$

127. Για ποιους z ισχύει $|z - 1| = |z - 3| = |z - i|$;

128. Να αποδείξετε ότι αν $\left|\frac{z_1+z_2}{1+\bar{z}_1 z_2}\right| = 1$ τότε ένας τουλάχιστον από τους z_1, z_2 έχει μέτρο 1.

129. Έστω η εξίσωση $z^2 + az + b = 0$ όπου a, b πραγματικοί με $a^2 - 4b < 0$. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης έχουν μέτρο μικρότερο του 1 αν και μόνο αν $b < 1$.

130. Έστω ότι $|2z + 1| = |2z + 3|$. Βρείτε το $\mathrm{Re}\,(z + 3)$.

[1] Εννοεί: φανταστικός
[2] Είναι η άσκηση Β4 σελίδα 102 του σχολικού βιβλίου

131. Για το μιγαδικό αριθμό u είναι γνωστό ότι $\left|u - \frac{2}{iu}\right| < \left|\frac{u}{i}\right|$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $1 + \mathrm{Im}\left(u^2\right)$ είναι αρνητικός πραγματικός.

132. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z-|z|}{z+|z|}$ είναι φανταστικός.

133. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει μιγαδικός z έτσι ώστε $|z+1-i| = \sqrt{2}$ και $|z| = 3$.

134. Έστω $p, q \in \mathbb{R}$ και $z_1 = \frac{1+pi}{1-pi}$, $z_2 = \frac{1+qi}{1-qi}$. Να αποδείξετε ότι αν $d = |z_1 - z_2|$ τότε $\frac{d}{\sqrt{4-d^2}} = \left|\frac{p-q}{1+pq}\right|$.

135. Έστω ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2|$. Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}\,|z_1|$.

136. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|z-10| = 3\,|z-2|$ τότε ισχύει $|z-1| = 3$.

137. Να αποδείξετε ότι

1. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z_1 \bar{z}_2\right)$
2. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z_1 \bar{z}_2\right)$

138. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 έχουν μέτρο 1 και γινόμενο διάφορο του -1 τότε ο μιγαδικός

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{1 + z_1 z_2 z_3}$$

είναι πραγματικός.

139. Να αποδείξετε ότι

$$|z + |z|| + |z - |z|| = 2\,|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

140. Να αποδείξετε ότι $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$.

141. Να αποδείξετε ότι αν $|z| \leq 1$ τότε $1 \leq |z-4| \leq 7$.

142. Η ταυτότητα του Lagrange. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) = |z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 + |z_1 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_1|^2$$

143. Από τις εξετάσεις του 1979 (Ακυρώθηκαν).

1. Να δείξετε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν τετράγωνο μιγαδικού αριθμού. [3]

[3] Δείτε πρώτα την άσκηση 55. Το ερώτημα αυτό ήταν, τότε, ερώτημα θεωρίας. Για να το απαντήσετε θεωρείστε μιγαδικό αριθμό $\alpha + \beta i$ και δείξτε ότι υπάρχει πάντα μιγαδικός $x + yi$ έτσι ώστε $(x+yi)^2 = \alpha + \beta i$. Στην ουσία πρέπει να δείξετε ότι το σύστημα $x^2 - y^2 = \alpha$, $2xy = \beta$ έχει λύση.

2. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι [4]

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τότε σύμφωνα με την ερώτηση (α′) υπάρχει ένα $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε: $\alpha\beta = z^2$. Να δείξετε την ισότητα:

$$|\alpha| + |\beta| = \left|\frac{\alpha+\beta}{2} + z\right| + \left|\frac{\alpha+\beta}{2} - z\right|$$

Joseph Louis Lagrange
1736-1813

144. Από τις εξετάσεις του 1979. Αν

$$\Pi(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|\,x + \left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)$$

όπου z_1, z_2 δοθέντες μιγαδικοί αριθμοί να δείξετε ότι $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε ισχύει το ίσον;

145. Από τις εξετάσεις του 2007. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}, \quad \text{με} \quad \alpha \in R$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκεο στον κύκλο με κέντρο το Ο$(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

2. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

(α′) Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμων z_1 και z_2.

(β′) Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

[4] Είναι η άσκηση Α9 σελίδα 101 του σχολικού βιβλίου.

1.2.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

146. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{|z_1+z_2|}{1+|z_1+z_2|} \leq \frac{|z_1|}{1+|z_1|} + \frac{|z_2|}{1+|z_2|}$$

Κατόπιν να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1+z_2+...+z_\nu|}{1+|z_1+z_2+...+z_\nu|} \leq \frac{|z_1|}{1+|z_1|} + \frac{|z_2|}{1+|z_2|} + ... + \frac{|z_\nu|}{1+|z_\nu|}$$

147. Απο το διαγωνισμό Putnam, 1989. Να αποδειχθεί ότι αν

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$$

τότε $|z| = 1$

148. Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \alpha$. Να βρείτε πως πρέπει να επιλεγεί ο $\alpha > 0$ ώστε η ελάχιστη τιμή των μέτρων των στοιχείων του $\mathcal{S}$ να είναι $\frac{1}{2}$.

149. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών α, β και για κάθε θετικό ακέραιο r ισχύει:

$$|\alpha + \beta|^r \leq 2^{r-1}\left(|\alpha|^r + |\beta|^r\right)$$

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει ότι

$$|z_1 + z_2 + ... + z_\nu| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_\nu|$$

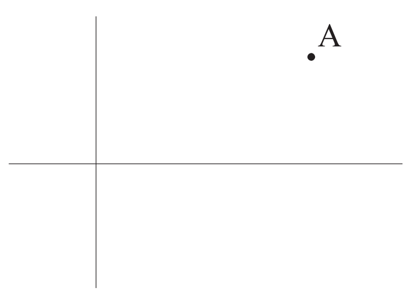
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\lambda_2, ..., \lambda_\nu$ έτσι ώστε

$$z_2 = \lambda_2 z_1, ..., \; z_\nu = \lambda_\nu z_1$$

1.3 Το Μιγαδικό Επίπεδο

1.3.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

150. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο A είναι η εικόνα του z. Να σχεδιάσετε την εικόνα του $\frac{1}{2}\bar{z}$.



151. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $x+yi, 0, \frac{1}{-x+yi}$ είναι σημεία συνευθειακά.

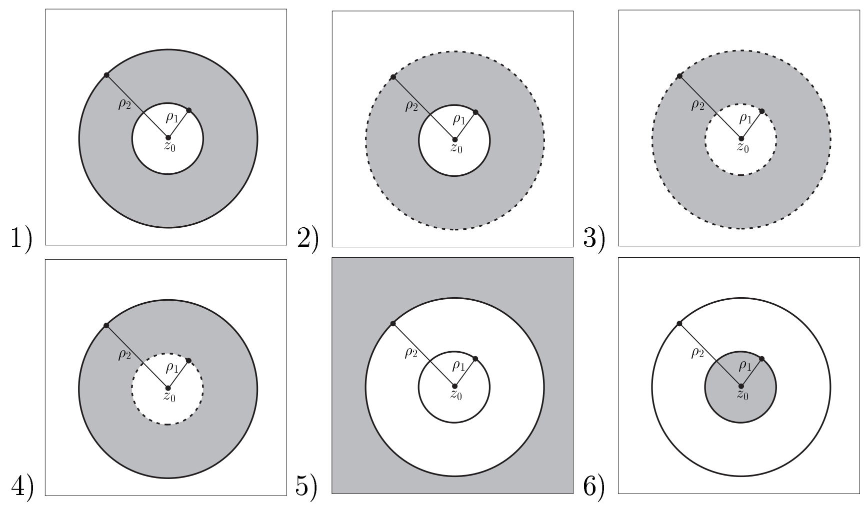
152. Να σχεδιάσετε το χωρίο του επιπέδου στο οποίο ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους κατά περίπτωση ισχύει:

1. $\operatorname{Im}(z) > \operatorname{Re}(z)$
2. $\operatorname{Im}(z) > \operatorname{Im}(z^2)$

153. Να πολλαπλασιάσετε τον $3+i$ με το i. Μετά το αποτέλεσμα που θα βρείτε να το πολλαπλασιάσετε ξανά με i. Να επαναλάβετε άλλη μία φορά. Να κάνετε ένα σχήμα.

154. Η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $2x-3y=1$. Να εκφράσετε τον $\bar{z}$ συναρτήσει του z.

155. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα εμφανίζονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνες $\rho_1 < \rho_2$. Να περιγράψετε σε κάθε περίπτωση το γραμμοσκιασμένο χωρίο.



156. Δείξτε ότι με $z \neq 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$z^5 = \bar{z}^6 \Leftrightarrow z^{11} = 1$$

157. Οι εικόνες των z_1, z_2 απέχουν απόσταση d. Να αποδείξετε ότι

$$d^2 = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$$

158. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο του οποίου οι κορυφές είναι οι εικόνες των

$$z_1 = 1+2i, \;\; z_2 = 4-2i, \;\; z_3 = 1-6i$$

είναι ισοσκελές.

Υποδειξη: Είναι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = 5$

159. Σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο του K και την ακτίνα του ρ.

1. $|z-2|=4$
2. $|z-2i|=2$
3. $|z-2-3i|=1$
4. $|z+2+3i|=1$
5. $|z+2-3i|=1$
6. $|2z-2+4i|=1$

160. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$2+i,\ \ 3+2i,\ \ 2+3i,\ \ 1+2i$$

είναι κορυφές τετραγώνου.

161. Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ τότε η εικόνα του $\bar{z}$ ανήκει σε ένα κύκλο. Σε ποιόν;

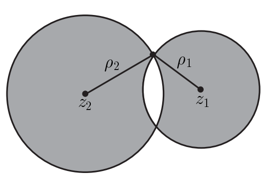
162. Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $-x+y=1$ τότε ισχύει $|z|=|z+1-i|$.

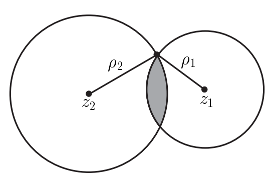
163. Για ποιες τιμές του x η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+(x-1)\,i$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $A(2,3)$ και ακτίνα 4;

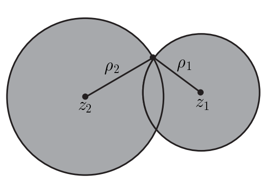
164. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, -z, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{z}}, 0$ είναι σημαία συνευθειακά.

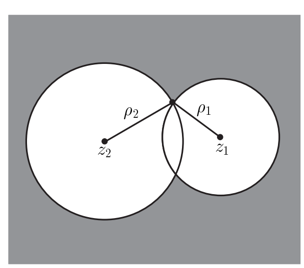
165. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι. Εστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

166. Σε κάθε ένα από τα επόμενα σχήματα απεικονίζονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τις εικόνες των z_1, z_2 και ακτίνες $\rho_1 \le \rho_2$. Να περιγράψετε σε κάθε περίπτωση το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

1)


2)


3)


4)


167. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $4\,(z-\bar{z})^2=9z\bar{z}-225$.

168. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{2}{w}\right|=1$;

169. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1=2+i$ και $z_2=3+4i$. Ποιό είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των $z_1,\ z_2,\ z_1+z_2$;

170. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z για τους οποίους ισχύει $|z-2+3i|=5\,|z+i|$.

171. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=1$;

172. Από τις εξετάσεις του 1986, Δέσμη Ι. Έστω ότι

$$z=(2x-3)+(2y-1)i$$

με $x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε

$$|2z-1+3i|=3$$

είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

173. Έστω z_1,z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί και $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ τα αντίστοιχα διανύσματα. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{u}_1\perp\vec{u}_2\Leftrightarrow\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2=0$$

Κατόπιν να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις εικόνες των u,v είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις εικόνες των w,z αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{u-v}{w-z}$ είναι φανταστικός

174. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=1+i$. Να βρείτε το μήκος της τεθλασμένης γραμμης ΑΒΓΔ όπου τα Α, Β, Γ, Δ είναι οι εικόνες των z, z^2, z^3, z^4.

175. Να βρείτε τον γεωμετρικό τότπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)=0$$

1.3.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

176. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $3+i$ και $4+2i$ είναι διαδοχικές κορυφές ενός τετραγώνου. Τίνων μιγαδικών μπορεί να είναι εικόνες οι άλλες δύο κορυφές του τετραγώνου;

177. Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, και $w\in\mathbb{C}^*$ σταθεροί να αποδείξετε ότι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την σχέση $\mathrm{Re}(wz)=\alpha$ ανήκουν σε μία ευθεία.

178. Να αποδείξετε ότι αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z_1,z_2 είναι κορυφές τριγώνου τότε και οι εικόνες των μιγαδικών 0, 1, $\frac{z_1}{z_2}$ είναι κορυφές τριγώνου όμοιου προς το αρχικό.

179. Έστω ότι ή εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στην καμπύλη Γ. Έστω a ένας μη μηδενικός μιγαδικός και S, M οι εικόνες των $u = a + z$ και $w = az$ αντιστοίχως. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

η Γ είναι	Το S ανήκει:	Το M ανήκει:
Η ευθεία $\lvert z - z_1\rvert = \lvert z - z_2\rvert$	1	2
Ο κύκλος $\lvert z - z_0\rvert = \rho$	3	4

180. Έστω z_1, z_2,z_3 τρεις ανά δύο διάφοροι μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$$

181. Να αποδείξετε ότι:

1. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που εκφράζουν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ίσο με $\frac{1}{2}\left(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2\right)$

2. Τα εμβαδόν του τριγώνου που έχει ως κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 είναι ίσο με

$$\frac{1}{4}\left|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_2 z_3 - \bar{z}_3 z_1\right|$$

182. Έστω z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί και $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ τα αντίστοιχα διανύσματα. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = 0$$

Κατόπιν να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις εικόνες των u, v είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τις εικόνες των w, z αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{u-v}{w-z}$ είναι φανταστικός

183. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι τα σημεία A και B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O και ισοσκελές αν και μόνο αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$.

184. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 2\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$.

185. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $2z\bar{z} = z^2 + \bar{z}^2 + 8z + 8\bar{z}$.

186. Για το μιγαδικό αριθμό z είναι γνωστό ότι $\left|1 + z^2\right|^2 + \left|1 - z^2\right|^2 = c$ όπου $c > 1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

187. Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ του οποίου η εικόνα ανηκει στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ αντιστοιχούμε τον μιγαδικό $w = \frac{1}{z}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w.

188. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $w = iz + 3$ όταν, κατά περίπτωση, ισχύει:

1. Η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία $x + y = 1$.
2. $z\bar{z} = 1$
3. $|z - 2 + 3i| = 1$
4. $\mathrm{Re}(z) = -1$
5. $\mathrm{Im}(z) = 3$

189. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $w = \frac{z+i}{z+1}$ όταν, κατά περίπτωση, ισχύει:

1. $(2i + 3)\, z + (2i - 3)\, \bar{z} = 2i$
2. $|z + 3 + i| = 2$

190. Έστω ότι $w = \left(\frac{3}{2} + 2i\right) z - \frac{5}{2}\bar{z}i$.

1. Αν $z = \alpha + \beta i$ να βρείτε τα $\mathrm{Re}\,(w)$, $\mathrm{Im}\,(w)$.
2. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των αριθμών w ανήκουν στην ευθεία $x + 3y = 0$.

191. Να λύσετε την άσκηση 141 χρησιμοποιώντας γεωμετρικά επιχειρήματα.

192. Οι αριθμοί z_1, z_2 έχουν την ιδιότητα $|z_1 + \bar{z}_2| \leq |\bar{z}_1 - z_2|$. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του γινομένου τους;

193. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη I. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\,(z) = \frac{(z-1)\,(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$$

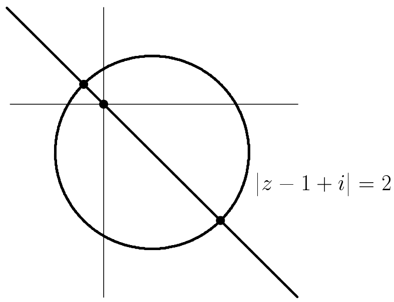
$z \in \mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}\,(z) \neq 0$.

1. Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f\,(z)$
2. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M\,(x, y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha x + \beta y i$ με α, β, x, y $\in \mathbb{R}$ και $\alpha\beta x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\mathrm{Re}\,[f\,(z)] = 0$

194. Βρείτε ποιός από τους μιγαδικούς που ικανοποιούν την σχέση

$$|z-1+i|=2$$

έχει το μέγιστο και ποιός το ελάχιστο μέτρο;



195. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη Ι. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετες ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μία υπερβολή.

196. Έστω P, Q οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι αν το τρίγωνο OPQ είναι ισόπλευρο τότε θα ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$.

197. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 > \beta$ τότε οι εικόνες των μιγαδικων z που επαληθεύουν την εξίσωση $z\bar{z} = az + a\bar{z} + b$ ανήκουν σε κύκλο.

198. Από τις εξετάσεις του 2008. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right| = 6 \;\text{ και }\; |w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

1. το γεωμετρικό τοπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
2. το γεωμετρικό τοπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
3. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
4. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

199. Απο το διαγωνισμό Putnam, 1959. Να αποδείξετε ότι αν οι εικόνες των, διάφορων, μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου τότε η τρίτη κορυφή αυτού του τριγώνου θα είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$-\omega z_1 - \omega^2 z_2$$

όπου ω είναι μία μη πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^3 = 1$.

Απολλώνιος
ο Περγαίος
∼260-170 π.Χ.

200. Έστω δύο σταθεροί μιγαδικοί p, q με ίσα μέτρα και η συνάρτηση $f(z) = pz + q\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $f(z)$ ανήκουν σε μία ευθεία.

201. Ο κύκλος του Απολλωνίου. Έστω z_1, z_2 δύο διάφοροι αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = c$ όπου c θετικός πραγματικός αριθμός διάφορος του 1 τότε ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του $\frac{1}{1-c^2}z_1 - \frac{c^2}{1-c^2}z_2$ και ακτίνα $\frac{c|z_1-z_2|}{|1-c^2|}$

202. Από τα Mathematical Tripos του Cambridge, 1998. Έστω μία ευθεία L και έστω α ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο ίχνος της κάθετης που άγεται από την αρχή των αξόνων O στην L. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της L γράφεται

$$z = \alpha + \lambda\alpha i$$

και επομένως στη μορφή

$$z\bar{\alpha} + \alpha\bar{z} = 2\alpha\bar{\alpha}$$

Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που προκύπτει αν στα σημεία της L εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός $z \to \frac{1}{z}$. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

203. Από τα Mathematical Tripos του Cambridge, 2000. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό k ορίζουμε το σύνολο

$$S_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k \right\}$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \neq 1$ οι εικόνες των μιγαδικών του συνόλου S_k παριστάνουν κύκλο του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

2. Να δώσετε ακόμη μία πλήρη περιγραφή του συνόλου των εικόνων του S_1.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = -\bar{z}$. Να δώσετε μία γεωμετρική περιγραφή της f και να αποδείξετε ότι

$$f(S_k) = S_{\frac{1}{k}}$$

204. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ με $|\alpha| < 1$. Για κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ένα από τα παρακάτω θα ισχύει:

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| < 1 \text{ ή } \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = 1 \text{ ή } \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| > 1$$

Επομένως το μιγαδικό επίπεδο χωρίζεται σε τρία χωρία ανάλογα με το ποιά σχέση αληθεύει για τα σημεία τους. Να περιγράψετε αυτά τα χωρία.

Υπόδειξη: Ισχύει $\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\right| = \frac{1}{|\bar{\alpha}|}\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right|$. Λάβετε υπ' όψιν την άσκηση 201

1.3.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

Κλαύδιος Πτολεμαίος
85-165

Leonhard Euler
1707 -1783

August Ferdinard Möbius
1790-1868

205. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z-1,\ \ z+1,\ \ z^2$ είναι σημεία συνευθειακά. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

206. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου $|z-z_0|=\rho$ είναι ισοδύναμη με την $z\bar{z}=2\mathrm{Re}\,(z\bar{z}_0)+\rho^2-|z_0|^2$

207. Θεωρούμε τους ανα δύο διάφορους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2,z_3,z_4 που οι εικόνες τους ανά τρεις δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους είναι σημεία ομοκυκλικά αν και μόνο αν ισχύει

$$\frac{(z_1-z_2)\,(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)\,(z_3-z_2)}\in\mathbb{R}$$

Υποδειξη: Συνδυάστε τις ασκήσεις (180), (187)

208. Το Θεώρημα Πτολεμαίου-Euler. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4.

1. Να αποδείξετε ότι
$$(z_1-z_2)\,(z_3-z_4)+(z_1-z_4)\,(z_2-z_3)=(z_1-z_3)\,(z_2-z_4)$$
2. Να αποδείξετε ότι
$$|(z_1-z_2)\,(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)\,(z_2-z_3)|\leq|(z_1-z_3)\,(z_2-z_4)|$$
3. Να αποδείξετε ότι η ισότητα την προηγούμενη ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι εικόνες των z_1,z_2,z_3,z_4 είναι σημεία ομοκυκλικά.

Υποδειξη: Δείτε και την άσκηση 207.

209. Ο Μετασχηματισμός του Möbius. Η απεικόνιση $z\to\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ ονομάζεται μετασχηματισμός του Möbius. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$ τότε ο μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει ευθείες - κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

210. Έστω ότι εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+C$. Έστω $m=|z|^2$.

1. Να αποδείξετε ότι $m=-\left(A\mathrm{Re}\,(z)+B\ \mathrm{Im}\,(z)+C\right)$
2. Να αποδείξετε ότι $m^2B^2+\left(2B^2C-A^2B^2-B^4\right)m+B^2C^2\leq0$
3. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του z είναι οι
$$\sqrt{\frac{(A^2+B^2)-2C\pm\sqrt{(A^2+B^2)\,(A^2+B^2-4C)}}{2}}$$

1.4 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

211. Υπάρχει άραγε ακέραιος $n \neq 0$ έτσι ώστε $(1+i)^n = (2+i)^{n+1}$;

212. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 είναι γνωστό ότι $|z_1| = |z_2| = 1$. Να αποδείξετε ότι αν

$$z_1 - z_2 + z_1 z_2 = \alpha$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$z_1 - z_2 + \alpha z_1 z_2 = 1$$

213. Από τις εξετάσεις του 2003. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

1. Να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$$

$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$$

2. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

3. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο.

214. ν μιγαδικοί αριθμοί ανήκουν σε σταθερό κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και έχουν σταθερό άθροισμα. Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του αθροίσματος των αντιστρόφων τους ανήκει επίσης σε σταθερό κύκλο.

215. Να αποδείξετε ότι αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| < 1, \ \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| < 1, \ \ldots \ , \left|\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| < 1$$

τότε ισχύει και

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + ... + z_\nu - i}{z_1 + z_2 + ... + z_\nu + i}\right| < 1$$

216. Να περιγράψετε το σύνολο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει

$$0 < |z - 1| < 1 + |z|$$

217. Να περιγράψετε το σύνολο των μιγαδικών z για τους οποίους το πραγματικό μέρος του αριθμού $(1+i)z^2$ είναι θετικό.

218. Να αποδειχθεί ότι αν για ένα μηγαδικό αριθμό z υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί u, w με

$$|u| = |w| \leq 1 \quad (*)$$

ώστε

$$z = u + w \quad (**)$$

τότε

$$|z| \leq 2 \quad (***)$$

αλλά και αντιστρόφως αν για τον z ισχύει η (***) τότε υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί u, w ώστε να ισχύουν οι (*), (**).

219. Από τις εξετάσεις του 1984, Δέσμη Ι. Έστω z ο μιγαδικός αριθμός $x + yi$ με $y \neq 0$ (x, y πραγματικοί αριθμοί). Θέτουμε $\omega = \frac{\bar{z}^2}{z-1}$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγης του z. Να αποδείξετε ότι ο ω είναι πραγματικός αριθμός, εάν και μόνο αν το σημείο (x, y), ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy, ανήκει σε μία υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

220. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει

$$\frac{z+1}{\bar{z}} = 2$$

221. Να αποδείξετε ότι αν $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ τότε $|z_1 - z_2| < |1 - z_1\bar{z}_2|$

222. Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$. Δείξτε ότι $|z_1| = |z_2|$.

223. Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $2z_1^2 + z_1 z_2 + 3z_2^2 = 0$. Να υπολογίσετε το $\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

224. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ τέτοιους ώστε $z_1^2 + z_2^2 = \kappa z_1 + \lambda z_2$.

225. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $|z_1| = |z_2| = 1$ τότε ισχύει

$$|z_1 + z_2 + \alpha z_1 z_2 - 1| = |z_1 + z_2 - z_1 z_2 + \alpha|$$

226. Να βρείτε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει $w^2 = -5 - 12i$.

227. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους υπάρχει ακέραιος m ώστε $z^m = (z+1)^m$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες όλων αυτών των αριθμών ανήκουν στην ίδια ευθεία.

228. Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $K\,(1, 0)$ και ακτίνα 1 τότε οι μιγαδικοί αριθμοί $z^{\nu+1} - z^{\nu}$, z^{ν} όπου ν φυσικός, έχουν ίσα μέτρα.

229. Έστω οι ανά δύο διάφοροι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4. Να αποδείξετε ότι αν δύο από τους αριθμούς

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_4}, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_4}, \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$$

είναι φανταστικοί τότε θα είναι και ο τρίτος.

230. Να αποδείξετε ότι αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ τότε $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

231. Για ποια τιμή του $p \in \mathbb{R}$ το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $z = \frac{1+i}{2+2pi} + \frac{2+3i}{3+i}$ είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος;

232. Να αποδείξετε ότι αν για τους ανά δύο διάφορους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ τότε οι εικόνες τους είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

233. Με τη βοήθεια της άσκησης 1.4 να αποδείξετε ότι αν α, β, γ είναι τρείς ανα δύο διάφοροι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν μία οποιαδήποτε από τις συνθήκες της άσκησης 72 τότε οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

234. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου του οποίου κορυφές είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$ και $z_1 z_2$.

235. Να αποδείξετε ότι αν λ είναι θετικός πραγματικός και z_1, z_2 μιγαδικοί τότε ισχύει

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (1 + \lambda) |z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) |z_2|^2$$

236. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$

237. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = z^2$$

238. Να επαληθεύσετε τις ισότητες

$$\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$$

$$\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$$

239. Έστω ότι για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z - z_1| < \alpha$ και $|z - z_2| < \beta$. Να αποδείξετε ότι $\left|z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| < \frac{\alpha + \beta}{2}$.

240. Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 ισχύει

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

241. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των αριθμών z για τους οποίους ισχύει $(|z| - 2i)(|z| + 2i) = (\mathrm{Re}(z) + 2)^2$

242. Έστω ότι $w = \frac{a+z}{a-z}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι αν το z διατρέχει τον άξονα των φανταστικών τότε το w διατρέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

243. Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z γράφει κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\alpha \neq 1$ τότε η εικόνα του $w = z + \frac{1}{z}$ γράφει την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{(1+\alpha^2)^2} + \frac{y^2}{(1-\alpha^2)^2} = 1$.

244. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $z_3 = (1 - \lambda) z_1 + \lambda z_2$ με $\lambda \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| = |z_1 - z_2|$.

245. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $\frac{3}{2}(z + \bar{z})^2 + i(z - \bar{z})$ είναι φανταστικός τότε $|z - i| \geq \frac{1}{6}\sqrt{11}$

246. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ με $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Ποιούς μιγαδικούς απεικονίζει η f σε πραγματικούς;

247. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 με $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους και η αρχή των αξόνων είναι σημεία ομοκυκλικά. Υποδειξη: Δείτε την άσκηση (187)

248. Να αποδείξετε ότι $|1 - \bar{w}z|^2 - |w - z|^2 = \left(1 - |w^2|\right)\left(1 - |z|^2\right)$.

249. Αν $z^{1953} = 1$ τότε ο αριθμός $z^{1972} + \frac{1}{z^{1972}}$ είναι πραγματικός. Γιατί;

250. Να αποδείξετε ότι αν $(u + 1)^{\nu} + u^{\nu} = 0$ (ν θετικός ακέραιος) τότε $\mathrm{Re}(u) = -\frac{1}{2}$.

251. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z αν είναι γνωστό ότι $|z + ki|^2 + |z - ki|^2 = 10k^2, \quad k > 0$

252. Να αποδείξετε ότι αν $|z_1| + |z_2| = ... = |z_{\nu}|$ τότε ο αριθμός

$$z_1 + z_2 + ... + z_{\nu} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{\nu}}$$

εφ'οσον ορίζεται είναι πραγματικός.

253. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει

- $z_1 + z_2 + ... + z_\nu = 0$
- $|z_1| = |z_2| = ... |z_\nu| = 1$

τότε ισχύει:

$$|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_\nu| \geq \nu$$

254. Να αποδείξετε ότι αν

- Οι $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί με $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\nu = 1$
- $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,...$|z_\nu| < 1$

τότε ισχύει:

$$|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + ... + \lambda_\nu z_\nu| < 1$$

255. 1. Να αποδείξετε ότι

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $|z_1 + z_2 + z_3| = 3$ τότε $z_1 = z_2 = z_3$.

256. Από τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση $\left|\frac{2z+1}{iz+1}\right| = 2$ ποιος έχει το ελάχιστο μέτρο;

257. Να αποδείξετε ότι αν οι εικόνες των z, w ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων τότε ο αριθμός $\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^2$, εφ' όσον ορίζεται, είναι πραγματικός.

258. Ο μιγαδικός αριθμός z δεν είναι πραγματικός ούτε φανταστικός και ισχύει $\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3} \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|z| = 1$.

259. Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1 τότε η εικόνα του $w = x^2 + y^2 i$ ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

260. 1. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί z, z^2, z^3 έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο ή ίσο του 0 τότε το πραγματικό μέρος του z είναι 0.

2. Να αποδείξετε ότι αν $|z+1| \leq 1$ και $|z^2+1| \leq 1$ και $|z^3+1| \leq 1$ τότε $z = 0$.

261. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο αν ισχύει $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 \in \mathbb{R}$.

Υποδειξη: Δείτε και την άσκηση (180).

262. Από ένα θέμα του διαγωνισμού Putnam του 1947. Έστω $f(z) = z^2 + az + b$ με $a, b \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι αν $|f(z)| = 1$ για κάθε z με $|z| = 1$ τότε ισχύει $a = b = 0$.

Υποδειξη: Θα πρέπει $|f(1)| = |f(-1)| = 1$ και $|f(i)| = |f(-i)| = 1$.

263. Από τις εξετάσεις του 2005. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

1. Δείξτε ότι $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$.
2. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.
3. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$

264. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, γ ισχύει $0 < \gamma < \alpha$. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|z + \gamma| + |z - \gamma| = 2\alpha \qquad (*)$$

Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του z;

265. Έστω ότι $z_1 = \frac{1+ti}{1-ti}$ και $z_2 = \frac{t+i}{t-i}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Βρείτε τα μέτρα των z_1, z_2
2. Δείξτε ότι οι z_1, z_2 έχουν το ίδιο φανταστικό μέρος.
3. Δείξτε ότι αν για τον θετικό ακέραιο m ισχύει $z_1^m + z_2^m = \bar{z}_1^m + \bar{z}_2^m$ τότε ο m είναι άρτιος.

266. Βρείτε μιγαδικούς a, b, c που έχουν μέτρο 1 και $a + b + c = abc = 1$.

Υποδειξη: Δείξτε ότι $ab + bc + ca = 1$ και ότι $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - x^2 + x - 1$.

267. Για το μιγαδικό αριθμό z είναι γνωστό ότι ισχύει $z^3 + \bar{z}^3 = 16$.

1. Να αποδείξετε ότι $|z| \geq 2$.
2. Μπορεί άραγε να είναι $|z| = 2$.

268. Από τις εξετάσεις του 2006. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

1. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

   (β΄) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$

   Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

269. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right| = 1$
2. $\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}$

270. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερός με $\lambda \geq 1$. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών την εξίσωση:

$$w + \lambda\,|w + \lambda| + i = 0$$

271. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί u και $v = \frac{3-i}{10}u$.

1. Υποθέτουμε ότι $|u| = \sqrt{2}$. Δείξτε ότι η εικόνα του v ανήκει σε κύκλο έστω $\mathcal{C}$.
2. Υποθέτουμε ότι η εικόνα του u ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -x-2$. Δείξτε ότι η εικόνα του v ανήκει σε ευθεία έστω ε η οποία εφάπτεται στον κύκλο $\mathcal{C}$ του ερωτήματος (α').

272. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες όλων των μιγαδικών της μορφής

$$z = \frac{1+mi}{1-mi}, \qquad m \in \mathbb{R} \quad (*)$$

ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο (κέντρο η αρχή των αξόνων, ακτίνα 1). Να εξετάσετε αν οι παραπάνω μιγαδικοί αριθμοί «εξαντλούν» τον κύκλο δηλαδή αν κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου είναι εικόνα κάποιου μιγαδικού της μορφής $(*)$

273. Υπάρχουν άραγε σταθεροί μιγαδικοί α, β έτσι ώστε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να ισχύει $\bar{z} = \alpha z + \beta$;

274. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|1+z| \leq |1+z|^2 + |z|$$

275. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|1+z| + \left|1+z+z^2\right| \geq 1$$

Υποδειξη: Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $|z| \geq 1$ και $|z| < 1$. Στην δεύτερη να παρατηρήσετε ότι $|1+z| + \left|1+z+z^2\right| \geq |1+z|\,|z| + \left|1+z+z^2\right|$

276. Να αποδείξετε ότι

$$|z+\alpha| - |z+\alpha-1| + |z+\beta| - |z+\beta-1| \leq 2$$

277. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 είναι γνωστό ότι οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο $\mathcal{C}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδείξετε ότι αν ο μιγαδικός αριθμός

$$w = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$$

ορίζεται τότε η εικόνα του επίσης ανήκει στον $\mathcal{C}$

278.

1. Για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \quad (*)$$

   Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο $\mathcal{L}$ της εικόνας του z.

2. Για το μιγαδικό αριθμό w ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2w}{w+1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2w}{w+1}\right) \quad (**)$$

   Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο $\mathcal{M}$ της εικόνας του w.

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς που ικανοποιούν και τις δύο σχέσεις $(*)$, $(**)$.

4. Ένας μιγαδικός z ικανοποιεί την σχέση $(*)$ και ένας μιγαδικός w ικανοποιεί την σχέση $(**)$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του $z - w$;

279. Να αποδείξετε ότι αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ορίζουν τρίγωνο τότε το βαρύκεντρο του είναι η εικόνα του $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$. Δείξτε ακόμη ότι αν, επιπλέον, οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο τότε το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι η εικόνα του $z_1 + z_2 + z_3$.

280. Έστω $\mathcal{H}$ το σύνολο όλων των μιγαδικών που έχουν μέτρο 1 και $z, w \in \mathcal{H}$

1. Να αποδείξετε ότι θα ισχύει $z + w - zw + 1 = 0$ αν και μόνο αν ισχύει $z + w + zw - 1 = 0$

2. Βρείτε τους z, w αν είναι γνωστό ότι $(z-1)(w-1) = 2$

281. Σε κάθε πραγματικό αριθμό t αντιστοιχούμε τον μιγαδικό αριθμό $f(t) = \frac{1+ti}{1-ti}$. Δείξτε ότι

1. $|f(t)| = \left|\frac{1}{f(t)}\right| = 1$

2. Έστω ότι $t_1 + t_2 = 2$ και $t_1 t_2 = -1$. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των $f(t_1), f(t_2)$.

282. Να αποδείξετε ότι αν $z^2+z+1=0$ τότε:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha+\beta z+\gamma z^2\right)\left(\alpha+\beta z^2+\gamma z\right)$$

283. Να αποδείξετε ότι αν $i^m=i^n$ $(m,n\in\mathbb{N})$ τότε $i^{m^2+4n}=i^{n^2+4m}$.

284. Είναι $|z|=1$. Βρείτε το $\left|\frac{z^2(z-i)}{1+iz}\right|$.

285. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$.
Υπόδειξη: $\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+2\left(x^2-y^2\right)+1=\left(x^2-1-2y+y^2\right)\left(x^2-1+2y+y^2\right)$

286. Να αποδείξετε ότι αν $|z|=1$ τότε $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right)=0$.

287. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1,z_2 ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)=(1+z_1\bar{z}_2)(1+\bar{z}_1z_2)-(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$
2. $|z_1-z_2|\leq\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$

288. Αν $|6z+1|=|4z-1|$ βρείτε το $|2z+1|$.

289. Για τους μιγαδικούς z_1,z_2 είναι γνωστό ότι $|z_1|=|z_2|=1$ και $(z_1-z_2)^2=-4$. Να αποδείξετε βρείτε τους z_1,z_2.

290. Από τις εξετάσεις του 1960. (Αρχιτεκτονική Θεσσαλονίκης) Δίδεται η εξίσωσις

$$x^2+(2\lambda-1)\,x+8\lambda^2-4\lambda=0$$

Να ορισθεί ο λ ώστε το $\rho_1^2+\rho_2^2$ να είναι μέγιστον.

Επεξήγηση: Το λ θεωρείται πραγματικός και ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

291. Έστω ότι $|z_1|=r_1$ και $|z_2|=r_2$ με $0<r_1<r_2$. Να βρείτε την μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμη που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$A=|z_1-z_2|+|z_1+z_2|$$

292. Έστω ότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$ και $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right)=m$. Να βρεθεί ο m.

293. Έστω η εξίσωση

$$x^2+\alpha x+\beta=0$$

όπου οι α,β είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε ποιές σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν οι α,β έτσι ώστε η εξίσωση να έχει μή πραγματικές ρίζες με μέτρο μικρότερο του 1.

294. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|z_1 + z_2| = 2$ τότε θα ισχύει $\mathrm{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) \le 1$.

295. Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\left|z^2 + 1\right| = |z - 1|$. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του z.

Υποδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για $z \neq 1$ ισχύει $(z + \overline{z})^2 + (z + \overline{z}) + |z|^4 - 3|z|^2 = 0$. Με $x = \mathrm{Re}\,(z)$ έχουμε μία εξίσωση ως προς x που πρέπει να έχει πραγματικές λύσεις.

296. Έστω $z_0 \neq 0$ σταθερός μιγαδικός και α σταθερός πραγματικός. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}\,(z_0 z) = \alpha$.

297. Έστω ότι $|z| = 2$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{4} \le \left|\frac{z^2+1}{z^2+8}\right| \le \frac{5}{4}$$

298. Έστω ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathrm{Re}\,((1+i)\,z) = 2, \quad wz = i$$

1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, w
2. Να βρείτε ποιός από τους μιγαδικούς z έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τους μιγαδικούς w;

299. Από τις εξετάσεις του 2009. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)\,i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. (α′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (β′) Από τους παραπάνω μιγαδικούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός z_0 έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.
2. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου $z_0 = 1 - i =$ ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

300. Έστω μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\varphi\,(z + w) = \varphi\,(z) + \varphi\,(w)$ για όλα τα $z, w \in \mathbb{C}$
- $\varphi\,(zw) = \varphi\,(z)\,\varphi\,(w)$ για όλα τα $z, w \in \mathbb{C}$
- $\varphi\,(z) = z$ για όλα τα $z \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι ή θα ισχύει $\varphi(z) = z$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ είτε θα ισχύει $\varphi(z) = \bar{z}$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$.

301. Έστω μία συνάρτηση $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\alpha(z) = z$ για μη αρνητικό πραγματικό z
- $\alpha(z_1 z_2) = \alpha(z_1)\,\alpha(z_2)$ για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1, z_2.
- Υπάρχει θετικός πραγματικός M ώστε $\alpha(z) \leq M$ για κάθε z με $|z| = 1$

Να αποδείξετε ότι $\alpha(z) = |z|$ για κάθε z.

302. Από τις εξετάσεις του 2010. Δίνεται η εξίσωση

$$z + \frac{2}{z} = 2$$

όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.
2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$
3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

   $$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

   τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.
4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος 3, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq t7$

303. Να αποδείξετε ότι αν ο $\nu > 0$ είναι φυσικός και ισχύει $(x+i)^{\nu} + (x-i)^{\nu} = 0$ τότε ο x είναι πραγματικός.

304. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a-b| = |a| = |b| > 0$. Βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4$.

305. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει:

$$|2z_1 - z_2 - z_3| = |z_2 - z_3|$$

και

$$|2z_2 - z_1 - z_3| = |z_1 - z_3|$$

Να αποδειχθεί ότι $z_1 = z_2$.

306. Από τις εξετάσεις του 2011. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\overline{z} + 3i| = 2$$

και

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

2. Να αποδείξετε ότι
$$\overline{z} - 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $2 \leq w \leq 2$.

4. Να αποδείξετε ότι:
$$|z - w| = |z|$$

307. Από τις εξετάσεις του 2012. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \qquad (1)$$

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \qquad (2)$$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:
$$1 \leq |zw| \leq 4$$

308. Να σχεδιάσετε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $|\text{Re}\,(z)| = 1$

2. $\text{Re}\,(|z|) = 1$

3. $|\text{Re}\,(z)| + |\text{Im}\,(z)| = 1$

309. Δύο μη παράλληλες ευθείες τέμνουν τον κύκλο $|z| = 1$ στα σημεία που είναι εικόνες των μιγαδικών a, b και c, d αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι το κοινό σημείο τους είναι η εικόνα του μιγαδικού

$$w = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}}$$

Κεφάλαιο 2

Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων

2.1 Συναρτήσεις. Πράξεις συναρτήσεων

2.1.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

310. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 22 είναι τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

311. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(0) + f(-2) + f(f(-2))$

312. Έστω η συνάρτηση $g(x) = 7x^3 - 2x + 1$. Δείξτε ότι $g(2x) - g(x) = x\left(49x^2 - 2\right)$.

313. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε h ισχύει $f\left(\frac{3}{2} + h\right) = f\left(\frac{3}{2} - h\right)$.

314. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$. Να επαληθεύσετε την ισότητα $f(x+h) - f(x-h) = 2h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(x+h)} + \sqrt{(x-h)}}\right)$

315. Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ισχύει $f(1) = 3$, $f(-1) = -3$, $f(2) = 12$. Να βρείτε τα α, β, γ.

316. Από τα θέματα του διαγωνισμού Flanders, 1991. Έστω

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (x \neq 1)$$

Αν $y = f(x)$ τότε το x είναι ίσο με:

1. $\frac{1}{f(y)}$ 2. $f(\frac{1}{y})$ 3. $-\frac{f(y)}{y}$ 4. $-\frac{1}{yf(y)}$ 5. $\frac{1}{yf(y)}$

317. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}$
2. $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-2x-63}}$

318. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $\varphi(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$
3. $g(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$
4. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
5. $\omega(x) = \ln\left(x^2-4x+3\right)$
6. $\psi(x) = \frac{1}{\ln(x^2-4x+3)}$

319. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$

320. Ποια από τα σημεία $A(1,1)$, $B(-3,6)$, $\Gamma\left(t-2, 2-\frac{3}{t}\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$;

321. Για ποια τιμή του t το σημείο $M(t,-11)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = 2x^3 - 3x - 1$;

322. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + x - 2$ διέρχεται από το σημείο $M(1,4)$. Ποιος είναι ο α;

323. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x + \alpha}$$

διέρχεται από το σημείο $A(2,7)$. Να βρείτε το $f(7)$.

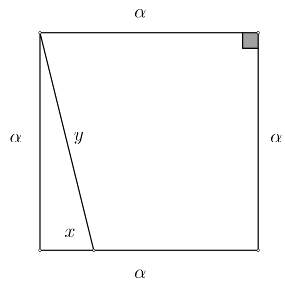
324. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

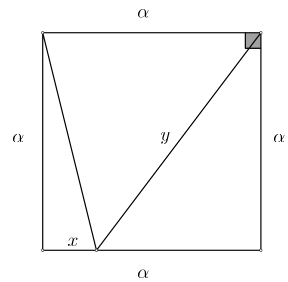
1. $f(x) = \begin{cases} x\ , & x<0 \\ x+1\ , & x \geq 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x-1\ , & x<0 \\ x+1\ , & x>0 \end{cases}$

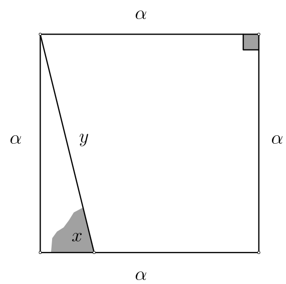
325. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2+1$ και $g(x) = \frac{5}{4}x^2 - x + \frac{7}{4}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα A, B.

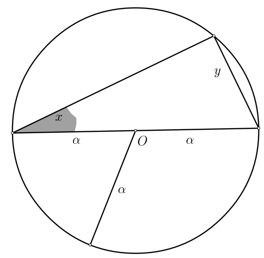
1. Να βρείτε τα A, B.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

326. Στα επόμενα σχήματα να εκφράσετε το y συναρτήσει του x.

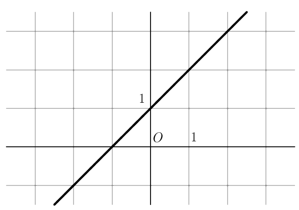

(I)

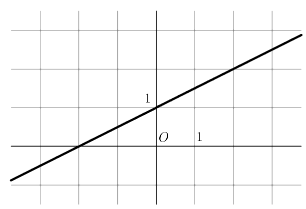

(II)


(III)

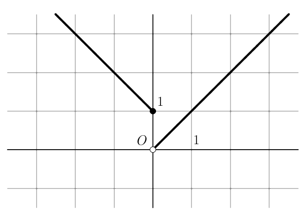

(IV)

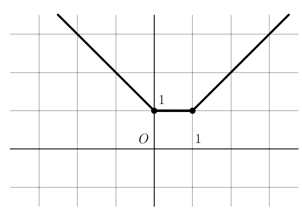
327. Στα επόμενα σχήματα βρείτε την συνάρτηση f.


(α)

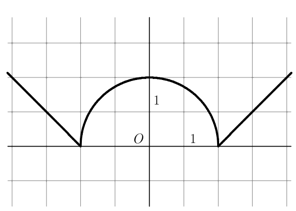

(β)

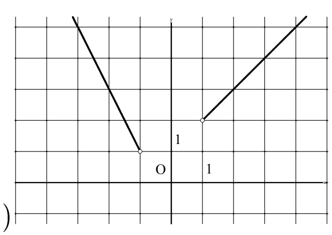
328. Στα επόμενα σχήματα βρείτε την συνάρτηση f.


(α)

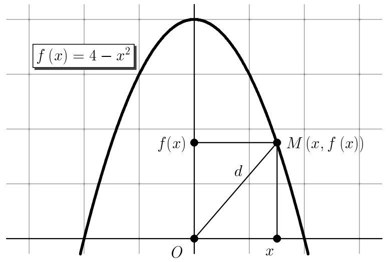

(β)

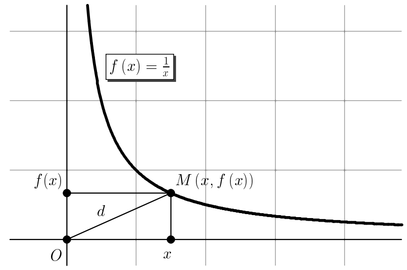
329. Στα επόμενα σχήματα βρείτε την συνάρτηση f (Στο σχήμα (α) η $\mathcal{C}_f$ απαρτίζεται από ένα ημικύκλιο και δύο ημιευθείες).


(α)


(β)

330. Στα επόμενα σχήματα να εκφράσετε το d συναρτήσει του x.

(α)


(β)


331. Για ποια τιμή του λ η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 1)x^2 + \lambda x + 1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι ίση με την συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ πού έχει πεδίο ορισμού επίσης το $\mathbb{R}$;

332. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| + 2x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & x < 1 \\ -x^2 + 5x - 3 & 1 \le x < 2 \\ x^2 - x + 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

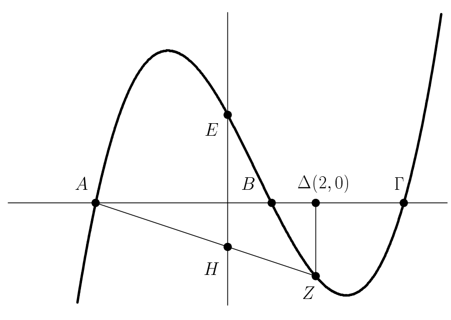
είναι ίσες.

333. Για ποια τιμή του λ το σημείο $M(1, \lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 + x + 1$;

334. Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{1}{6}(x+3)(x-1)(x-4)$$

Τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στον άξονα $x'x$, τα E, H στον $y'y$ και $B\Delta \perp \Delta Z$.



Να βρείτε τις συντεταγμενες των σημείων:

1. E
2. A, B, Γ
3. Z, H

335. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

336. Το άθροισμα των $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ δεν ορίζεται. Γιατί;

337. Η συνάρτηση f είναι σταθερή και $4f(7) = 11$. Ποιο είναι το $f(11)$;

338. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$. Να αποδείξετε ότι κάθε αριθμός διάφορος του 2 είναι τιμή της f. Επίσης να αποδείξετε ότι ο 2 δεν είναι τιμή της f.

339. Μία συνάρτηση f είναι 1-1 και $f(2x - 1) = f(9)$. Ποιος είναι ο x;

340. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι $1 - 1$:

1. $f(x) = 3x + 1$
2. $g(x) = 3^{3x+1} + 1$
3. $s(x) = x^3 + 1$
4. $g(x) = \frac{x}{3} + 5$

341. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ δεν είναι $1 - 1$:

1. $f(x) = |x| + 1$
2. $g(x) = x^2 + x + 1$
3. $s(x) = \frac{1}{x^4+1} + x^2$
4. $g(x) = e^{-x^2}$

342. Να βρείτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει $f(x + 1) = 2x + 1$.

343. Ποιές είναι οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων;

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$
2. $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$
3. $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2$

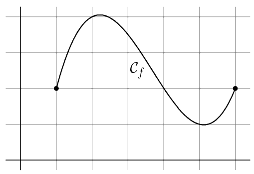
344. Να ορίσετε την σύνθεση $g \circ f$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

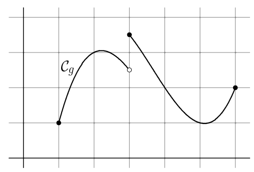
1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$
2. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \sqrt{x - 5} + \sqrt{x - 2}$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $g(x) = \ln x$

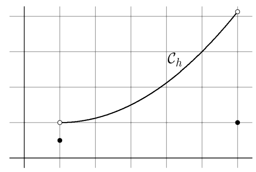
345. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = |x| + 1$ και $g(x) = x + 1$ και πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}$. Είναι οι συναρτήσεις ίσες όταν:

1. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; 2. $\mathcal{D} = (-1, 1)$; 3. $\mathcal{D} = (2, 4)$;

346. Στο επόμενα σχήματα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, h. Να εξετάσετε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο.







347. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και την συνάρτηση

$$h(x) = \operatorname{Im}\left((f(x) + ig(x))^2\right)$$

Να αποδείξετε ότι κάθε ρίζα της h είναι και ρίζα της f ή της g.

348. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x - 1$ είναι αντιστρέψιμη. Μετά να βρείτε τα κοινά σημεία την γραφικών παραστάσεων των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_f^{-1}$.

349. Μία αυνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = 2f(x) + 3$;

350. Η ευθεία $y = 1$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε δύο σημεία. Είναι η f αντιστρέψιμη;

2.1.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

351. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

1. $\varphi(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ 2. $\sigma(x) = \ln\left(e^{2x} - 5e^x + 6\right)$

352. Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+1)(x+k)}{x^2+1}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x) \in [0, 1]$. Να βρείτε το k.

353. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + x^2 e^{2x} = 2xe^x f(x)$ για όλα τα x. Να βρείτε τον τύπο της f.

354. Από τα θέματα του διαγωνισμού Flanders, 1991. Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \sqrt{x}$. Τότε το σύνολο τιμών της είναι:

1. $[0, +\infty)$
2. $\mathbb{R}$
3. $[-\frac{1}{4}, +\infty)$

4. Κάποιο σύνολο που περιέχεται σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

5. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

355. Πως πρέπει να επιλεγεί ο α ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{1-\alpha-x^2}$ να περιέχει το διάστημα $I = [-1, 1]$;

356. Να βρείτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει $f(x+1) = 2x+1$.

357. Να βρείτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει $f(2x+1) = e^x + x + 1$.

358. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

1. $f(0) = 0$

2. $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. $f(\mu x) = \mu f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mu \in \mathbb{N}$

4. $f\left(\frac{x}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

5. $f(qx) = qf(x)$ για κάθε για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ με $q > 0$

6. $f(qx) = qf(x)$ για κάθε για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

7. Με $c = f(1)$ ισχύει $f(q) = cq$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

359. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x, y \neq 0$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(1) = 0$

2. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

3. Για κάθε $x, y \neq 0$ ισχύει $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

4. Αν για το $x \neq 0$ ισχύει $x^\nu = \alpha$ ($\nu \in \mathbb{N}$) τότε $f(\alpha) = \nu f(x)$.

5. $f(-1) = 0$

6. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(-x) = f(x)$

360. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. με $\alpha\gamma \neq 0$. Να αποδείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq -\frac{\delta}{\gamma}$.
2. $\alpha = -\delta$

361. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$ για όλες τις συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

362. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - a$ είναι αντιστρέψιμη. Μετά βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f και της αντίστροφης της.

363. Από τα θέματα του διαγωνισμού Flanders, 1990. Στο επίπεδο η εξίσωση $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2 y$ ορίζει μία καμπύλη. Το σύνολο των τεταγμένων y των σημείων της καμπύλης είναι

1. $[-1, 1]$ 2. $\mathbb{R}^+$ 3. $[0, 1]$ 4. $[0, 2]$ 5. $\mathbb{R}$

364. Από τα θέματα του διαγωνισμού Flanders, 1991. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f_1, f_2, ..., f_\nu, ...$ που ορίζονται ως εξής:

- $f_1(x) = \alpha x + \beta$
- Αν $\nu \geq 2$ τότε $f_\nu = f_{\nu-1} \circ f_1$

Η σχέση $f_{1990} = f_{1992} \neq f_{1991}$ μπορεί να ισχύει:

1. Για μία τιμή του α και μία τιμή του β.
2. Για δύο τιμές του α και μία τιμή του β.
3. Για τρείς τιμές του α και μία τιμή του β.
4. Για μία τιμή του α και οποιαδήποτε τιμή του β.
5. Για δύο τιμές του α και οποιαδήποτε τιμή του β.

365. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ υπάρχουν αριθμοί κ, λ έτσι ώστε για όλα τα x να ισχύει $(f \circ f)(x) = \kappa x + \lambda$. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει $f(\kappa x + \lambda) = \kappa f(x) + \lambda$

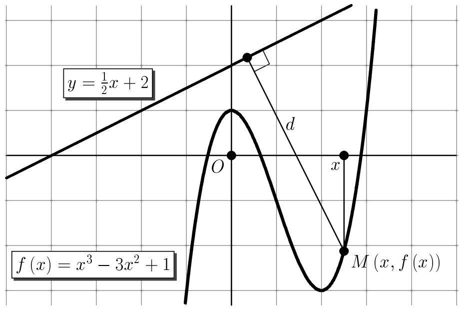
366. Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται *κυρτή* αν γιά κάθε $x, y \in \Delta$ και για κάθε $\alpha, \beta \in [0,\ 1]$ με $\alpha + \beta = 1$ ισχύει:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Να αποδείξετε μία συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε τριάδα αριθμών $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

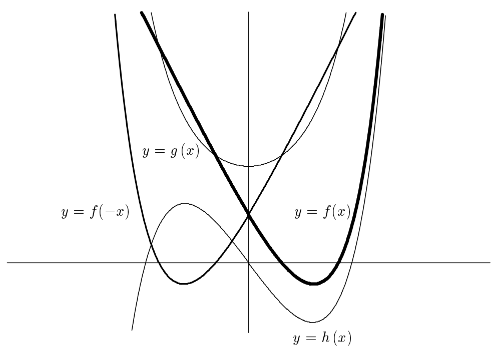
367. Στο επόμενο σχήμα να εκφράσετε το d συναρτήσει του x.



368. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$
2. $g(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} + 1$
3. $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = e^x + e^{2x}$

369. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια ενώ η $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή. Βάσει τούτου δείξτε ότι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.



370. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ τέτοια ώστε να παίρνει τιμές στο διάστημα $(-1, 1)$. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η g είναι γνησίως μονότονη με είδος μονοτονίας ίδιο με της f.

371. Σε ποιές από τις επόμενες περιπτώσεις η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ

1. $f(x) = 3x - \sqrt{2},\ \Delta = (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = x(x+1),\ \Delta = (-3, -2)$
3. $f(x) = x^2 + 1,\ \Delta = (-1, 1)$
4. $f(x) = -\frac{1}{x},\ \Delta = (0, +\infty)$
5. $f(x) = \eta\mu x, \Delta = (0, +\infty)$
6. $f(x) = x^{12}, \Delta = [0, 1]$

372. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(*υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο*). Να αποδείξετε ότι:

1. Η f είναι άρτια και η g περιττή.
2. Ισχύει $f(x) > g(x)$ για όλα τα x
3. Η g είναι γνησίως αύξουσα.
4. Ισχύει
$$f^2(x) - g^2(x) = 1$$
για όλα τα x.
Τέλος:
5. Να βρείτε την αντίστροφη της g.

373. Να αποδείξετε ότι αν η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε και η f είναι 1-1.

374. Έστω $f(x) = 2x+3$. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f^{-1}\left(f(1) + f^{-1}(1)\right)$.

375. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x ισχύει $f\left(x^2 - 2x\right) \leq f(-1)$ τότε θα είναι $x = 1$.

376. Για την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(e^x) = 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών α, β ισχύει $f(\alpha\beta) = 2\ln\alpha + 2\ln\beta + 1$.

377. Για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+1) = f\left(x^2\right)$ για κάθε x. Είναι αντιστρέψιμη;

378. Ποιά είναι η αντίστροφη της $f(x) = x^{2\nu+1}$, $\nu = 1, 2, ...$;

379. Με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ βρείτε τον α ώστε να ισχύει $f = f^{-1}$.

380. Αν οι $f \circ g$ και g είναι γνησίως αύξουσες και $g(\mathcal{D}_g) = \mathcal{D}_f$ είναι άραγε και η f γνησίως αύξουσα;

381. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και για τρεις αριθμούς $\alpha < \beta < \gamma$ είναι γνωστό ότι $(f(\beta) - f(\alpha))(f(\gamma) - f(\beta)) < 0$. Μπορεί η f να είναι γνησίως μονότονη;

382. Να αποδείξετε λεπτομερώς ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.

383. Υπάρχουν άραγε γνησίως μονότονες περιοδικές συναρτήσεις;

384. Οι συναρτήσεις f, g, h είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και παίρνουν θετικές τιμές. Οι δύο πρώτες είναι αύξουσες και η τρίτη είναι φθίνουσα. Να καθορίσετε το είδος μονοτονίας των συναρτήσεων:

1. $f + g - h$
2. $fg - h$,
3. $\frac{1}{fg} + 3h$

385. Οι συναρτήσεις f, g, είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και παίρνουν θετικές τιμές. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο (αντιστοίχως: ελάχιστο) στο x_0 τότε η $\frac{1}{f}$ παρουσιάζει ελάχιστο (αντιστοίχως: μέγιστο) στο x_0.
2. Αν οι f, g παρουσιάζουν ελάχιστο (αντιστοίχως: μέγιστο) στο x_0 τότε και η $f + g$ παρουσιάζει ελάχιστο (αντιστοίχως: μέγιστο) στο x_0

386. Με $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$:

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f = f^{-1}$.
2. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ (2f)$.

387. Να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφη της είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

388. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως 2. Αφού βρείτε τον τύπο της f να βρείτε την f^{-1}.

389. Έστω f μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία των $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ -εφ' όσον υπάρχουν- ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

390. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

391. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\,|x+1|\,|x+2|\,|x+3|}$ είναι γνησίως αύξουσα.

392. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και η g είναι αύξουσα τότε η $g \circ f$ παρουσιάζει και αυτή ελάχιστο στο x_0. Τι θα συνέβαινε αν η g ήταν φθίνουσα; Μπορείτε «με το μάτι» να βρείτε το ελάχιστο της $w(x) = 2^{\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x}$;

393. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda(x-1)}, & x \neq 1 \\ \lambda, & x = 1 \end{cases}$$

Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η f είναι 1-1. Για αυτές τις τιμές να βρεθεί η f^{-1}.

394. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x) + f(x) + x = 0$$

Αφού αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 να βρείτε την αντίστροφη και το είδος μονοτονίας της f.

395. Μία συνάρτηση είναι 1-1. Μπορεί να είναι άρτια;

396. Μία συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη. Έχει μέγιστο; Ελάχιστο;

397.
1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό 2.

398. Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως μονότονες στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ και επομένως αντιστρέψιμες. Υποθέστε ότι έχετε μία αριθμομηχανή (κομπιουτεράκι) με το οποίο μπορείτε να βρίσκετε το $f^{-1}(x)$ για κάθε x. Πως θα βρείτε το $g^{-1}(\alpha)$;

399. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι είναι $1-1$. Κατόπιν να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα; Άλλη;

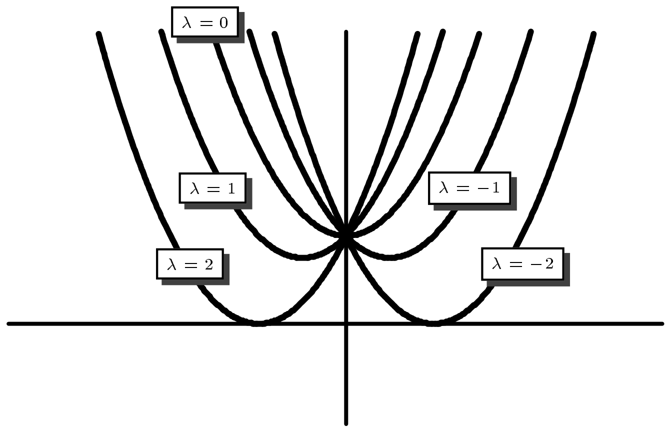
400. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$xf(x) + f(1-x) = x^2 + x + 3$$

για κάθε x. Να βρείτε την f.
Υποδειξη: Να θέσετε όπου x το $1-x$.

401. Για μία συνάρτηση f είναι γνωστό ότι τα σημείο της γραφικής της παράστασης της είναι τα σημεία $M\left(\frac{t+1}{t+2}, \frac{t+2}{t+3}\right)$, $t \neq 2, 3$. Να βρείτε την f.

402. Έστω η *οικογένεια συναρτήσεων* $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda x + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (Βλ. σχήμα).



1. Βρείτε συνάρτηση f_λ ώστε η $\mathcal{C}_\lambda$ να διέρχεται από το σημείο $M(1, \sqrt{2})$.
2. Υπάρχει άραγε συνάρτηση f_λ της παραπάνω οικογένειας που μέρος της γραφικής της παράστασης να βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

403. Μία συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε την εξίσωση

$$\varphi\left(x^2+4\right) = \varphi(4x)$$

404. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα».
2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2x^3 + x\right) = f(4-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

405. Έστω

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(-1, 1)$.
3. Να βρείτε την f^{-1}.

406. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για όλα τα x ισχύει:

$$x^3+x^2+3x+1\leq f(x)\leq x^4-x^3+2x^2+3x+1$$

Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$.

407. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1\neq x_2$ ισχύει

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=2\left(1+2\frac{x_1+x_2}{\sqrt{4x_1^2+1}+\sqrt{4x_2^2+1}}\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1\neq x_2$ ισχύει $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
4. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

408. Έστω $f:\Delta\to\mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση όπου το Δ είναι ένα *ανοικτό* διάστημα. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

409. Η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$ δεν έχει ελάχιστο. Γιατί;

410. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή το M τότε για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ θα ισχύει $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq M$.

411. Έστω ότι μία συνάρτηση είναι ορισμένη σε ανοικτό διάστημα και έχει μέγιστη τιμή. Να αποδείξετε ότι δε είναι μονότονη.

412. Για ποια τιμή του t οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{(2-t)x^2+2t}{x+3-t}$ και $g(x)=\frac{(2t-1)x^2+2}{x+2t}$ είναι ίσες;

413. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Έστω I η *ταυτοτική συνάρτηση* του $\mathbb{R}$ (δηλαδή $I(x)=x$ για όλα τα x).

1. Να αποδείξετε ότι αν $g\circ f=I$ τότε η f είναι $1-1$.
2. Να αποδείξετε ότι αν $f\circ g=I$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
3. Να αποδείξετε ότι αν $g\circ f=I$, $f\circ g=I$ τότε η f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη της είναι η g.

414. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι αντιστρέψιμες και ορίζεται η σύνθεση $g\circ f$ τότε και η $g\circ f$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

415. Έστω $f(x)=x^2-x+2$ και $h(x)=x(x-1)$. Να βρείτε συνάρτηση $g(x)=\alpha x+\beta$ τέτοια ώστε $g\circ f=h$.

416. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Έστω $\mathcal{C}$ η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, $\Delta(x_4, y_4)$ σημεία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουε ότι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB συμπίπτει με το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στην ευθεία που έχει εξίσωση $\beta + 3\alpha x = 0$.

1. Να αποδειχθεί ότι $x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4$

2. Να αποδειχθεί ότι το σημείο A συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.

417. Είναι άραγε το άθροισμα δύο αντιστρέψιμων συναρτήσεων αντιστρέψιμη συνάρτηση;

418. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \alpha$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

2.1.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

419. Είναι γνωστό και μπορείτε να το χρησιμοποιείτε ελεύθερα ότι αν ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζονται και οι $h \circ g$ και $(h \circ g) \circ f$ και μάλιστα ισχύει $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Προσπαθείστε δώσετε μία απόδειξη.

420. Έστω μία συνάρτηση f και A, B δύο μη κενά υποσύνολα του πεδίου ορισμού της. Να αποδείξευε ότι

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2. Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

Να δώσετε ένα παράδειγμα με το οποίο να φαίνεται ότι η ισότητα στο (β′) δεν ισχύει.

421. Για μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύει

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2 \quad \text{για όλα τα } x,\ y$$

Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή.

422. Από τα θέματα της Ολυμπιάδας APMO, 1989. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα.

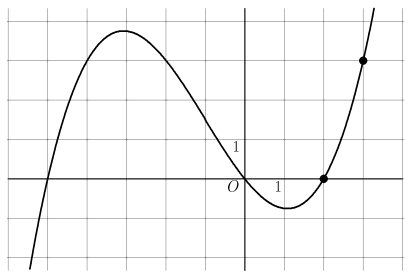
- $f(x) + g(x) = 2x$, όπου $g = f^{-1}$

2.2 Όρια Συναρτήσεων

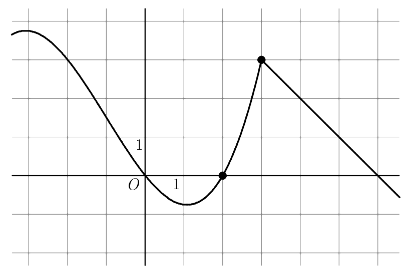
2.2.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

423. Στα επόμενα σχήματα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση να συμπληρώσετε τις ισότητες:

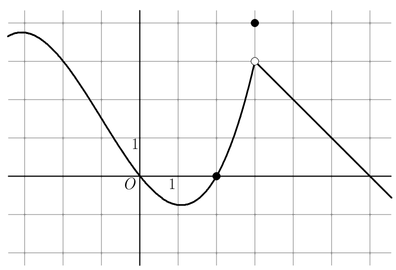
$$f(2) = ... \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ... \qquad f(3) = ... \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = ...$$



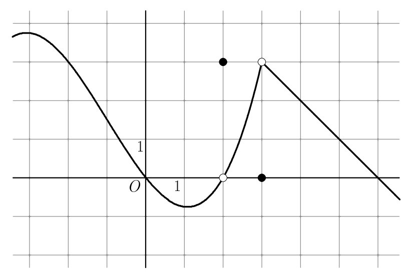
(α′)



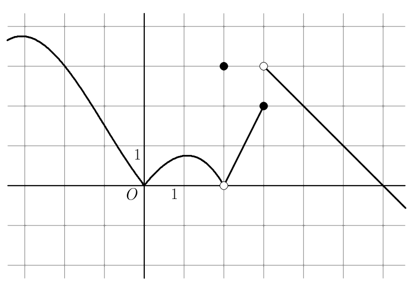
(β′)



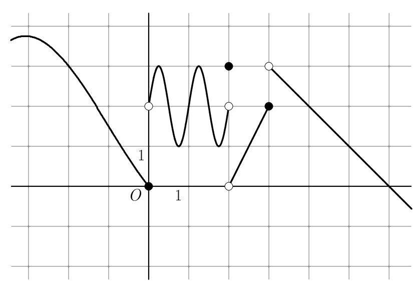
(γ′)



(δ′)



(ε′)

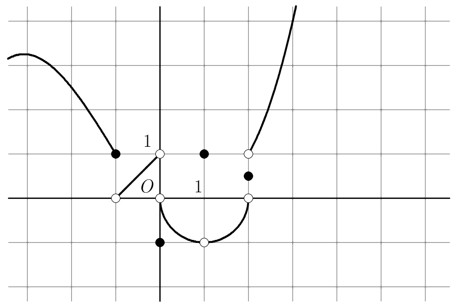


(ς′)

424. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\lim\limits_{x\to 2} x =$
2. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 =$
3. $\lim\limits_{x\to \alpha} \beta =$
4. $\lim\limits_{x\to \beta} \alpha$
5. $\lim\limits_{x\to \beta^+} \beta =$
6. $\lim\limits_{x\to \beta^-} (-\beta) =$
7. $\lim\limits_{u\to 2} u =$
8. $\lim\limits_{u\to v} u =$

425. Στο σχήμα που ακολουθεί υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.



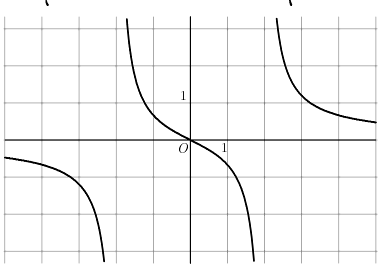
Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$
3. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$
4. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$
5. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$
7. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$
8. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

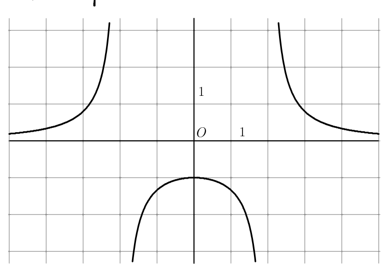
426. Στα σχήματα που ακολουθούν υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να βρείτε κάθε ένα από τα όρια

$$\lim_{x\to -2^-} f(x),\ \lim_{x\to -2^+} f(x),\ \lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

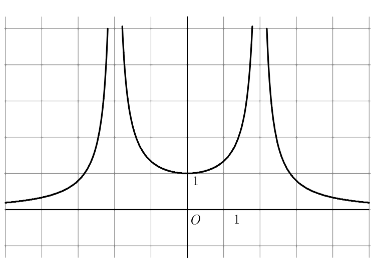
με δεδομένο ότι σε κάθε περίπτωση είναι $+\infty$ ή $-\infty$.



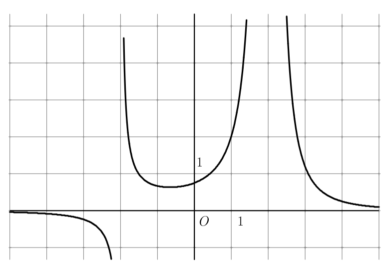
(α′)



(β′)



(γ′)



(δ′)

427. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)$
2. $\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)$
3. $\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2+1}$
4. $\lim_{x\to -1}\left(|x|+1\right)$
5. $\lim_{x\to \alpha}\left(|x|+1\right)$
6. $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+2}$

428. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$
4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}$
5. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$
6. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-4}$

429. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^4-x-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x-4+3|x|}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 3}\frac{x-\frac{9}{x}}{x^2-\frac{27}{x}}$
4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{|x+2|}$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{|4x-2|-|x+1|}{x^2-1}$
6. $\lim_{x\to 2}\frac{|2x+2|-|x+1|-3}{|x+3|-|3x-1|}$

430. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$
4. $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt{x}-2}$
5. $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
6. $\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{5+x}-1}{x^2+4x}$

431. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ και $\lim_{x\to 1}f(x)=0$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to 0}f(x+1)$
2. $\lim_{x\to 1}f(x-1)$
3. $\lim_{x\to 0}f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to 1}f\left((x-1)e^x\right)$
5. $\lim_{x\to 1}f\left(x^x\right)$
6. $\lim_{x\to 0}\ln\left(f(x)\right)$

432. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to x_0}f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $f(x)=\begin{cases} x\ , & x<0\\ x^2\ , & x\geq 0\end{cases}$ όταν $x_0=2$
2. $f(x)=\begin{cases} x+1\ , & x\leq 1\\ \frac{x^2-2}{x+1}\ , & x>1\end{cases}$ όταν $x_0=2$
3. $f(x)=\begin{cases} x\ , & |x|\leq 1\\ x+1\ , & |x|\geq 2\end{cases}$ όταν $x_0=-4$
4. $f(x)=\begin{cases} x-2\ , & x\leq 2\\ x+2\ , & x>2\end{cases}$ όταν $x_0=e$

433. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$
2. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
5. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$

434. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{x^4-5x^2+6}{x^4-9}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\varphi(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(\sqrt{x})$
3. $\lim\limits_{x\to 1-\sqrt{3}}\varphi(1-x)$

435. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1}{x-8}=$
2. $\lim\limits_{x\to 6^-}\frac{1}{x-8}=$
3. $\lim\limits_{x\to 7^-}\frac{1}{x-8}=$
4. $\lim\limits_{x\to 8^-}\frac{1}{x-8}=$
5. $\lim\limits_{x\to 9^-}\frac{1}{x-8}=$
6. $\lim\limits_{x\to 7^+}\frac{1}{x-8}=$
7. $\lim\limits_{x\to 8^+}\frac{1}{x-8}=$
8. $\lim\limits_{x\to 9^+}\frac{1}{x-8}=$

436. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{2x-4}$
3. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{x^2-4}$
4. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{x^4-16}$
5. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{8-x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{x^2-3x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x+2}{2-x}$

437. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{1}{x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{x^2-9}$
4. $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{1}{x^3+27}$
5. $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{x^2+x-6}$
6. $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{-3x-x^2}$

438. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+7}{x^3+x^2-5x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to -3+}\frac{7+x^3}{x^3+x^2-5x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to -3-}\frac{|x-1|+x}{x+3}$

5. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\left|x^2-3x\right|+x}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to -2+} \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$

439. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+3) =$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} =$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-9\right) =$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} =$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (3-2x) =$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{3-2x} =$

440. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{x+1} =$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2^x+1} =$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-x^2\right) =$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,(x-3) =$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2-x)\sqrt{x+4} =$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x$

441. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^2+1\right)$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(x^4+1\right)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (|x+1|-3)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (|x+1|-|x-1|)$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2^x+x)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+|-x+1|)$

442. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x+5^x}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x+5^x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{|x-1|+x}{x+3}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\left|x^2-3x\right|+x}{x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

443. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^4+4x+3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να βρείτε τα όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (β′) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (γ′) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ (δ′) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

(ε′) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ (ϛ′) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (ζ′) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ (η′) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

(ϑ′) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (ι′) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (ια′) $\lim\limits_{x\to e} f(x)$ (ιβ′) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

444. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
2. $\lim\limits_{y\to 3} f(y)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(-x)$
4. $\lim\limits_{x\to 2} f(f(x))$
5. $f\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x+y)$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\lim\limits_{y\to 3} f(x+y)\right)$
8. $\lim\limits_{y\to 3}\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x+y)\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\lim\limits_{x\to 3} f(x+y)\right)$
10. $\lim\limits_{t\to 2}\left(\lim\limits_{x\to t} f(x)\right)$

445. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + px + q & x \le 1 \\ \frac{\sqrt{x^2+3} - p + 1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα p, q έτσι ώστε η f να έχει όριο στο 1.

446. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & \alpha\nu \;\; x < 1 \\ 3x & \alpha\nu \;\; x \ge 1 \end{cases}$$

(A) Να βρείτε το όριο της f όταν το x τείνει:

1. στο 5
2. στο 6 από μικρότερες τιμές
3. στο $+\infty$
4. στο $-\infty$
5. στο 1 από μεγαλύτερες τιμές
6. στο 1 από μικρότερες τιμές
7. στο 1
8. στο $\sqrt{m^2+1}$

(B) Να βρείτε για ποια πραγματική τιμή του α το όριο της f στο α είναι:

1. 4
2. α^2

447. Από τις εξετάσεις του 1978, Πολυτεχνικός και Φυσικομαθηματικός κύκλος. Να βρείτε, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες, το όριο της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{x^2-3x+20}{3x-4}$ όταν $x \to 3$.

448. Από τις εξετάσεις του 1984, Δέσμη IV. Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x με $\psi(x) = \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5} \psi(x)$.

449. Να βρείτε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2 - 7x + 9\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3x^8 + 3x^2 + 6x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-9x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\left(x^2-3\right)}{2x^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-5x^4}{x^3-9x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5x^2 - x + 1}$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^4 - x^3 + 1}$

450. Να βρείτε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|x^3 - 3x + 2\right|$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x^2\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\left|x^3 - 1\right| + x^2 + 1\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+|1-x|}{2x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3\sqrt{x^2+1}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-|x+1|}{\sqrt{1-x}}$

2.2.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

451. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to\sigma} |\varphi(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} \varphi(x) = 0$.

452. Για τις συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x\to\sigma} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to\sigma} |f(x) - g(x)| = 0$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = \alpha$.

453. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \leq 0 \leq g(x)$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\sigma} |f(x) - g(x)| = 0$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$.

454. Αν $\kappa > \lambda > 0$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\kappa^x - \lambda^x}{\kappa^x + \lambda^x}$.

455. Για μία άρτια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Ποιό είναι το $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f(-x))$;

456. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)\right) = 0$ τότε:

1. $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$
2. $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) - \alpha x^2}{x}$
3. $\gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(\alpha x^2 + \beta x\right)\right)$

457. Για τις συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to\sigma} (f(x) + g(x)) = p \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to\sigma} (f(x)\, g(x)) = s \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\sigma} \left(f^2(x) + g^2(x)\right) = p^2 - 2s$$

458. Να αποδείξετε ότι αν για την συνάρτηση $f(x)$ για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left(f(x) - \frac{\eta\mu x}{x}\right)\left(f(x) - \frac{\eta\mu 2x}{2x}\right) \leq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

459. Για ποιές τιμές των λ, μ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\lambda - 3\mu)x^2 + 4x + 1}{(\lambda + \mu)x + 5} = 1$;

460. Να λύσετε την εξίσωση $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\eta\mu\alpha}{\sqrt{\alpha + x^2} - x} = 2$.

461. Για την συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\eta\mu x + \alpha x \leq x\varphi(x) \leq x^4 + (\alpha + 1)\, x$$

για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \alpha + 1$.

462. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} (x + 1)\, f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)$.

463. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}}}$$

464. Από τις εξετάσεις του 1987, Δέσμη Ι. Στις εξετάσεις εκείνης της χρονιάς τέθηκε το εξής ζήτημα:

Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) *με*

$$\alpha_\nu = \left(\sqrt{7\nu^4 + 6\nu + 5} - \sqrt{7\nu^4 + 3\nu + 3}\right)\sqrt{63\nu^2 - 5\nu + 20}$$

Να απαντήσετε το αντίστοιχο ερώτημα για συναρτήσεις δηλαδή:

Να βρείτε το όριο για $x \to +\infty$ της συνάρτησης

$$f(x) = \left(\sqrt{7x^4 + 6x + 5} - \sqrt{7x^4 + 3x + 3}\right)\sqrt{63x^2 - 5x + 20}$$

465. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{\frac{x+1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}}$$

466. Για μία πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι γνωστό ότι:

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -4$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+\alpha} = 2$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{x+\alpha} = \beta \neq 0$

Να βρέιτε την f και τους αριθμούς α, β.

467. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x + 3^{x+1}}$$

468. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-3} + \mu x\right)$

469. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 \ , & x < 1 \\ 3x \ , & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Να βρείτε τα όρια της f όταν το x τείνει:

(α') στο 5
(β') στο 6 από μικρότερες τιμές
(γ') στο $+\infty$
(δ') στο $-\infty$
(ε') στο 1 από μεγαλύτερες τιμές
(ϛ') στο 1 από μικρότερες τιμές
(ζ') στο 1

2. Να βρείτε για ποια πραγματική τιμή του α το όριο της f στο α είναι:

   (α') 1
   (β') $5 - \frac{\alpha}{2}$

470. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \mu x \right)$$

471. Να βρείτε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\left|x^2+x+1\right|}{x+\left|(1-2x)(x+2)\right|}$

472. Αν $\kappa > \lambda > \mu > 1$ ποιο είναι το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\kappa^x - \lambda^x - \mu^x \right)$

473. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} - x \quad \text{όπου} \quad \alpha < \beta$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

2. Να βρείτε τα όρια:

   (α') $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   (β') $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   (γ') $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x)$
   (δ') $\lim\limits_{x \to \beta^+} f(x)$
   (ε') $\lim\limits_{x \to \frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)$
   (ϛ') $\lim\limits_{x \to |\beta|} f(x)$
   (ζ') $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + f(-x) \right)$
   (η') $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| f(x) \right|$

474. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$$

1. Να βρείτε το όριο της f για $x \to 0$.

2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι μονότονη σε κανένα από τα διαστήματα $(0, h)$ με $h > 0$.

475. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 1 + x^2$ και $h(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε αν υπάρχουν τιμές του λ ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \lambda}{h(x)} = 0$$

476. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x^3 + \eta\mu^3 x + x + \eta\mu x\right)$$

477. Για την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $\left|\left(1 + x^2\right) f(x) + x^2\right| \leq x$ για όλα τα x. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

478. Έστω μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα (σ_1, σ_2) και $P(\alpha, \beta)$ ένα σημείο του επιπέδου. Σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ της $\mathcal{C}_f$ αντιστοιχούμε την απόσταση του $d(x)$ από το P.

1. Να αποδείξετε ότι αν $\sigma_2 = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to \sigma_2} d(x) = +\infty$
2. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to \sigma_2} d(x) = +\infty$ είναι άραγε $\sigma_2 = +\infty$;

479. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{y\to +\infty} \frac{\left(x^2 + 1\right) y^3 + x^2 y^2 + \left(x^3 + x\right) y + x^3 + x}{x y^3 + x^4 x^2 + 1}$$

Να αποδείξετε ότι είναι ίση με την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

480. Αν

$$\lim_{x\to 0} f(x) = t^2 - 2t$$

και

$$\lim_{x\to 0} f(\eta\mu x) = t - 2$$

ποιος μπορεί να είναι ο t;

481. Να βρείτε για ποιές τιμές των α, β ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 1} - \alpha x - \beta\right) = 0$$

2.2.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

482. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^\nu - 1)\left(x^{\nu+1} - 1\right)\left(x^{\nu+2} - 1\right)\ldots\left(x^{\nu+k-1} - 1\right)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots\left(x^k - 1\right)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[\mu]{x+\alpha} - \sqrt[\mu]{\alpha - x}}{\sqrt[\nu]{x+\alpha} - \sqrt[\nu]{\alpha - x}}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^{\mu}-1)^2-(x^{\mu}-1)(x^{\nu}-1)+(x^{\nu}-1)^2}{(x^{\mu}-1)^2+(x^{\mu}-1)(x^{\nu}-1)+(x^{\nu}-1)^2}$

483. Έστω

$$P(x) = x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$Q(x) = x^{\nu} + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \beta_{\nu-2}x^{\nu-2} + ... + \beta_1 x + \beta_0$$

και έστω ακόμη

$$H(x) = \sqrt[\nu]{P(x)} - \sqrt[\nu]{Q(x)}$$

1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης H περιέχει κάποιο διάστημα της μορφής $(r, +\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} H(x) = \frac{\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}}{\nu}$$

484. Στην άσκηση αυτή θα αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $\sigma\upsilon\nu$, $\eta\mu$ και $\varepsilon\varphi$ δεν έχουν όριο για $x \to +\infty$ και για $x \to -\infty$. Έστω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του x ισχύει:

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1 = 1 - 2f^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει όριο L για $x \to +\infty$ τότε το L θα είναι πραγματικός αριθμός και

$$L = 2L^2 - 1 = 1 - 2L^2$$

3. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο για $x \to +\infty$.

4. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο για $x \to -\infty$.

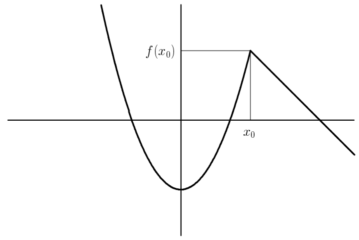
5. Να αποδείξετε ότι η $\eta\mu$ δεν έχει όριο για $x \to +\infty$ ή για $x \to -\infty$.

6. Με την βοήθεια της, γνωστής, σχέσης $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ να αποδείξετε ότι η $\varepsilon\varphi$ δεν έχει όριο για $x \to +\infty$ ή για $x \to -\infty$.

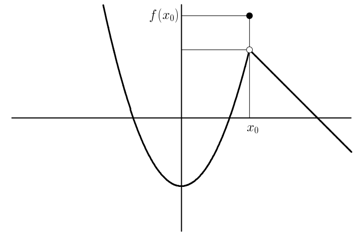
2.3 Συνέχεια Συναρτήσεων

2.3.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

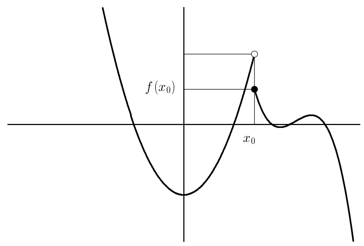
485. Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0;



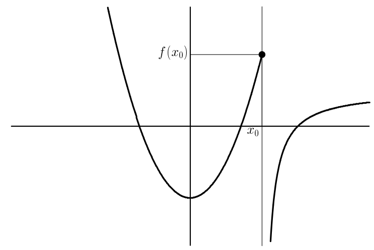
(α′)



(β′)



(γ′)



(δ′)

486. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι:

- Είναι συνεχής στο 2
- $f(2) = 3$

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(f\left(x\right)+x\right) =$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(xf\left(x\right)\right) =$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(f^2\left(x\right)-9\right) =$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{f(x)-3} =$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{f\left(x\right)} =$
6. $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x+1\right) =$
7. $\lim\limits_{x\to 4}\left(f\left(x-2\right)+x\right) =$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{f(x)+x}{f(x^2-2)-x}\right) =$

487. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 με $f(x_0) = 6$. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2f(x)+3}{3f(x)+2}$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5|f(x)|+1}{|f(x)-1|+1}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f(x))^3-216}{(f(x))^2-36}$

488. Να εξετάσετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , & x < 0 \\ x+2 \ , & x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , & x < -1 \\ x+3 \ , & x \geq -1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , & x < -1 \\ x^3+1 \ , & x \geq -1 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , & x \leq -1 \\ x^3+1 \ , & x \geq 1 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , & x \leq -1 \\ 2(x+2) & -1 < x < 1 \\ x^3+1 \ , & x \geq 1 \end{cases}$

489. Στις επόμενες περιπτώσεις να βρείτε αν υπάρχει τιμή του α η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \ , & x \neq 1 \\ \alpha \ , & x = 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-1} \ , & x \neq 1 \\ \alpha \ , & x = 1 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \alpha x+1 & x \neq 1 \\ 7 \ , & x = 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x+1 \ , & x < 1 \\ \alpha \ , & x = 1 \\ x+2 \ , & x > 1 \end{cases}$

490. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς;

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ , & 0 \leq x < 1 \\ x \ , & x \geq 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ , & 0 \leq x < 1 \\ x \ , & x > 1 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ , & 0 \leq x < 1 \\ x \ , & x \geq 2 \end{cases}$

491. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3} \ , & x < 3 \\ 1 \ , & x = 3 \\ 2x-5 \ , & x > 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

492. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέσμη IV. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-9x+2}{x-2} & \alpha\nu \ \ x \in \mathbb{R} \backslash \{2\} \\ 7 & \alpha\nu \ \ x = 2 \end{cases}$ στη θέση $x_0 = 2$
2. $g(x) = \begin{cases} x & \alpha\nu \ \ x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ στη θέση $x_0 = 0$

493. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο x_0 και ότι $f(x_0) = 18$. Να υπολογίσετε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+13)$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{x_0 x+13}{x+18}\right)$

3. $\lim\limits_{h\to 1}\frac{f(x_0 h)}{f\left(\frac{x_0}{h}\right)}$

494. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f+3g$, $3f+g$ είναι συνεχείς. Να αποδείξετε ότι και η $5f+2g$ είναι συνεχής.

Υποδειξη: Αν ονομάσουμε $f+3g=h$, $3f+g=s$ τότε $f=\frac{3}{8}s-\frac{1}{8}h$, $g=-\frac{1}{8}s+\frac{3}{8}h$ κ.τ.λ.

495. Να αποδείξετε ότι αν οι f, $f+g$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η g είναι συνεχής στο x_0.

496. Από τις εξετάσεις του 1986, Δέσμη I. Να προσδιορίσετε τα α,β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 3\alpha e^{x+1}+x & \alpha\nu \quad x\le -1\\ 2x^2-\alpha x+3\beta & \alpha\nu \quad -1<x<0\\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & \alpha\nu \quad 0\le x\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

497. Από τις εξετάσεις του 1989, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3}+1 & , \quad 0<x\le 2\\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} & , \quad x>2\end{cases}$$

Να προσδιοριστεί το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

498. Από τις εξετάσεις του 1980.

1. Δινεται η συνάρτηση f που ορίζει ο τύπος $f(x)=\frac{|x|(x-1)}{x}$ γαι κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και είναι $f(0)=1$. Να εξεταστεί αν είναι συνεχής και να γίνει το γράφημα [1] της.

2. Να βρεθεί το όριο της συναρτήσεως $y=-x+\sqrt{x^2+2x+3}$ όταν $x\to +\infty$.

2.3.2 B′ ΟΜΑΔΑ

499. Οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=s\neq 0$$

Να εξετάσετε αν μπορεί η f να είναι συνεχής στο x_0.

[1] εννοεί γραφική παράσταση

500. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο α τότε

$$\lim_{h\to 0}\left(f\left(\alpha+h\right)-f\left(\alpha-h\right)\right)=0$$

501. Έστω μία συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ και ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι αν για δύο οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ο λόγος μεταβολής της f:

$$\lambda=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$$

στα x_1,x_2 ανήκει στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι συνεχής.

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
1832-1903

502. Από τις εξετάσεις του 1979, Πολυτεχνικός και Φυσικομαθηματικός κύκλος. Να εξετάσετε άν η συνάρτηση φ που δίνεται από τον τύπο $\varphi\left(x\right)=x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, αν $x\neq 0$ και $\varphi\left(0\right)=0$, είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

503. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ικανοποιεί μία συνθήκη του:

Lipschitz αν υπάρχει θετικός αριθμός c έτσι ώστε να ισχύει:

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq c\left|x_1-x_2\right|$$

για όλα τα x_1,x_2.

Otto Ludwig Hölder
1859-1937

Hölder αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί c και α έτσι ώστε να ισχύει:

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq c\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}$$

για όλα τα x_1,x_2

Να αποδείξετε ότι αν η f ικανοποιεί μία από τις παραπάνω συνθήκες είναι συνεχής. Αν κάνατε δύο αποδείξεις μειώστε τες σε μία κοιτώντας ποια από τις δύο συνθήκες είναι πιο γενική. [2]

504. Για την συνάρτηση φ είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{\varphi(x)-\alpha}{\varphi(x)+\alpha}=0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\sigma}\varphi\left(x\right)=\alpha$.

505. Να δώσετε ένα παράδειγμα ασυνεχών συναρτήσεων με άθροισμα συνεχή συνάρτηση.

506. Έστω $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής στο x_0. Έστω ακόμη μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν ισχύει

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\left|\Phi\left(x\right)-\Phi\left(y\right)\right|\quad \text{για κάθε } x,\ y$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής (δείτε και την άσκηση 503).

[2] Αν στη συνθήκη του Hölder το α γίνει μεγαλύτερο του 1 η f είναι σταθερή. Αυτό θα απόδειχθεί εύκολα στο κεφάλαιο των Παραγώγων και, ουσιαστικά, είναι η άσκηση B1 σελίδα 257 του σχολικού βιβλίου. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί, πιο δύσκολα, να αποδειχθεί και χωρίς τη χρήση των παραγώγων. Πρόκειται για την άσκηση 421 της Γ' Ομάδας

507. 1. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$ ώστε:

- οι f, g είναι συνεχείς
- $f(x) \leq g(x)$
- $f(x_0) = g(x_0)$

Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση h για την οποία ισχύει

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

είναι συνεχής στο x_0

2. Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής στο x_0 στις ακόλουθες περιπτώσεις

(α′) $-\left|x^2 - 1\right| + 1 \leq h(x) \leq (x-1)^2 + 1$ όταν $x_0 = 1$

(β′) $1 - |x| \leq h(x) \leq e^x$ όταν $x_0 = 0$

508. Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\ \beta)$ τότε ισχύει $f(\beta) \geq 0$.

509. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι συνεχής στο 0 τότε ειναι συνεχής.

2. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x) f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι συνεχής στο 0 τότε ειναι συνεχής.

3. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x) f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι συνεχής στο 1 τότε ειναι συνεχής.

4. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι συνεχής στο 1 τότε ειναι συνεχής.

510. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σε ένα διάστημα και συνεχείς τότε οί συναρτήσεις $m(x) = \min(f(x), g(x))$ και $M(x) = \max(f(x), g(x))$ είναι συνεχείς.

511. Έστω η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda = 0$ με άγνωστο το x και η συνάρτηση

$$g(\lambda) = \text{ η μικρότερη ρίζα της } \quad x^2 + \lambda x + \lambda = 0$$

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής.

512. Αν η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής και η g είναι συνεχής είναι η f συνεχής;

513. Από τις εξετάσεις του 2000, Τεχνολογική Κατεύθυνση . Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x} & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

2. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$

3. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος (β′) να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

514. Έστω μία γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Μπορεί άραγε να ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$;

515. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, $x_0 \in \Delta$ και $d(x)$ ή απόσταση του τυχόντος σημείου $M(x, f(x))$ της $\mathcal{C}_f$ από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0} d(x) = 0$.

2.3.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

516. Η συνάρτηση του ακεραίου μέρους. Σε κάθε αριθμό x αντιστοιχούμε[3] τον μεγαλύτερο από τους ακεραίους που δεν υπερβαίνουν τον x. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $[x]$ και ονομάζεται *ακέραιο μέρος του* x. Δηλαδή:

$$\boxed{[\,x\,]=\text{ο μεγαλύτερος από τους ακεραίους } m \text{ με } m \leq x}$$

1. Βεβαιωθείτε ότι από τον ορισμό προκύπτει: $[3] = 3,\ [3,4] = 3,\ [2,8] = 2,\ [-2,8] = -4$

2. Να αποδείξετε ότι $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$

3. Έστω $f(x) = [x]$

   (α′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\ldots, [-3, -2), [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2), \ldots$

   (β′) Να αποδείξετε ότι η f είναι αύξουσα.

   (γ′) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλους τους αριθμούς εκτός από τους ακεραίους.

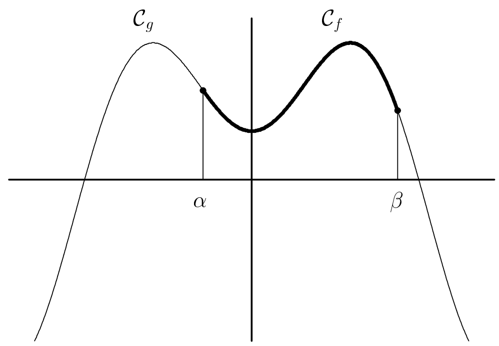
   (δ′) Να κάνετε την γραφική παράσταση της f.

4. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x[x]$, $x \in [0, 3]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

[3] Αποδεικνύεται ότι ένας τέτοιος αριθμός υπάρχει

517. Έστω $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $f : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(x) = f(x) \quad \text{για όλα τα } x, y \in \Delta$$



Στη συνέχεια να αποδείξετε με ένα παράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν $\Delta = (\alpha, \beta]$.

2.4 Συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα

2.4.1 Α΄ ΟΜΑΔΑ

518. Να αποδείξετε στις παρακάτω περιπτώσεις ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ

1. $f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x$, $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
2. $f(x) = x + \eta\mu x + e^x$, $\Delta = (-\pi, \pi)$
3. $f(x) = x + \ln x - \sqrt{x}$, $\Delta = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. $f(x) = x^5 + \ln x + 1$, $\Delta = \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$

519. Να αποδείξετε ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ.

1. $f(x) = x^3 + x - 3$ στο $\Delta = (0, 2)$
2. $f(x) = x^3 + \eta\mu x - 3$ στο $\Delta = (0, \pi)$
3. $f(x) = 2^x + x$ στο $\Delta = (-1, 1)$
4. $f(x) = x^2(2^x + x)$ στο $\Delta = (-1, 1)$
5. $f(x) = \left(x^3 - 1\right)\ln\left(x^2 + 1\right)$ στο $\Delta = (-1, 2)$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} - e^x$ στο $\Delta = (-1, 1)$

520. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $17x^2 - 19 = \frac{1}{x^5}$ έχει μία τουλάχιστον λύση μεταξύ -1 και 0.

521. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - e^x + 1$. Είναι, προφανώς $f(0) = 0$ και $f(3) = 10 - e^3$. Με βάση αυτά τα δεδομένα να αποδείξετε ότι ο αριθμός -10 είναι τιμή της f.

522. Για μία συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f(1) + f(2) = 0$. Δέιξτε ότι θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

523. Οι ρίζες της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 48$ είναι οι αριθμοί $-2, 2, 3, 4$. Τι πρόσημο έχει στο διάστημα $(-2, 2)$;

524. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

1. $e^x = \frac{1}{x+1}$
2. $\ln x = 1 - x$
3. $x^3 + \eta\mu x = 2^{-x}$

525. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln(x+2) = 4x - 1$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, e-2)$.

526. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Υποδειξη: Εργασθείτε στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

527. Να αποδέίξετε ότι η εξίσωση $x^4 + (t^2 - 2)x^2 + (t-1)x - t^2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

Υποδειξη: Την περίπτωση $t = 0$ να την εξετάσετε χωριστά.

528. Μπορεί άραγε μία, μη σταθερή, συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ να παίρνει μόνο τις τιμές 2, 3; Μόνο τις 1, 2, 3; Μόνο ακέραιες τιμές;

529. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$f(x) =$	$\Delta =$	$f(\Delta) =$
$x+1$	$[3, 7]$	
x^2	$[2, 5]$	
x^2	$[-4, -1]$	
$\eta\mu x$	$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$	
$\ln x$	$[1, e^2)$	
$\frac{1}{x}$	$(2, 3]$	
$\frac{1}{x}$	$(0, 1]$	

2.4.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

530. Να αποδείξετε στις παρακάτω περιπτώσεις ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ

1. $f(x) = x^5 + \eta\mu x + 1$, $\Delta = (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \frac{x^3+\kappa x+\lambda}{x^2+1}$, $\Delta = (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \varepsilon\varphi x + \ln\left(x^2+1\right)$, $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
4. $f(x) = \frac{1}{x^3-\alpha^3} + \frac{1}{x^3-\beta^3}$, $\Delta = (\alpha, \beta)$

531. Έστω οι αριθμοί p, q, r με $0 < p < r < q$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $p\eta\mu x + q\sigma\upsilon\nu x = r$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

532. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

533. Για την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι έχει μοναδική ρίζα το α και ότι $f\left(\frac{a^2+1}{2}\right) > 0$. Δείξτε ότι $f(a+1) > 0$.

534. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $(f(\alpha) - f(\gamma))(f(\beta) - f(\gamma)) > 0$.

1. Να κάνετε μερικά σχέδια για το πως περίπου θα είναι η γραφική παράσταση της f.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί ένας μικρότερος του γ και ένας μεγαλύτερος του γ στους οποίους η f παίρνει ίσες τιμές.

535. Μία συνεχής συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο $[\alpha,\ \beta]$ και οι τιμές της στα $\alpha,\ \beta$ είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2 - 1972t - 1953 = 0$. Να αποδείξετε ότι η φ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\ \beta)$

536. Έστω $\alpha < \beta$ δύο πραγματικοί αριθμοί και μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν έχει ρίζες. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (x-\alpha) f(x-\alpha) + (x-\beta) f(x-\beta)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

537. Έστω ένα το διάστημα $[\alpha, \beta]$ και μία συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, και $kf(\alpha) + (1-k) f(\beta)$ με $k \in [0, 1]$ βρίσκονται μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$
2. Να αποδείξετε ότι οι οι εξισώσεις

   (α′) $f(x) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

(β΄) $f(x) = kf(\alpha) + (1-k)f(\beta)\,,\ \ k \in [0,1]$ έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$

538. Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 1. Να αποδείξετε ότι αν για μία συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ισχύει $P \circ f = 0$ τότε η f είναι σταθερή.

539. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί $c_1, c_2, ..., c_\nu$ και $t_1 < t_2 < ... < t_\nu$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{c_1}{x-t_1} + \frac{c_2}{x-t_2} + ... + \frac{c_\nu}{x-t_\nu} = 0$$

έχει ακριβώς $\nu-1$ λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(t_1, t_2), ..., (t_{\nu-1}, t_\nu)$.

540. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. και οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ που ανήκουν στο Δ

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha \in \Delta$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(\alpha) = \frac{f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + ... + f(\alpha_\nu)}{\nu}$$

2. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η f παίρνει μη αρνητικές τιμές. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha \in \Delta$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(\alpha) = \sqrt[\nu]{f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) \cdot ... \cdot f(\alpha_\nu)}$$

541. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

1. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε φορολογητέο εισόδημα τον φόρο που αναλογεί.

2. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο βάρος ενός ταχυδρομικού δέματος το αναλογούν τέλος.

542. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$f^2(x) + f(x) = x^2 + x + 1$$

Να βρεθεί η f στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

543. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $k > 0$, $k \neq 1$. Να αποδείξετε ότι αν $k^{f(\alpha)} = \left(\frac{1}{k}\right)^{f(\beta)}$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

544. Έστω $f : (\sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν

- $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty$ και
- $\lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$

τότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

545. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν οι γραφικές παραστάσεις τους δεν έχουν κοινό σημείο ή η $\mathcal{C}_f$ θα είναι πάνω από την $\mathcal{C}_g$ είτε η $\mathcal{C}_g$ θα είναι πάνω από την $\mathcal{C}_f$.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer 1881-1966

546. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha) \le \alpha$ και $f(\beta) \ge \beta$. Να αποδέιξετε ότι υπάρχει $x \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x) = x$.

547. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.Έστω $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\delta = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in [0, \delta]$ ώστε $f(x+\alpha) = f(x+\gamma)$

548. Το Θεώρημα του Brouwer. Να αποδείξετε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f από ένα κλειστό διάστημα Δ στον εαυτό του έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο x του Δ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = x$.

549.

1. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Ισχύει προφανώς $f(x) > 0$ για κάθε x. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετικός c τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) > c$ γιά όλα τα x.
2. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι υπάρχει υπάρχει θετικός c τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) > c$ γιά όλα τα x.

550. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (\lambda x)^3 + \lambda x + 1 & x < 1 \\ (\lambda x)^5 + 3 & x \ge 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής.

551. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε

$$f(\xi) = \frac{|\alpha| + 1}{\xi - \alpha} + \frac{|\beta| + 1}{\xi - \beta}$$

552. Για τη συνεχή συνάρτηση $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$\ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln 2 + f(x)$$

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

553. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον 1 και f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ εκ των οποίων η g είναι συνεχής τέτοιες ώστε

$$f = P \circ g$$

Να αποδείξετε

1. Η f είναι συνεχής
2. Αν η εξίσωση $f(x) = P(0)$ δεν έχει λύση τότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο

554. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $f(x)$, $g(x)$ να είναι ετερόσημοι.

1. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ δεν έχουν κοινά σημεία.
2. Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x_0 είναι $f(x_0) > g(x_0)$ τότε θα είναι και $f(x) > g(x)$ για όλα τα x (δείτε και την άσκηση 545).
3. Έστω ότι υπάρχουν α, β έτσι ώστε $f(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$. Αφού δείξετε ότι τα α, β είναι διάφορα να δείξετε ότι υπάρχει γ μεταξύ τους έτσι ώστε να ισχύει:
$$f(\gamma) + g(\gamma) = \gamma$$

2.4.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

555. Έστω Δ ένα διάστημα και f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο Δ.

1. Να αποδείξετε ότι αν για κάποια $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f(\gamma) < f(\beta)$ τότε η f δεν είναι 1-1.
2. Να καταλήξετε ίδιο συμπέρασμα με του (α′) και για την περίπτωση που ισχύει $f(\alpha) > f(\beta)$ και $f(\gamma) > f(\beta)$.
3. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως αύξουσα.

Peter Gustav Lejeuene Dirichlet
1805-1859

556. Στην άσκηση αυτή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως δεδομένη των ακόλουθη πρόταση:

• *Μεταξύ δύο διάφορων πραγματικών υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός.*

Εστω μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ τέτοια ώστε γιά να ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε ρητό αριθμό του διαστήματος Δ.

1. Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f(x_0) \neq 0$ τότε $x_0 \notin \mathbb{Q}$.
2. Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f(x_0) \neq 0$ τότε υπάρχει διάστημα I που περιέχει το x_0 και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I \cap \Delta$
3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in \Delta$.

Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο για να αποδείξετε ότι :

1. Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα παίρνουν ίσες τιμές στους ρητούς αυτού του διαστήματος τότε είναι ίσες.

2. **Η συνάρτηση του Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής.

3. **Το πρόβλημα του Cauchy.** Οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για όλα τα } x, y$$

είναι (δείτε και την άσκηση 358) οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = \alpha x$$

4. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x+y) = f(x) f(y) \quad \text{για όλα τα } x, y$$

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

557. Έστω μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και τέτοια ώστε τα όρια της στα άκρα του Δ να είναι $+\infty$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

558. Από τα Θέματα της 11ης Ολυμπιάδας ΕΣΣΔ, 1977. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$x^{10} + *x^9 + *x^8 + ... + *x^2 + *x + 1$$

Δύο άτομα παίζουν το παρακάτω παιχνίδι. Ο πρώτος αντικαθιστά οποιονδήποτε από τους αστερίσκους με κάποιον αριθμό, κατόπιν ο δεύτερος αντικαθιστά με κάποιον αριθμό οποιονδήποτε από τους υπόλοιπους αστερίσκους, ύστερα ο πρώτος αντικαθιστά έναν από τους αστερίσκους με αριθμό κ.ο.κ (Συνολικά 9 κινήσεις). Αν το πολυώνυμο που προκύπτει δεν έχει πραγματικές ρίζες κερδίζει ο πρώτος παίκτης. Αν έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα κερδίζει ο δεύτερος. Μπορεί να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ανεξάρτητα από τον τρόπο παιχνιδιού του πρώτου;

Stefan Banach
1892-1945

559. Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz (δείτε άσκηση 503) με σταθερά μικρότερη του 1 δηλαδή υπάρχει θετικός αριθμός $c < 1$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c\,|x_1 - x_2|$$

για όλα τα x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μία λύση.

2.5 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

560. Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\ x_0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_0,\ \beta]$. Είναι άραγε το $f(x_0)$ μέγιστο της f;

561. Για την συνάρτηση f ισχύει

$$\left(f\left(x\right)-x^8-x^6\right)\left(f\left(x\right)-x^4-x^2\right)\leq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f\left(x\right)+1}-\sqrt{f\left(x\right)}\right)$

562. Βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x 2$.

563. Θεωρούμε τους αριθμούς α και $\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_\nu$ και τη συνάρτηση $\varphi\left(x\right)=\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)...\left(x-\alpha_\nu\right)+\alpha$. Δείξτε ότι δεν είναι 1-1.

564. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=\frac{(1+x^2)x}{|x|}$, $x\neq 0$ και $f\left(0\right)=0$ είναι ασυνεχής και αντιστρέψιμη. Δείξτε ότι η αντίστροφή της είναι συνεχής.

565. Για μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $\alpha<\beta$ ισχύει $f\left([\alpha,\beta]\right)\subseteq[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=x$ για όλα τα x.

566. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{x+\alpha}{x-\alpha}$ με $\alpha\neq 1$. Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ f\circ f$.

567. Για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισού το $\mathbb{R}$ ισχύει $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)-x=0$ για κάθε x. Αφού αποδείξετε ότι για κάθε $x_1\neq x_2$ ισχύει

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\frac{\left|x_1-x_2\right|}{\left|f^2\left(x_1\right)+f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)+f^2\left(x_2\right)+1\right|}$$

δείξτε κατόπιν ότι είναι συνεχής.

568. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $g\circ f$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Ισχύει άραγε το προηγούμενο αν αντί για «σύνολο τιμών» είχαμε «πεδίο ορισμού»;

569. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$$

570. Έστω $y = f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x-\alpha}$. Δείξτε ότι $x = f(y)$.

571. Για ποιές τιμές του a ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a+1}{2a-2}\right)^x = 0$;

572. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{f(x)-f(x_0)} = 2$$

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h\to 0} f\left(x_0+h^2+h\right)$$

573. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν αντιστρέψιμες περιοδικές συναρτήσεις.

574. Για ποιά τιμή του λ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 13^{\lambda}\frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x<0 \\ 5^{\lambda+x}+12^{\lambda+x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής;

575. Έστω η ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4-9x^3+25x^2-24x+4}{x^3-5x^2+8x-4}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να βρείτε για ποια $\sigma \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ το όριο της f για $x\to\sigma$ είναι πραγματικός αριθμός.

576. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = B\in\mathbb{R}$ και $A\neq B$. Να αποδείξετε ότι το ανοικτό διάτημα με άκρα τα A, B περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

577. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού.

578. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1+x+x^3$.

1. Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε α ισχύει $f^{-1}\left(1+\eta\mu\alpha+\eta\mu^3\alpha\right) = \eta\mu\alpha$.

579. Από τις εξετάσεις του 1981.

1. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η οριακή τιμή της, όταν το x τείνει στο -2.

580. Βρείτε το λάθος:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$$

581. Μία συνεχής συνάρτηση έχει τιμές σε κάθε διάστημα. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

582. Να σχολιάσετε το παρακάτω:

> Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Αν $(f(\alpha)-\gamma)(f(\beta)-\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $f(x) = \theta$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).
>
> Λύση.
>
> Θεωρούμε τη συνάρτηση
>
> $$g(x) = f(\alpha x + \beta(1-x)) - \gamma x - \delta(1-x), \quad x \in [0,\ 1]$$
>
> Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και επιπλέον
> $g(0) = f(\beta) - \delta$, $g(1) = f(\alpha) - \gamma$.
> Επειδή
> $$g(0)\,g(1) = (f(\beta)-\delta)(f(\alpha)-\gamma) < 0$$
> από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $g(\xi) = 0$
> $$f(\alpha\xi + \beta(1-\xi)) = \gamma\xi + \delta(1-\xi)$$
> Άρα, αν $\theta = \gamma\xi + \delta(1-\xi)$, ο αριθμός $\rho = \alpha\xi + \beta(1-\xi)$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \theta$ και μάλιστα $\rho \in (\alpha, \beta)$, αφού $\xi \in (0,1)$.

583. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Ποιό είναι το είδος μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = f\left(-e^{f\left(1-e^{-x}\right)}\right)$;

584. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 1$. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{3x}$.

585. Υποθέτουμε ότι $\alpha < \gamma < \beta$ καί ότι δύο συναρτήσεις f, g

- είναι ορισμένες και συνεχείς στα $(-\infty, \beta], [\alpha, +\infty)$ αντιστοίχως
- για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x < \gamma \\ g(x) & , \quad x \geq \gamma \end{cases}$$

είναι συνεχής.

586. Μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Για δύο αριθμούς $a < b$ ισχύει $f^2(a) + f^2(b) + 13 = 4f(a) + 6f(b)$. Βρείτε το $f([a, b])$.

587. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\, 2^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αυτή, αν και ασυνεχής (να το ελέγξετε) παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(2), f(-2)$.

588. Μία ομάδα ορειβατών ανεβαίνει στην κορυφή ενός βουνού ακολουθώντας μία ορισμένη διαδρομή και στην συνέχεια κατεβαίνει ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδρομή. Η ανάβαση και η κατάβαση διήρκεσαν περισσότερο από 24 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της διαδρομής στο οποίο η ομάδα βρέθηκε δύο φορές την ίδια ώρα δύο διαφορετικών ημερών.

589. Μία μη μηδενική συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\, f(y) \quad \text{για όλα τα } x, y$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0) = 1$
2. Η f είναι άρτια
3. $f(2x) = 2f^2(x) - 1$ για όλα τα x.

590. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$ και ότι $f(0) = 1, f(1) = 0$. Ποιοί από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι βέβαιον ότι προκύπτουν από τις υποθέσεις;

1. Υπάρχει $\xi \in [0,\ 1]$ έτσι ώστε για κάθε $x \in [0,\ 1]$ να ισχύει $f(\xi) \geq f(x)$.
2. Υπάρχει $\xi \in [0,\ 1]$ έτσι ώστε $f(\xi) = \frac{1}{2}$.
3. Υπάρχει $\xi \in [0,\ 1]$ έτσι ώστε $f(\xi) = \frac{3}{2}$.
4. Η f είναι φθίνουσα.
5. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 1]$.
6. Υπάρχει $\xi \in [0,\ 1]$ έτσι ώστε

$$\left(\lim_{x \to \xi} f(x)\right)^2 = f\left(\xi^2\right)$$

591. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x + \alpha}$$

διέρχεται από το σημείο $A(2,7)$. Να βρείτε το $f(7)$.

592. Έστω f μία γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μία λύση.
2. Το σύστημα
$$\left.\begin{array}{l} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{array}\right\}$$
έχει ακριβώς μία λύση.

593. Έστω μία συνάρτηση $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$. Έστω $d : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε σημείο $M(x, f(x))$ της C_f στην απόσταση του από το σημείο $P(x_0, f(x_0))$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $\Delta = \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = +\infty$
2. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} d(x) = 0$.

594. Έστω $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει $(f \circ g)(x) \leq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

595. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + if(\alpha)$, $w = f(\beta) + i\beta^2$ με $\alpha\beta \neq 0$. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

596. Ξέρουμε ότι αν μία συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε διάστημα Δ και δεν είναι σταθερή τότε το σύνολο τιμών της είναι διάστημα. Δείξτε ότι αν το Δ είναι κλειστό διάστημα και το $f(\Delta)$ είναι επίσης κλειστό διάστημα.

597. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$(f(x))^3 = \frac{-x}{12}\left(x^2 + 7xf(x) + 16\left(f(x)^2\right)\right)$$

για όλα τα x.

598. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει κάθε τιμή ακριβώς δύο φορές. Δηλαδή ότι για κάθε $x_1 \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Να αποδείξετε ότι η f δε μπορεί να είναι συνεχής.

599. Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση (δείτε άσκηση 833) είναι συνεχής.

600.

1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι
$$f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) = 0$$
Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο ερώτημα για να αποδείξετε [4] ότι η εξίσωση
$$4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha + \beta + \gamma$$
έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

601. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει
$$f(f(x)) = kx^3$$
όπου k είναι σταθερός πραγματικός αριθμός

1. Να αποδείξετε ότι αν είναι $k \neq 0$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα.

2. Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση με την παραπάνω ιδιότητα στις περιπτώσεις όπου $k = 0$, $k > 0$.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση με την παραπάνω ιδιότητα όταν είναι $k < 0$.

602. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα Δ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

1. Να αποδείξετε ότι
   - ή θα ισχύει $f(x) > g(x)$ για όλα τα x
   - είτε θα ισχύει $f(x) < g(x)$ για όλα τα x

2. Έστω $h : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε να ισχύει
$$(h(x) - f(x))(h(x) - g(x)) = 0$$
για όλα τα x.

   (α′) Να αποδείξετε ότι αν η C_h τέμνει τις C_f, C_g σε σημεία με τετμημένες x_1, x_2 τότε

   i. $x_1 \neq x_2$

[4] Αργότερα θα μπορείτε να δώσετε μια πιο εύκολη απόδειξη με βάση το θεώρημα του Rolle

Johannes Kepler
1571-1630

ii. Η εξίσωση $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_1, x_2.

(β′) Να αποδείξετε ότι
- ή θα ισχύει $h(x) = f(x)$ για όλα τα x
- είτε θα ισχύει $h(x) = g(x)$ για όλα τα x

603. Η εξίσωση του Kepler. Έστω κ, λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa \neq 0$, $|\lambda| < 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε x εξίσωση

$$y = \kappa x + \lambda \eta \mu y$$

έχει ακριβώς μία λύση y.

2. Να αποδείξετε ότι η σχέση

$$f(x) = \kappa x + \lambda \eta \mu f(x)$$

ορίζει μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Για τη συνάρτηση f του προηγουμένου ερωτήματος (2):

(α′) Να δείξετε ότι είναι 1-1.

(β′) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της.

(γ′) Να αποδείξετε ότι για κάθε x_0, x ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{k}{1 - |\lambda|} |x - x_0|$$

(δ′) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

(ε′) Να αποδείξετε $f(0) = 0$.

(ϛ′) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mp\infty$ (δύο περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημ0 του $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(ζ′) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

604. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$$

για όλα τα x_1, x_2.

1. Να αποδείξετε ότι για δοθέν x ή θα είναι $f(x) = f(0) + x$ είτε θα είναι $f(x) = f(0) - x$.

2. Να αποδείξετε ότι αν για τα x_1, x_2 ισχύει $f(x_1) = f(0) + x_1$ και $f(x_2) = f(0) - x_2$ τότε κάποιο από τα x_1, x_2 είναι 0.

3. Να αποδείξετε ότι:

ή $f(x) = f(0) + x$ για όλα τα x

είτε $f(x) = f(0) - x$ για όλα τα x

605. Από την Κινέζικη Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1983. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(0) = f(1)$
- $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για όλα τα $x \neq y$

Να αποδείξετε ότι για για όλα τα x, y ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$

606. Από τις εξετάσεις του πανεπιστημίου του Berkeley, 1991. Να αποδειχθεί ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και για κάθε $x \neq y$ ισχύει:

$$|f(x)) - f(y)| > |x - y| \quad (*)$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Υποδειξη: Δείξετε ότι αν η f ικανοποιεί την συνθήκη $(*)$ το αυτό ισχύει και με την $h(x) = f(x) - f(0)$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αρκεί να δείξετε ότι η h έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Εφαρμόστε τη συνθήκη $(*)$ για τα $x, 0$ για να δείτε το μέρος του επιπέδου όπου θα βρίσκεται η C_h. Να κάνετε ένα σχήμα. Δείξετε ότι η h είναι 1-1. Δείξτε τέλος ότι δοθέντος m υπάρχει μία τιμή της h που ξεπερνάει το m μία που είναι μικρότερή του.

607. Θεωρούμε f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι αν για όλα τα x ισχύει

   $$f(x) < g(x)$$

   τότε θα υπάρχει θετικός αριθμός c έτσι ώστε για όλα τα x να ισχύει

   $$f(x) + c < g(x)$$

2. Να αποδείξετε ότι αν οι f, g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

608. Από τις εξετάσεις του πανεπιστημίου του Berkeley, 1995. Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που έχουν την ίδια μέγιστη τιμή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t \in [\alpha, \beta]$ ώστε:

$$f^2(t) + 3f(t) = g^2(t) + 3g(t)$$

609. Από τον διαγωνισμό Harvard-MIT, 2002. Δύο κύκλοι έχουν διαμέτρους ίσες με $\sqrt{d}$ και διάκεντρο d. Με $A(d)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του κύκλου με την μικρότερη ακτίνα που μπορεί να περιέχει τους δύο αυτούς κύκλους. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{d\to+\infty} \frac{A(d)}{d^2}$.

610. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Θεωρούμε ακόμη τις συναρτήσεις :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-|x|}, \quad x\in(-1,1) \qquad \sigma(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad x\in\mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι οι σ,φ είναι αντιστρέψιμες και ότι η μία είναι αντίστροφη της άλλης. [5]

2. Να αποδείξετε ότι η σ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Έστω η συνάρτηση $\omega:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 \quad , & x=\pm1 \\ \sigma(f(\varphi(x))), & -1<x<1 \end{cases}$$

   (α′) Να αποδείξετε ότι η ω είναι συνεχής.

   (β′) Να αποδείξετε ότι η ω έχει μέγιστη τιμή 1 και ότι

$$\omega(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm1$$

   (γ′) Να αποδείξετε ότι η ω έχει ελάχιστη τιμή έστω m καί ότι $m = \sigma(f(\varphi(x_0)))$ για κάποιο $x_0\in(-1,1)$.

   (δ′) Να αποδείξετε για το x_0 του προηγουμένου ερωτήματος ισχύει $f(\varphi(x)) \geq f(\varphi(x_0))$ για κάθε $x_0\in(-1,1)$.

4. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή. [6]

611. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x)f(f(x)) = 1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι $f(0)=2$.

1. Βρείτε το $f(f(0))$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει a ώστε $f(a)=1$.

3. Βρείτε το $f(1)$

[5] Αν έχετε απαντήσει την άσκηση 405 έχετε απαντήσει σε αυτό το ερώτημα.

[6] Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί και αυτοτελώς δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιηθούν οι σ,φ αλλά χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου και θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων.

612. Έστω $f(x) = x^2$. Θεωρούμε την συνάρτηση g που αντιστοιχίζει κάθε πραγματικό αριθμό t στην μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα $[t, t+1]$. Βρείτε την g και εξετάστε αν είναι συνεχής.

613. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$$

Προκύπτει από αυτή την πληροφορία ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

614. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι για κάθε t, x, y ισχύει

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$$

Δείξτε ότι είναι σταθερή.

615. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα, $g : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f(\Delta) \subseteq g(\Delta)$. Τότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μία λύση.

Κεφάλαιο 3

Διαφορικός Λογισμός

3.1 Παράγωγοι συναρτήσεων

3.1.1 Α' ΟΜΑΔΑ

616. Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1$
2. $f(x) = x + \eta\mu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
3. $f(x) = x \ln x, \quad x_0 = e^2$
4. $f(x) = \sqrt{x + x^2}, \quad x_0 = 1$
5. $f(x) = x^x, \quad x_0 = 1$
6. $f(x) = xe^x, \quad x_0 = 0$

617. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$
2. $f(x) = \frac{x-e^x}{1+x\ln x}$
3. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
4. $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$

618. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
2. $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha - x^2}$
3. $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$
4. $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

619. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \frac{x-e^x}{1+x\ln x}$
2. $g(x) = x + \left|x^2 - x\right|$

620. *Από τις εξετάσεις του 1982 (Πανελλήνιες Γ' Λυκείου).* Οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζονται παντού σάυτό. Επιπλέον είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Να αποδειχθεί ότι αν $\phi'(p) = 0$ τότε είναι $\phi(p) = \frac{f'(p)}{g'(p)}$.

Leonhard Euler
1707-1783

621. Ένα παράδειγμα του Euler. Να αποδείξετε ότι αν

$$f(x) = e^{e^{e^x}}$$

τότε

$$f'(x) = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x$$

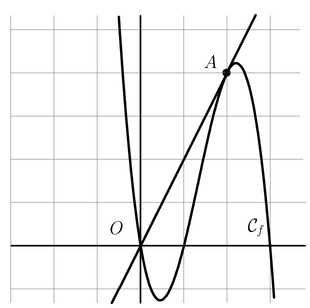
622. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $\left(f^2(x)\, g(x)\right)' = 2f(x)\, f'(x)\, g(x) + f^2(x)\, g'(x)$
2. $\left(\frac{\sqrt{f^2(x)+1}}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)f'(x)g(x) - f^2(x)g'(x) - g'(x)}{g^2(x)\sqrt{(f^2(x)+1)}}$, $g(x) \neq 0$.
3. $\left(f^2(x+1) - g^2(x+1)\right)' = 2f(x+1)\, f'(x+1) - 2g(x+1)\, g'(x+1)$
4. $\left(f(\ln x)\, g(x^3)\right)' = \frac{3f(\ln x)g'(x^3)x^3 + f'(\ln x)g(x^3)}{x}$
5. $\left(f(x)\, e^{f(x)} + \ln g(x)\right)' = f(x)\, e^{f(x)} f'(x) + e^{f(x)} f'(x) + \frac{g'(x)}{g(x)}$, $g(x) > 0$
6. $\left((f(x))^{g(x)}\right)' = \left(g'(x)\, f(x) \ln f(x) + f'(x)\, g(x)\right) (f(x))^{g(x)-1}$, $f(x) > 0$

623. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Δείξτε ότι:

$$(f(g(x)))'' = f''(g(x))\,(g')^2(x) + f'(g(x))\, g''(x)$$

624. Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(2,4)$. Να βρείτε την $f'(2)$.



625. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες και ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) = x^2 + 2x + 4$$

για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x)\, f(x) + g'(x)\, g(x) = x + 1$$

626. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $f(x) = x + e^x$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = x^2 + \ln x$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$
4. $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

627. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\, g(x) = x$. Μπορεί η γραφική παράσταση και της f και της g να διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

628. Σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 45°·

629. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο M στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $f(x) = x^2$, $M(-1, -1)$
2. $f(x) = \frac{2}{x}$, $M(1, 1)$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $M(1, 1)$
4. $f(x) = x + \sqrt{x}$, $M(1, 2)$

630. Να επαληθεύσετε ότι:

1. Η $f(x) = -x + 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιεί την $f''(x) + f(x) + x = 0$.
2. Η $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1$ ικανοποιεί την $f'(x)\, x + f''(x)\, x^2 = 1$.
3. Η $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + e^{-x}$ ικανοποιεί την $f'''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$.
4. Η $f(x) = 2e^x$ ικανοποιεί την $\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 2$.

631. Αν οι συναρτήσεις f, g, h, s είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & s(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h'(x) & s(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h(x) & s'(x) \end{vmatrix}$$

632. Για ποιές τιμές των κ, λ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ \kappa x + \lambda & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο α;

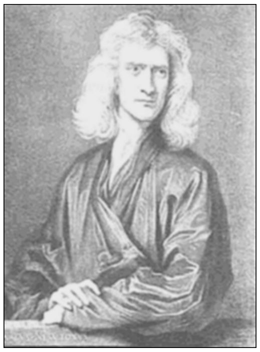
633. Για ποιές τιμές του α η κλίση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$ στο σημείο $A(0, 1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

634. Ένα παράδειγμα του Newton. Έστω ότι οι α, β είναι σταθερές και ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ συνδέονται με την σχέση:

$$x^3(t) - x(t)\,y^2(t) + \alpha^2 z(t) - \beta^3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι

$$3x'(t)\,x^2(t) - x'(t)\,y^2(t) - 2x(t)\,y'(t)\,y(t) + \alpha^2 z'(t) = 0$$



Sir Isaac Newton

1643-1727

635. Να αποδείξετε ότι η $y = px + q$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σε σημείο με τετμημένη s αν και μόνο αν ισχύει $p = 2\alpha s + \beta$, $q = -\alpha s^2 + \gamma$.

636. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = -3 - \frac{4}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{9}\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 9\right)$.

637. (Leibniz, 1710) Έστω $y(x) = u(x)\,v(x)$ όπου οι u, v είναι 3 φορές παραγωγίσιμες. Να αποδείξετε ότι

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646-1716

638. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η ευθεία $y = x+3$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\alpha x + 3\beta$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

639. Να επαληθεύσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και ότι οι εφαπτομένες τους σε αυτό το σημείο είναι κάθετες.

640. Να αποδείξετε ότι αν

$$f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$$

τότε

$$\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f(x)}$$

641. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R, δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(1) = f''(1) = 1$. Έστω $g(x) = f(e^x)$. Να βρείτε το $g''(0)$.

642. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta x$. Αν $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$ να βρείτε το $f(1)$.

643. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Έστω A, B τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(1, -3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

644. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 4x^2 - 2x + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

στο σημείο της με τετμημένη 1.

645. Έστω $f(x) = \eta\mu(\ln x)$. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$$

646. Έστω $f(x) = \frac{px+1}{1+e^x}$. Να βρείτε για ποια τιμή του p ισχύει $f'(1) + f'(0) = 0$.

3.1.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

647. Έστω $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της f:

1. Στο $x_0 = 1$
2. Στο $x_0 = -1$

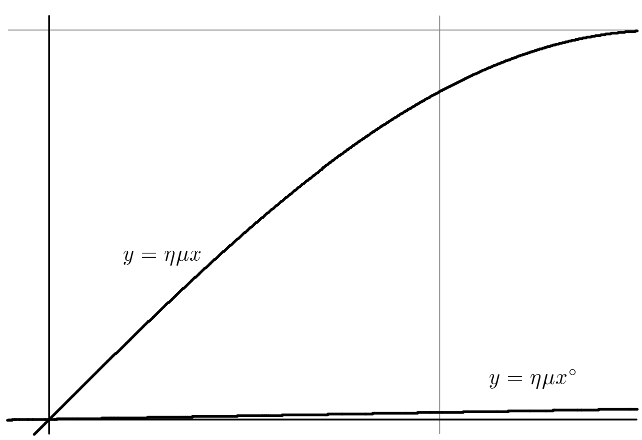
648. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$x + \eta\mu x \leq f(x) \leq x + \eta\mu x + x^2 e^x$$

Να βρείτε την παράγωγο της στο 0.

649. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω f παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) - f(2x)$ έχει παράγωγο 5 στο $x = 1$ και παράγωγο 7 στο $x = 2$. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) - f(4x)$ στο $x = 1$.

650. Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζεται στο ίδιο σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu x^\circ$ για τιμές του x μεταξύ 0 και 1,5. Η πρώτη συνάρτηση αντιστοιχεί στον αριθμό x (θεωρείται ότι εκφράζει rad) το ημίτονο του. Η δεύτερη συνάρτηση αντιστοιχεί στον αριθμό x το ημίτονο των x μοιρών. Οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι διαφορετικές. Λ.χ. $f(1) = \eta\mu 1 = 0,84$ ενώ $f(1) = \eta\mu 1^\circ = 0,01745$.



1. Να δείξετε ότι $g(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi x}{180}\right)$
2. Να βρείτε την παράγωγο της $g(x)$

651. Να βρείτε τα α, β αν με $f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}$ είναι $f(1) = 2, f'(1) = 2$.

652. Σε κάθε x αντιστοιχούμε το σημείο $M(x, y)$ της ευθείας $2x + 3y = 1$ με τετμημένη x. Έστω $d(x)$ η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε την παράγωγο της $d(x)$.

653. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y. Να αποδείξετε ότι αν η f παραγωγίζεται σε ένα x_0 παραγωγίζεται σε κάθε x_0.

654. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει

$$f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

655. Δίνονται οι $f(x) = e^{x^2}$ και $g(x) = e^x\sqrt{1-2x}$. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g'(x)$$

656. Έστω $f(x) = 6x^5 - 20x^3$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία όπου η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι συνευθειακά.

657. Έστω το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της με τετμημένη 0 είναι η $y = \alpha_1 x + \alpha_0$.

658. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις τότε λέμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ *εφάπτονται* αν έχουν κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη. Να αποδείξετε ότι με

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2e}$$

οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ εφάπτονται.

659. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} + x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

660. Να δώσετε ένα παράδειγμα μίας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που:

1. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από ένα.
2. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από δύο.
3. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από άπειρα.

661. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Στις εξετάσεις του εκείνου του έτους δόθηκε το ακόλουθο θέμα:

> Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει
>
> $$g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
>
> Να αποδείξετε ότι
> i) $g(0) = -\alpha$
> ii) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ας ονομάσουμε με (Υ) την σχέση της υπόθεσης.

1. Να θέσετε $x = y = 0$ στην (Υ) για να δείξετε ότι θα είναι $g(0) = -\alpha$

2. Να παραγωγίσετε την (Υ) μία φορά ως προς x και μία φορά ως προς y για να δείξετε ότι θα ισχύει για όλα τα x, y:

$$g'(x+y) = e^y g'(x) + e^x g(y) + y \tag{3.1}$$

$$g'(x+y) = e^x g'(y) + e^y g(x) + x \tag{3.2}$$

$$e^y\left(g'(x) - g(x)\right) - e^x\left(g'(y) - g(y)\right) + (y - x) = 0 \tag{3.3}$$

Χρησιμοποιείστε τα προηγούμενα για να δείξετε ότι:

$$g(0) = 0 \tag{3.4}$$

και ότι για όλα τα x, y ισχύει:

$$g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x \tag{3.5}$$

Ήδη μεταξύ άλλων θα έχετε αποδείξει ότι ζητούσε το θέμα.

3. Με την βοήθεια των (3.3), (3.5) δείξετε ότι

$$e^y x - e^x y + y - x = 0 \tag{3.6}$$

4. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση με τις ιδιότητες που αναφέρονται στο θέμα δεν υπάρχει !

662. Να βρείτε όλες τις παραβολές $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ που εφάπτονται στην ευθεία $y = 3x + 2$ στο σημείο $A(1, 5)$.

663. Έστω $f(x) = e^x$, A σημείο της $\mathcal{C}_f$ και B η τομή της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο A με τον xx'. Να αποδειχθεί ότι η προβολή του $\overrightarrow{AB}$ στον xx' είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

664. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο συναρτήσεων που δεν παραγωγίζονται στο x_0 αλλά το άθροισμα τους να παραγωγίζεται στο x_0.

665. Να βρείτε, εφ'οσον υπάρχει, κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των $f(x) = x^3 - 8x - 19$, $g(x) = x^3 + x - 1$.

666. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε ειναι παραγωγίσιμη.

2. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x) f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε ειναι παραγωγίσιμη.

3. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x) f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε ειναι παραγωγίσιμη.

4. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε ειναι παραγωγίσιμη.

667. Ο αριθμός ρ λέγεται *διπλή ρίζα* του πολυωνύμου $P(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $S(x)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P(x) = (x - \rho)^2 S(x), \qquad S(\rho) \neq 0$$

Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές θα έχει τον $\rho \in \mathbb{R}$ διπλή ρίζα αν και μόνο αν ισχύει

$$P(\rho) = P'(\rho) = 0, \quad P''(\rho) \neq 0$$

668. Από τις εξετασεις του 1994, Δέσμη Ι.

1. Έστω ρ πραγματικός αριθμός $A(x)$, $B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε $A(x) B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

2. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^\nu \left(\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8\right)$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

669. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

670. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 5$$

Βρείτε την $f'(0)$.

671. Να αποδείξετε ότι αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2}=t\in\mathbb{R}$$

τότε η $g(x)=|f(x)|$ παραγωγίζεται στο $x_0=\alpha$.

672. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & , \quad x<1\\ 4x^2-2x+2 & , \quad x\geq 1\end{cases}$$

στο σημείο της με τετμημένη 1.

673. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha\eta\mu 2x+\beta\eta\mu x+\gamma\sigma\upsilon\nu x$$

Να βρείτε τα α,β,γ έτσι ώστε να ισχύει

$$f(\pi)=f'(\pi)=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

674. Για τις συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο -1 και ότι ισχύει

$$f^2(x)+g^2(x)=x^6+2x^3+1$$

για όλα τα x.

1. Να βρείτε τα $f(-1), g(-1)$
2. Να αποδείξετε ότι $f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$, $g'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{g(x)}{x+1}$
3. Να αποδείξετε ότι $(f'(-1))^2+(g'(-1))^2=9$.

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

1873-1950

675. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$ αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & , \quad x\in\Delta,\ x\neq x_0\\ \alpha & , \quad x=x_0\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο x_0

676. Η παρατήρηση του Καραθεοδωρή. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε υπάρχει συνάρτηση $\tilde{f}$ τέτοια ώστε

- Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο x_0

- Για όλα τα x ισχύει $f(x) = f(x_0) + \tilde{f}(x)(x - x_0)$
- $\tilde{f}(x_0) = f'(x_0)$

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το αντίστροφο.

677. Να αποδείξετε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 6x^5 - 20x^3$ στα οποία η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται είναι συνευθειακά.

678. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να βρείτε τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ σε ένα σημείο της του οποίου η τεταγμένη είναι 18.

679. Πως πρέπει να επιλέξουμε το α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ να διέρχεται από το σημείο $M(2, 9)$;

680. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $y = \frac{\alpha}{x}$ στα σημεία τομής της με την ευθεία $y = \beta x$ είναι παράλληλες.

681. Είναι η ευθεία $y = 2x + 3$ εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = x^3$

682. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2005. Έστω $f(x) = x^3 + ax + b$, με $a \neq b$, για την οποία υποθέτουμε ότι η εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της στα σημεία με τετμημένες $x = a$ και $x = b$ είναι παράλληλες. Βρείτε το $f(1)$.

683. Μία ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως λ τέμνει την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2}$.

684. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα, η οποία παίρνει θετικές τιμές και είναι παραγωγίσιμη στο a. Να αποδέιξετε ότι

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{x - a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

685. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα και x_0 ένα σημείο του διαστήματος αυτού. Αν το όριο $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε η f λέγεται *αριστερά παραγωγίσιμη στο* x_0 και η τιμή του ορίου *αριστερή παράγωγος της* f *στο* x_0. Ανάλογα ορίζεται έννοια της δεξιά παραγωγίσιμης συνάρτησης.

1. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι αριστερά και δεξιά παραγωγίσιμη στο x_0 τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο άν η αριστερή και η δεξιά παράγωγος τη f είναι ίσες.

2. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι αριστερά και δεξιά παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0.

686. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την f'.

687. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

2. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

688. Έστω ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής στο x_0 και $\alpha > 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} |x - x_0|^{\alpha} f(x) & , \quad x \in \Delta, \ x \neq x_0 \\ 0 & , \quad x = x_0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

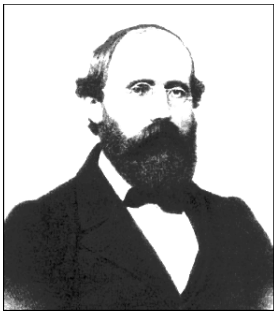
Δείξτε ακόμη ότι αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ εκτός ίσως του x_0 και $\alpha > 2$ τότε η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

689. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία άρτια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $-x_0$ και ισχύει $f'(-x_0) = -f(x_0)$. Σε τί απλουστεύεται η απόδειξη αν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$; Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για περιττή συνάρτηση.

690. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω ότι το όριο

$$\hat{f}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \tag{3.7}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *παράγωγος Riemann* της f στο x_0.



Georg Friedrich Bernhard Riemann

1826-1866

1. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε υπάρχει η παράγωγος Riemann της f στο x_0 και ισχύει $\hat{f}(x_0) = f'(x_0)$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Να αποδείξετε ότι αν και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει $\hat{f}(0) = 0$.

3. Υποθέτουμε ότι οι παράγωγοι Riemann των f, g υπάρχουν στο x_0. Να αποδείξετε ότι το αυτό ισχύει για την συνάρτηση $h = f + g$ και ότι $\hat{h}(x_0) = \hat{f}(x_0) + \hat{g}(x_0)$

691. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Για τα x που δε μηδενίζεται η f' ορίζεται η συνάρτηση:

$$f^*(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

Hermann Amandus Schwarz

1843-1921

η οποία ονομάζεται *παράγωγος Schwarz* της f.

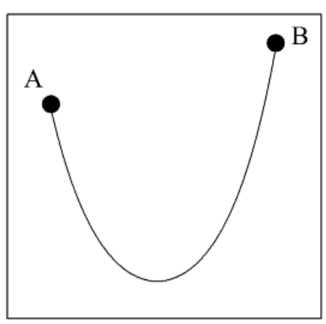
1. Να βρείτε την f^* όταν $f(x) = e^x$

2. Να βρείτε την f^* όταν $f(x) = x^2 + 1$ και $\Delta = (0, +\infty)$

3. Να αποδείξετε ότι αν για την συνάρτηση g ισχύει $f(x)\, g(x) = 1$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε θα ισχύει $f^*(x) = g^*(x)$.

692. Έστω η καμπύλη $\mathcal{C}$ με εξίσωση $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\alpha}$ και η ευθεία $\varepsilon : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ Για την ε είναι γνωστό ότι είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $p + q$.

693. Ο Γαλιλαίος στο έργο του *«Διάλογοι περί δύο νέων επιστημών»* (1638) υπέδειξε την ακόλουθη μέθοδο για την *κατά προσέγγισιν* χάραξη μίας παραβολής: Κρεμάμε μία λεπτή αλυσσίδα από δύο καρφιά Α,Β και αποτυπώνουμε το σχήμα της (*αλυσσοειδής καμπύλη*). Αλλάζοντας το μήκος και τις θέσεις στήριξης θα έχουμε διαφορετικές παραβολές.



50 χρόνια μετά ένας από τους αδελφούς Bernoulli, ο Jacob Bernoulli βρήκε την ακριβή μαθηματική έκφραση της αλυσσοειδούς καμπύλης:

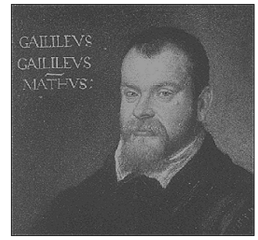
$$y = \frac{c^x + c^{-x}}{2}, \ \ c > 0, \ \ c \neq 1$$

Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση δε μπορεί να είναι εξίσωση παραβολής.

Δηλαδή να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έτσι ώστε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \frac{c^x + c^{-x}}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Galileo Galilei

1564-1642

694. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x+y) - f(x) = \alpha x^2 y + \beta x y^2 + \gamma y^3$$

για κάθε x, y (α, β, γ σταθερές). Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη.

695. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο α με $g'(\alpha) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Jacob (Jacques) Bernoulli

1654-1705

696. Να αποδέιξετε ότι αν η συνάρτηση $xf(x)$ έχει παράγωγο στο $x_0 \neq 0$ και η f είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Που χρησιμοποιήσατε ότι η f είναι συνεχής στο x_0; Είναι αυτή η υπόθεση απαραίτητη;

697. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη σάυτό και ισχύει ότι $g(-1) = 7$. Αν η f είναι μία συνάρτηση με

$$f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$$

να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

698. Απο το σημείο $A(x_0, y_0)$ άγονται οι εφαπτομένες $AB, A\Gamma$ προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιοιούν οι x_0, y_0 ώστε να ισχύει $AB = A\Gamma$;

699. Αν

$$f(x) = \left| x^2 - |x| \right|$$

ποια είναι η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της με τετμημένη -2;

700. Η παράγωγος της f είναι γνωστή.
Ποια είναι η παράγωγος της $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x)$;

701. Είναι γνωστό ότι για $x \neq 1$ ισχύει

$$1 + x + x^2 + ... + x^\nu = \frac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}$$

Βάσει τούτου να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + \nu x^{\nu-1}$$

702. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M\left(x_0, y_0\right)$, $y_0 > 0$ είναι η ευθεία $\frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1$.

703. Βρείτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = e^{kx}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

704. Για ποιές τιμές των κ, λ, μ οι γραφικές των συναρτήσεων

$$f\left(x\right) = x^2 + \kappa x + \lambda$$

$$g\left(x\right) = x^3 + \mu x$$

έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 3)$;

705. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f\left(x\right) = \frac{1}{2^x}$, $g\left(x\right) = \log_2 x$ στα σημεία τους $A\left(0, 1\right)$, $B\left(1, 0\right)$ τέμνονται κάθετα.

3.1.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

706. Έστω f μία συνάρτηση που είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και της οποίας οι παράγωγοι παίρνουν θετικές τιμές. Έστω $u\left(x\right) = \left(f'\left(x\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$ και $v\left(x\right) = f\left(x\right)\left(f'\left(x\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{u\left(x\right)} u''\left(x\right) - \frac{1}{v\left(x\right)} v''\left(x\right) = 0$$

707. Έστω $f\left(x\right) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Να αποδείξετε ότι για την ν-οστή παράγωγο της f ισχύει

$$f^{(\nu)}\left(x\right) = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \left(-1\right)^\nu \nu! \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{-\nu-1}$$

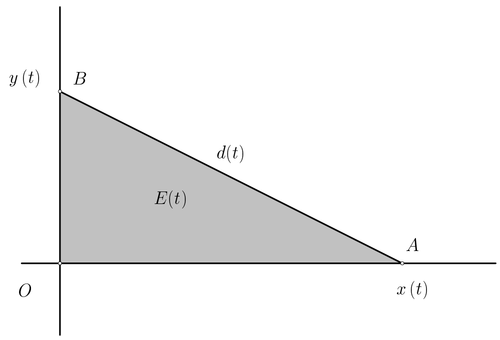
3.2 Ο ρυθμός μεταβολής

3.2.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

708. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του y ως προς x όταν:

1. $2x+3y=4$
2. $xy=3$
3. $x^2+y^2=4, y>0$
4. $e^x+e^y=1$
5. $\ln x+\ln y=1$
6. $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=2, y>0$

709. Τα σημεία A, B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και η θέση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $A\left(x\left(t\right),0\right), B\left(0, y\left(t\right)\right)$.



1. Έστω ότι $x\left(t\right)=3t$, $y\left(t\right)=4t$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους $d\left(t\right)=AB$ και του εμβαδού $E\left(t\right)=\left(OAB\right)$.

2. Να κάνετε τον ίδιο υπολογισμό γενικά δηλαδή όταν δεν ξέρετε τις συναρτήσεις $x\left(t\right)$, $y\left(t\right)$. (Στο τελικό αποτέλεσμα θα υπάρχουν οι $x\left(t\right)$, $y\left(t\right)$ και οι παράγωγοί τους $x'\left(t\right)$, $y'\left(t\right)$).

710. Η θέση ενός κινητού στο επίπεδο είναι το σημείο

$$M\left(x\left(t\right),\ y\left(t\right)\right)$$

όπου οι $x\left(t\right),\ y\left(t\right)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ποια σχέση συνδέει τα $x\left(t\right), y\left(t\right), x'\left(t\right), y'\left(t\right)$ όταν:

1. Το κινητό κινείται στον κύκλο

$$x^2+y^2=10$$

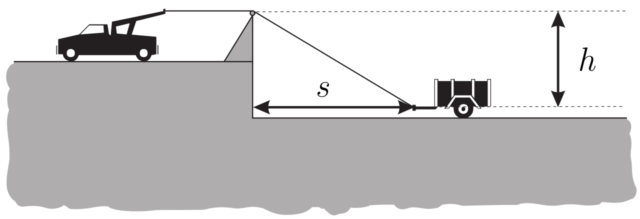
2. Το κινητό κινείται στην ευθεία $x+y=10$.

3. Το κινητό κινείται στην ευθεία στην καμπύλη με εξίσωση

$$e^x+e^y=10$$

3.2.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

711. Να βρείτε ποια σχέση συνδέει την ταχύτητα του αυτοκινήτου και του ρυμουλκουμένου κατά την χρονική στιγμή που το δεύτερο απέχει απόσταση s από τον τοίχο.



712. Ένα υλικό σημείο κινείται στον άξονα xx' έτσι ώστε για κάθε χρονική στιγμή t η θέση του είναι

$$s(t) = \sqrt{k^2t^2 + c^2}$$

όπου k, c είναι θετικές σταθερές. Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του $\upsilon(t)$:

1. Είναι μικρότερη του k.
2. Τείνει στο k όταν $t \to +\infty$.

713. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη Ι. Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους $10m$ του οποίου τα άκρα A, B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2m/\sec$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = \upsilon t$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

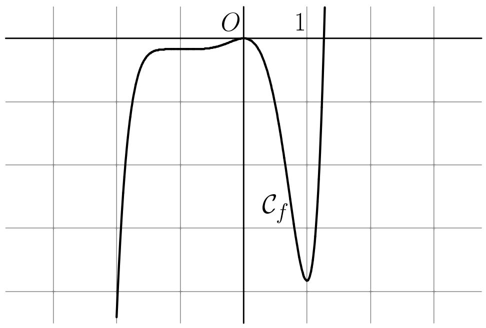
1. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m;

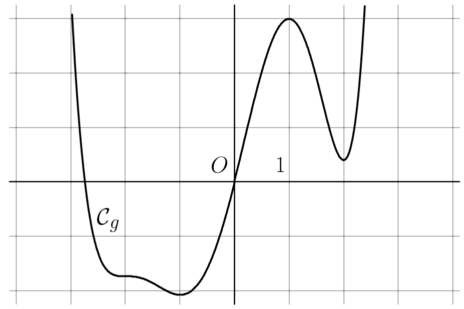
714. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη Ι. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{\mu x})$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

3.3 Τα θεωρήματα Fermat, Rolle, Lagrange

3.3.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

715. Στα επόμενα σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, g. Βρείτε σε ποια σημεία μηδενίζεται η παράγωγος τους και ποιά από αυτά είναι τοπικά ακρότατα.





716. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να γράψετε ένα κατάλογο πιθανών θέσεων ακροτάτων σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$
4. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\ln(x+1)$
5. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x$
6. $f(x) = \ln x - x + \ln(x+1)$

717. Αφού ελέγξετε στις επόμενες περιπτώσεις, ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle να βρείτε τα ξ που μηδενίζουν την f'.

1. $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$
2. $f : [-3, 0] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
3. $f : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$
4. $f : [0, \ln 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2,$
5. $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} - x$
6. $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\ln x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

718. Αφού ελέγξετε στις επόμενες περιπτώσεις, ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange να βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

1. $f : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 1$
2. $f : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$
3. $f : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$
4. $f : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x} - x$
5. $f : [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$

6. $f:[1,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$

719. Από τις εξετάσεις Mathematical Tripos, Cambridge, 1935. Να βρείτε το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την συνάρτησηση $f(x)=x(x-1)(x-2)$ στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

3.3.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

720. Δίνεται η συνάρτηση

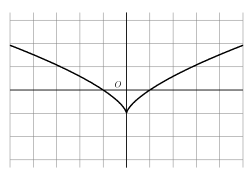
$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

1. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο της.
2. Να εφαρμόσετε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,1]$

721. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες τότε θα έχουν τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη.

722. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση των σημείων $M(x,y)$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$(y+1)^3=x^2 \qquad (1)$$



1. Η σχέση (1) ορίζει μία συνάρτηση $y=f(x)$. Να βρείτε τον τύπο της.
2. Να βρείτε σε ποια x_0 παραγωγίζεται η f.
3. Στα άκρα κάθε διαστήματος της μορφής $[-\alpha,\alpha]$ η f παίρνει ίσες τιμές. Εντούτοις δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον xx'. (Να ελέγξετε αυτό τον ισχυρισμό εξετάζοντας αν η f' μηδενίζεται). Έρχεται το παραπάνω σε αντίθεση με το θεώρημα του Rolle;

723. Έστω f,g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ τέτοιες ώστε:

- $f(0)=g(1)=0$
- $f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$$

724. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Δελχί, 1984. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει k τέτοιος ώστε η εξίσωση $x^3 - 12x + k = 0$ να έχει δύο διάφορες ρίζες στο $(0,1)$.

725. Από τις εξετάσεις Mathematical Tripos, Cambridge, 1929. Να αποδείξετε ότι αν

$$\frac{\alpha_0}{n+1} + \frac{\alpha_1}{n} + ... + \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \alpha_n = 0,$$

τότε η εξίσωση

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

726. Έστω $f(x) = x \ln x$ και αριθμοί α, β με $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι ο αριθμός

$$\xi = \frac{1}{e} \frac{\beta^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}$$

727. Έστω $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f έχει ακριβώς τρεις ρίζες που ανήκουν στο διάστημα $(0,3)$.

728. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 1 = (e-1)x^2$ έχει ακριβως τρεις ρίζες τις δύο προφανείς και ακόμη μία στο διάστημα $(2,3)$.

729. Να αποδείξετε ότι αν η παράγωγος μίας συνάρτησης ορισμένης σε ένα διάστημα δε έχει ρίζες τότε η συνάρτηση είναι 1-1.

730. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί:

1. Ότι για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.
2. Αν $c \notin [\alpha, \beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

731. Στηριχθείτε στο θεώρημα του Rolle όπως διατυπώνεται στο βιβλίο σας για να αποδείξετε την ακόλουθη γενίκευση του:

- Εστω μία συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \beta^-} f(x) = L$$

όπου $L \in \mathbb{R}$ ή $L = \pm\infty$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Στη συνέχεια:

1. Σκεφθείτε πως άραγε θα μπορούσε να αποδειχθεί το θεώρημα του Rolle όπως διατυπώνεται στο βιβλίο ξεκινώντας από την παραπάνω γενίκευση.
2. Σκεφθείτε πως θα μπορούσαμε στην γενίκευση να συμπεριλάβουμε και διαστήματα όπου κάποιο από τα άκρα είναι $\pm\infty$.

732. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu}$$

με μ, ν θετικούς ακεραίους και $x \in [\alpha, \beta]$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha\ , \beta)$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{\mu}{x - \alpha} + \frac{\nu}{x - \beta} \right)$$

2. Αφού επαληθεύσετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle να αποδείξετε ότι το ξ που μηδενίζει την f' είναι το

$$\xi = \frac{\nu}{\mu + \nu}\alpha + \frac{\mu}{\mu + \nu}\beta$$

733. Έστω ότι η παράγωγίσιμη συνάρτηση f έχει στο διάστημα Δ τουλάχιστον ν ρίζες. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\left(f^2(x)\right)'$ έχει τουλάχιστον $2\nu - 1$ ρίζες.

734. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη Ι. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta \right) x^2 + (\gamma - \delta) x + \delta$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

735. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι.

1. Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.

2. Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\,\sigma\upsilon\nu x + g(x)\,\eta\mu x = g(x)\,\sigma\upsilon\nu x$ και $g'(0) = 1992$.

736. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Δίνονται ο πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$f' = g, \qquad g' = -f$$

τότε να αποδείξετε οτι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$f'' + f = g'' + g = 0$$

και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

737. Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η παράγωγος της g δε μηδενίζεται και ότι $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

738. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, Να αποδείξετε όι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

739. Έστω f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ για τις οποίες ισχύει

$$f'(x)\,g(x) \neq f(x)\,g'(x)$$

για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ριζών της f υπάρχει ρίζα της g.

740. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, κατά περίπτωση, $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε:

1. $f(\beta)\,e^{\beta-\xi} - f(\alpha)\,e^{\alpha-\xi} = (\beta - \alpha)\,(f(\xi) + f'(\xi))$
2. $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\xi-\alpha} + \frac{1}{\xi-\beta}$ όπου $f(x) \neq 0$ στο (α, β)

Υποδειξη:

1. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής στην $f(x)\,e^x$
2. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στην $f(x)\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$

741. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν οι f και f' είναι άρτιες συναρτήσεις τότε η f είναι σταθερή.

742. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Δελχί, 1989. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και η παράγωγος της είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 f''(\xi)$$

3.3.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ


Brook Taylor
1685-1731

743. Υποθέτουμε ότι οι $c_1, c_2, ..., c_\nu$ είναι ανα διάφοροι του 0 και οι αριθμοί $t_1, f_2, ..., t_\nu$ είναι ανα δύο διάφοροι. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2} + ... + c_\nu x^{t_\nu} = 0$$

έχει το πολύ ν ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

744. Το θεώρημα του Taylor. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0 + h) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(t)(x_0 + h - t)^i, \quad t \in \Delta$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x_0 + h - t)^{n-1}$$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x_0 + h - t}{h}\right)^n F(x_0)$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$G(x_0 + h) = G(x_0) = 0$$

3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(x_0) h + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) h^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) h^n$$

(Τύπος του Taylor)

4. Να εφαρμοσθεί το προηγούμενο για να αποδειχθεί ότι υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του $x \neq 0$ έτσι ώστε

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n e^\xi$$

3.4 Ο ρόλος της πρώτης παραγώγου

3.4.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

745. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$
2. $f(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + x - 1$
3. $f(x) = 2x^3 + 6e^x + e$
4. $f(x) = -3e^{-x} - e^{-x}x^2 - 2xe^{-x}$

746. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες.

1. $f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 1$
2. $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 8x + 1$
3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12\ln|x-1| - 1$
4. $f(x) = \frac{x^8 - 1}{4x^4}$

747. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, 6]$

748. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

749. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ στο διάστημα $[0, 2]$.

750. Έστω η συνάρτηση $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

751. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \qquad x \in [-1, 3]$$

να βρείτε το σύνολο τιμών της.

752. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ ισχύει $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$.

753. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[\frac{3}{4}, 2\right]$ ισχύει $1 \leq \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}} \leq \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

754. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συναρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+3}$;

755. Να αποδέιξετε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x\sqrt{\eta\mu x} \leq 2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{3}{4}}$.
Υποδειξη: Με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x\sqrt{\eta\mu x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x) = \frac{3\sigma\upsilon^2\nu x-2}{2\sqrt{\eta\mu x}}$. Βρείτε τη μονοτονία της συνάρτηση f.

756. Να αποδείξετε ότι για όλες τις πραγματικές τιμές του x ισχύει

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

757. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 10 + 4x\ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}$$

758. Από τις εξετάσεις του 1980.

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $y = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = -2$
2. Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης, αφού αντικατασταθούν τα α, β με τις τιμές τους.

759. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2^{x^2}+2}$.

3.4.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

760. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστη τιμή. Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα αν αντί του $\mathbb{R}$ έχουμε ένα ανοικτό διάστημα Δ. Ένα κλειστό;

761. Να βρείτε σημείο στην γραφική παράσταση της $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $A(0,1)$ ελάχιστη απόσταση.

762. Δύο θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με 50. Πότε το άθροισμα τους γίνεται μέγιστο;

763. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ όπου το Δ είναι ένα ανοικτό διάστημα. Έστω A ένα σημείο του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν ένα σημείο B της C_f απέχει από το A ελάχιστη απόσταση τότε η εφαπτομένη της C_f στο B είναι κάθετη στην AB.

764. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = px$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του p οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε δύο σημεία A, B.

2. Να εκφράσετε την απόσταση AB ως συνάρτηση του p.

3. Να βρείτε για ποια τιμή του p η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη.

765. Μία εταιρεία σταματά κάθε διαφήμιση προϊόντων της. Διαπιστώθηκε ότι οι πωλήσεις των προϊόντων της άρχισαν να πέφτουν και πιο συγκεκριμένα ότι: Ο *ρυθμός πτώσης των πωλήσεων* και οι *πωλήσεις* κατά οποιαδήποτε χρονική στιγμή t έχουν σταθερό λόγο.
Την στιγμή που σταμάτησε η διαφήμιση η επιχείρηση πωλούσε 500 μονάδες προϊόντος την ημέρα. Μετά από 20 ημέρες οι πωλήσεις έπεσαν στις 300 μονάδες. Πόσες θα είναι οι πωλήσεις μετά από 30 ημέρες·

766. Ο πληθυσμός Π των κατοίκων μίας πόλης αυξάνεται ως προς τον χρόνο με ρυθμό

$$\left(\frac{1}{10}\ln\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{10}}\Pi_0$$

όπου Π_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης κατά την χρονική στιγμή $t = 0$. Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα είναι $e\Pi_0$;

767. Η κάθε σελίδα ενός βιβλίου πρέπει να έχει

- Κείμενο-εικόνες εμβαδού S
- Αριστερά-Δεξιά περιθώριο α
- Άνω-Κάτω περιθώριο β

Πως πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις της σελίδας έτσι ώστε να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν;

768. Θεωρούμε θετικούς αριθμούς x, y με άθροισμα k και m, n θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης $x^m y^n$ είναι ίση με $\frac{m^m n^n k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$.

769. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (1+x)^n + (1-x^n)$, όπου n θετικός ακέραιος.

770. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

1. $\eta\mu x < 2x$, $x > 0$

2. $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$

771. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

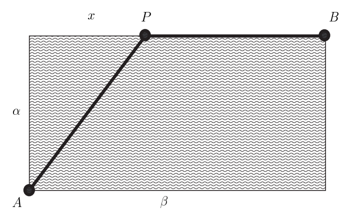
$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

772. Στις επόμενες περιπτώσεις τα x, y είναι θετικοί αριθμοί και μεταβάλλονται έτσι ώστε να ικανοποιείται μία σχέση. Ζητείται να εξετάσετε αν η παρατιθέμενη παράσταση των x, y παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

Συνθήκη	Παράσταση
$x+y=\alpha$	xy
$xy=\alpha$	$x+y$
$x+y=\alpha$	x^2+y^2
$x^2+y^2=\alpha$	$x+y$
$x^2+y^2=\alpha$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\alpha$	$x+y$

773. Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έχει συνεχή παράγωγο και δεν έχει ακρότατα. Να αποδείξετε ότι είναι μονότονη.

774. Στο σχήμα απεικονίζεται μία τεχνητή λίμνη σχήματος ορθογωνίου.



Ένας αθλητής ο οποίος μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα v_1 και να τρέξει με ταχύτητα v_2 πρόκειται να μετακινηθεί από το A στο B. Πως πρέπει να επιλεγεί η διαδρομή APB ώστε να απαιτηθεί ο ελάχιστος χρόνος;

775. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = (1+x)^x$$

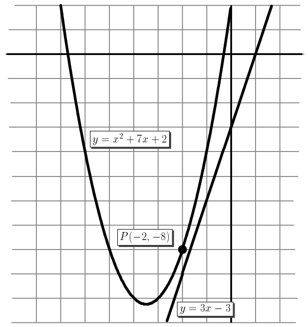
1. Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}_g$
2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_g$ ισχύει

$$(1+x)^x \geq 1$$

776. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1996. Να αποδείξετε ότι για τη θετική σταθερά t ισχύει η ισοδυναμία:

$$e^x > x^t \text{ για όλα τα } x > 0 \Leftrightarrow t < e$$

777. Ποιο σημείο της καμπύλης $y = x^2 + 7x + 2$ είναι πλησιέστερα στην ευθεία $y = 3x - 3$;



778. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha(\ln x + x) + 2\beta x^2 + 3x + 1$$

παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1, x_2 = 2$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

779. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-1, +\infty)$, $n \in [1, +\infty)$ ισχύει η ανισότητα του Bernoulli:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

780. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

1. η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ'ενα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

2. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε
$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

3. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

781. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ότι ισχύει

$$2f(x) = x\left(1 + f'(x)\right)$$

για όλα τα x Να αποδείξετε ότι η f'' είναι σταθερή. (Προσέξτε ιδιαιτέρως την τιμή $x = 0$). Αν επιπλέον $f(1) = 2$ βρείτε την f.

782. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη IV. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 182$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in [0, +\infty)$.

783. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ'εναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \qquad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

1. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.
2. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

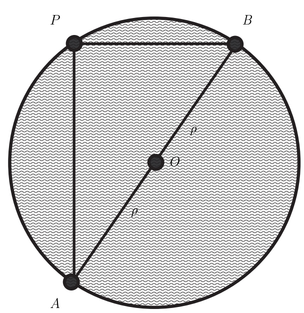
784. Να λύσετε την εξίσωση

$$9^x + 3^x = 5^x + 7^x$$

785. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη Ι. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$$

786. Να λύσετε το πρόβλημα 774 στην περίπτωση που η λίμνη έχει σχήμα κύκλου ακτίνας ρ και τα A, B είναι αντιδιαμετρικά.



787. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$;

788. Πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 4x + 1$;

789. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

στο διάστημα $(0, 1)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

790. Έστω

$$f(x) = x^2 e^x - 2$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(x) = f(x) + 2xe^x + 2$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$
4. Η f' έχει δύο μόνο ρίζες.
5. Η f έχει στο $\mathbb{R}$ μία μόνο ρίζα.

791. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^\lambda e^{2\lambda - x}$$

με $\lambda > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι
$$(\lambda e)^\lambda$$
2. Πως πρέπει να εκλεγεί ο λ έτσι ώστε η μέγιστη τιμή της f να είναι η ελάχιστη δυνατή;

792. Έστω

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{x^2}$$

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
2. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$$e^x \sqrt[3]{x^2} - \lambda = 0$$

793. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \lambda$$

794. Να αποδείξετε ότι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα

$$f' + f = 0$$

είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = ce^{-x}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

795. Από τις εξετάσεις του 1984, Δέσμη IV. Έστω η πραγματική συνάρτηση y της πραγματικής μεταβλητής x με $y = x + \frac{4}{x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της y.
2. Να εξετάσετε την y ως προς τη μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$.

796. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε η f' έχει δύο μόνο ρίζες x_1, x_2 με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$.

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[\alpha,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ [x_2,\ \beta]$$

η f έχει *το πολύ* μία ρίζα.

2. Να αποδείξετε ότι αν το x_1 είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $[\alpha, x_1) \cup (x_1, x_2]$. (Όμοια αν το x_2 είναι ρίζα της f τότε f δεν έχει ρίζα στο $[x_1, x_2) \cup (x_2, \beta]$)
3. Να αποδείξετε ότι αν το α είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $(\alpha, x_1]$ (Όμοια αν το β είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $[x_2, \beta)$)
4. Να αποδείξετε ότι η f έχει ρίζα στο (α, x_1) αν και μόνο αν

$$f(\alpha) f(x_1) < 0$$

797. Να βρείτε πόσες ρίζες της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ ανήκουν στο διάστημα $[-2, 3]$.

798. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών α, β και για κάθε *θετικό πραγματικό* $r > 1$ ισχύει:

$$|\alpha + \beta|^r \le 2^{r-1} \left(|\alpha|^r + |\beta|^r \right)$$

Υποδειξη: Να εξετάσετε χωριστά την τετριμένη περίπτωση όπου $\beta = 0$. Με $\beta \neq 0$, λόγω της τριγωνικής ανισότητας αρκεί να αποδείξουμε ότι $2^{r-1}\left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^r + 1\right) - \left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + 1\right)^r \ge 0$. Εργασθείτε με την συνάρτηση $f(x) = 2^{r-1}(x^r + 1) - (x + 1)^r$, $x \ge 0$.

799. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί με μεθόδους της Άλγεβρας (μην επιχειρήσετε να το αποδείξετε) ότι εξίσωση

$$2x^5 - 5x^4 + 5 = 0 \qquad (E)$$

δεν επιλύεται (δηλαδή δεν είναι δυνατό να βρούμε τύπους που να παρέχουν τις ρίζες της με χρήση των τεσσάρων πράξεων και εξαγωγή ριζών). Να αποδείξετε ότι η (E) έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

800. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = x$.

801. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x = x - 1$.

802. Να αποδείξετε ότι

1. $x^2 - x > x \ln x > x - 1$
2. $x^2 - 1 > 2x \ln x > 2(x-1)\ ,\qquad x > 1$

803. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη IV. Να αποδείξετε ότι

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$$

για κάθε $x \in [1, +\infty)$

804. Να αποδείξετε ότι η

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

805. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + \ln x + x^{2001} + 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f \circ g$.

806. Να λύσετε την εξίσωση

$$\lim_{x \to y} 2^{e^x - y - 1} = 1$$

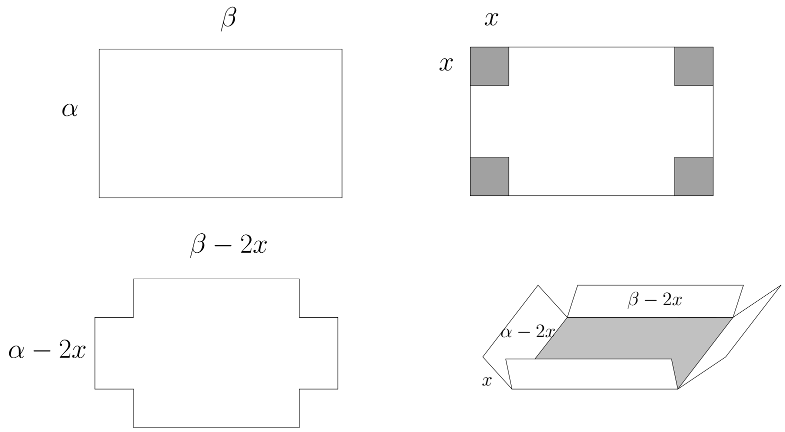
807. Να αποδείξετε ότι για $\alpha > 1$ η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x^2 + \alpha^2}$$

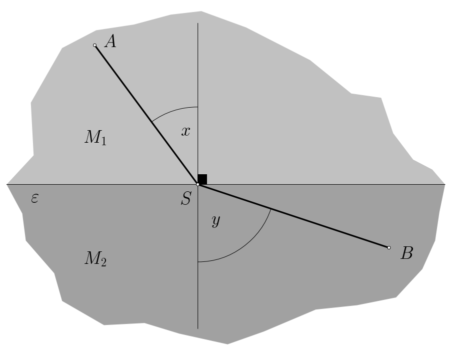
είναι γνησίως αύξουσα.

808. Από το διαγωνισμό Putnam, 1948. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του $\left|z^3 - z + 2\right|$ όταν z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z| = 1$;

809. Ένα κομμάτι χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις $\alpha < \beta$. Από αυτό αποκόπτουμε τέσσερα τετράγωνα πλευράς x (βλέπε σχήμα) και κατασκευάζουμε ένα κουτί ανοικτό επάνω. Πως πρέπει να επιλεγεί το x ώστε το κουτί να έχει την μέγιστη δυνατή χωρητικότητα;



810. Η αρχή του Fermat. Ένα κινητό μπορει να κινηθεί στο μέσο M_1 με ταχύτητα υ_1 και στο μέσο M_2 με ταχύτητα υ_2. Τα δύο μέσα διαχωρίζονται από την ευθεία ε.



Pierre Fermat
1601-1665

Να αποδείξετε ότι αν κινηθεί από το A στο B κατά τη διαδρομή ASB ο χρόνος κίνησης θα είναι ελάχιστος εφόσον το σημείο S επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$

811. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$f\left(x\right) = \lambda x^3 + x^2 + \left(1 - 3\lambda\right)x + 2\lambda - 2$$

1. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο λ η γραφική παράσταση της $f\left(x\right)$ διέρχεται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να προσδιορίσετε.

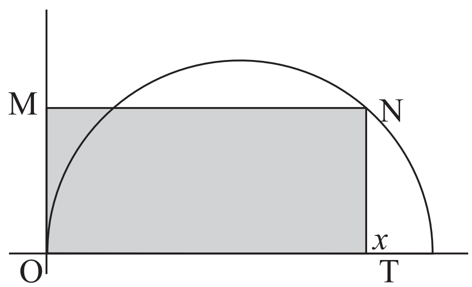
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f\left(x\right)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

812. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1977 και 1982. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ και ότι $f(x_0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > f(x_0)$ για όλα τα $x > x_0$. Υπόδειξη: Εργασθείτε με την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

Johann Bernoulli
1667 - 1748

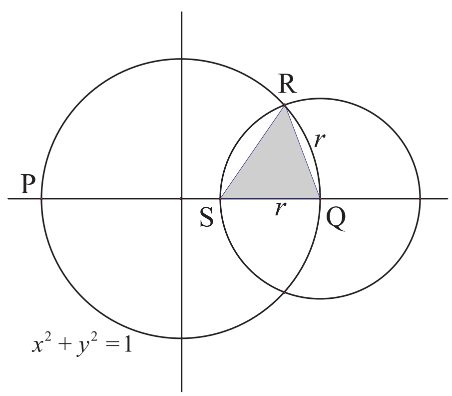
813. Μία συνάρτηση, ορισμένη σε κλειστό διάστημα, μηδενίζεται στα άκρα του και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση παίρνει μία θετική τιμή τότε θα υπάρχει εσωτερικό σημείο του διαστήματος όπου η δεύτερη παράγωγος της θα είναι αρνητική.

814. Ένα πρόβλημα του Johann Bernoulli. Το ημικύκλιο του σχήματος έχει διάμετρο 1 και το M είναι μεταβλητό σημείο του. Να βρεθεί το x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου OMNT να είναι μέγιστο.



815. Από τις εξετάσεις I.I.T, Ινδία, 1994. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ τέμνει τον x-άξονα στα P, Q.

Ένας άλλος κύκλος με κέντρο το Q και μεταβλητή ακτίνα, τέμνει τον πρώτο κύκλο, πάνω από τον x-άξονα στο R και το ευθύγραμμο τμήμα PQ στο S. Να βρείτε το μέγιστο του εμβαδού του τριγώνου QSR.

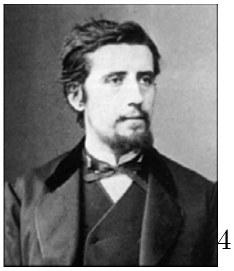


816. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1987. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

όπου α θετικός έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Υπόδειξη: Να ονομάσετε $f(x) = \alpha e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$. Η περίπτωση όπου $\alpha \geq 1$ είναι εύκολη διότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Η περίπτωση όπου $0 < \alpha < 1$ θέλει μεγαλύτερη προσοχή. Στην περίπτωση αυτή η f' έχει δύο ρίζες. Δείτε τι τιμές παίρνει η f ε αυτές τις ρίζες.



Jean Gaston Darboux
1842-1917

817. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2000. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

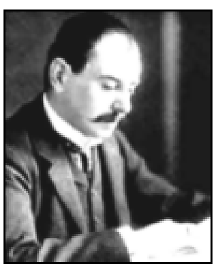
$$f(x) + f'(x) \leq 1$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $f(1)$; (Υπόδειξη[1]: Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $e^x f(x)$.)

4.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

818. Το Θεώρημα του Darboux. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος f' της f έχει την διότητα των ενδιαμέσων τιμών, δηλαδή κάθε αριθμός y μεταξύ δύο τιμών $y_1 = f'(x_1)$, $y_2 = f'(x_2)$ είναι τιμή της f'.

Υπόδειξη: Εργασθείτε με την περίπτωση που $x_1 < x_2$, $y_1 < y < y_2$ (Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ανάλογα). Έστω $g(x) = f(x) - y(x - x_1)$ Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και επομένως έχει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in [x_1, x_2]$. Δείξτε ότι αυτό το x_0 θα πρέπει να είναι εσωτερικό του διαστήματος $[x_1, x_2]$. Στην συνέχεια χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Fermat για να συμπεράνετε ότι θα είναι $f'(x_0) = y$.



Edmund Landau
1877-1950

819. Η ανισότητα του Cauchy. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι ν μη αρνητικοί αριθμοί τότε ισχύει

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε επαγωγή στο ν. Υποθέστε ότι το αποδεικτέο ισχύει για ν και για να αποδείξετε ότι ισχύει για $\nu + 1$ να εργασθείτε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu + x}{\nu + 1} - \sqrt[\nu+1]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu \cdot x}$

820. Η ανισότητα του Landau. Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία για όλα τα x ισχύουν:

- $|f(x)| \leq A$
- $|f''(x)| \leq B$

Να αποδειχθεί ότι για όλα τα x ισχύει

- $|f'(x)| \leq A + B$

821. Έστω $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)|^\alpha \leq |x - y|$$

για όλα τα x, y. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

[1] Η υπόδειξη δόθηκε στους διαγωνιζόμενους

3.5 Ο ρόλος της δεύτερης παραγώγου

3.5.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

822. Να αποδείξετε ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση f στρέφει τα κυρτά προς τα κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
4. $f(x) = 12x^2 + 12x + 12$
5. $f(x) = x - \sqrt{x}$
6. $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

823. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι κυρτή ή κοίλη:

1. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$
2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x\ln x + x$
4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \eta\mu x$
6. $f(x) = x\ln x - x - \frac{1}{12}x^4$

824. Να βρείτε τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18$
2. $f(x) = 2x^2\ln x - 5x^2 + 1$
3. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$
4. $f(x) = 12x^2e^x - 84xe^x + 168e^x - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 1$
5. $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$
6. $f(x) = e^{x - x^2}$

3.5.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

825. Για ποιές τιμές του α ή συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4\alpha x^3 + 8x^2 + 20$$

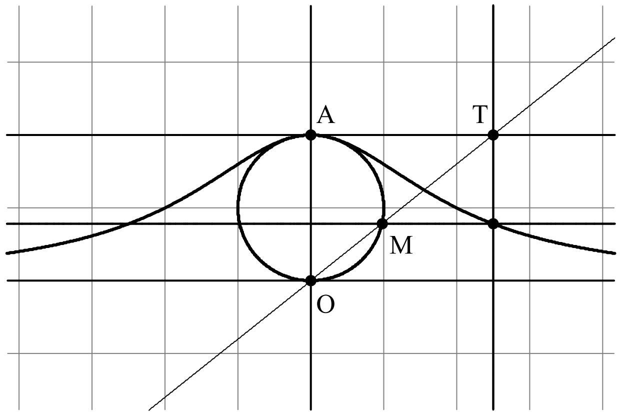
στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε όλο το $\mathbb{R}$;

826. Το σημείο $A(1, 3)$ είναι σημείο καμπής της

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$$

Βρείτε τα α, β.

827. *Η «μάγισσα»*[2] *της Agnesi* Έστω ο κύκλος με διάμετρο ΟΑ όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Α$(0, \alpha)$, $\alpha > 0$. Σε κάθε σημείο Τ(x, α) της ευθείας $y = \alpha$ αντιστοιχούμε το σημείο τομής Μ της ευθείας ΟΤ με την κύκλο. Έστω y η τεταγμένη του Μ. Ορίζεται τότε μία συνάρτηση $y = f(x)$.



1. Να βρεθεί ο τύπος της f
2. Να βρεθουν τα σημεία καμπής της f

Maria Gaetana Agnesi
1718 - 1799

828. Από τις εξετάσεις του 1985, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x-3)+4$, για $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε x_1, x_2 τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

829. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι.

1. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει $f(x) f''(x) \geq (f'(x))^2$.
2. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln\left(x^2+2\right)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

830. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

έχει τρία συνευθειακά σημεία καμπής.

[2] versiera από το λατινικό vertere που σημαίνει «στρέφω». Ωστόσο versiera ήταν και συντόμευση της λέξης avversiera που σημαινε και «μάγισσα». Από ένα μεταφραστικό λάθος στα Αγγλικά αποδόθηκε ως witch και έτσι έμεινε στην βιβλιογραφία.

831. Έστω ότι η f είναι ορισμένη και δύο φορές παράγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ότι $f(\alpha) = f(\beta) = m$ και $f''(x) < 0$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq m$ για όλα τα x.

832. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x) f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

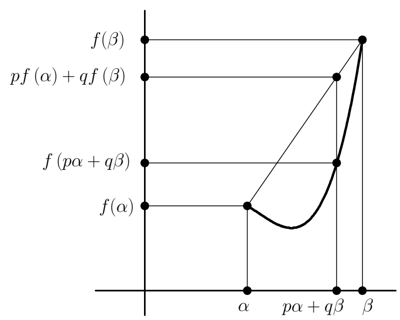
833. 1. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\ \beta]$

(α′) Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

(β′) Γενικότερα να αποδείξετε ότι αν $p > 0,\ \ q > 0$ με $p + q = 1$ τότε ισχύει

$$f(p\alpha + q\beta) < pf(\alpha) + qf(\beta)$$



(γ′) Πως θα διατυπώνονταν οι ανισότητες των προηγουμένων ερωτημάτων αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\ \beta]$;

2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

(α′) $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2}, \quad (\alpha < \beta)$

(β′) $\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^{\nu} \leq \frac{|\alpha|^{\nu}+|\beta|^{\nu}}{2}$

(γ′) $\eta\mu\left(\frac{13}{31}x + \frac{18}{31}y\right) > \frac{13}{31}\eta\mu x + \frac{18}{31}\eta\mu y \quad 0 < x < y < \pi$

834. Από τις εξετάσεις του 1986, Δέσμη I. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του α, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

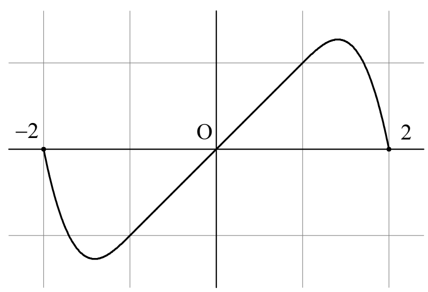
835. Από τις εξετάσεις του 2003. Στις εξετάσεις του έτους 2003 δόθηκε το ακόλουθο θέμα:

> Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ'ενα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ να αποδείξετε ότι:
>
> 1. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).
> 2. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
> 3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Αφού διαβάσετε τα σχετικά με το σημείο καμπής από το βιβλίο σας:

1. Να απαντήσετε τα δύο πρώτα ερωτήματα.
2. Να θεωρήσετε την συνάρτηση $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 6x^2 - 5x - 2 & , \quad -2 \le x \le -1 \\ x & , \quad -1 < x < 1 \\ -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



και στη συνέχεια:

(α') Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2 - 12x - 5 & , \quad -2 \le x \le -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ -6x^2 + 12x - 5 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

(β')

$$f''(x) = \begin{cases} -12x - 12 & , \quad -2 \le x \le -1 \\ 0 & , \quad -1 < x < 1 \\ -12x + 12 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

(γ′) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

3. Από το β′) συνάγεται ότι το ερώτημα γ′) του θέματος είναι λάθος. Γιατί;

836. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4\left(f'(x) - f(x)\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή $\mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

837. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι.

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

2. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \left(\lambda^2 - 4\right) - (\lambda - 2)$$

838. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha \neq 0$ και $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι

1. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο x_1, τοπικό μέγιστο σε κάποιο x_2 και καμπή σε κάποιο x_3.

2. Δείξτε ότι $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι μέσο του τμήματος με άκρα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$

Υποδειξη: (για το (β′)) Δείξτε πρώτα ότι

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2 (3\alpha(x_1 + x_2) + 2\beta)$$

839. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

1. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

2. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)\,g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Υποδειξη: (για το (β′)) Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $\ln g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right) \le \ln\sqrt{g(x_1)\,g(x_2)}$ ή ισοδύναμα ότι $\ln g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\ln g(x_1)+\frac{1}{2}\ln g(x_2)$. Μπορείτε να εργασθείτε όπως στην άσκηση 833 με τη συνάρτηση $f(x)=\ln g(x)$.

840. 1. Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με παράγωγο γνησίως αύξουσα και θετική στο α. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δε μπορεί να είναι κυρτή.

3.5.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

841. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f''(x)>0$ για όλα τα x τότε για κάθε $x_1,x_2,...,x_\nu\in\Delta$ και $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\nu\in[0,1]$ με $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_\nu=1$ ισχύει

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_\nu x_\nu)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+...+\lambda_\nu f(x_\nu)$$

3.6 Οι κανόνες Bernoulli-De l' Hospital

3.6.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

842. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x^\alpha-1}$
7. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(x-1)}{x^2+x-10}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu(\beta x)}$

843. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{\ln(x^2+1)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)+\ln(x+2)}{\ln(x+3)+\ln(x+4)}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)-x}{\ln(2-x)-2x}$

844. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$
7. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\varepsilon\varphi x$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

845. Βρείτε το όριο

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu\left(\theta\sigma\upsilon\nu\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\theta\eta\mu\theta\right)}$$

846. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2006. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sigma\upsilon\nu x}-1-x}{\eta\mu x^2}$$

3.6.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

847. Έστω η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+x+\lambda-2 & x\le 1\\ \frac{x^{\lambda}-1}{x-1} & x>1\end{cases}$$

όπου

$$\lambda>0$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Υπάρχουν άραγε τιμές του λ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη;

848. Έστω φ ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi\left(x\right)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\varphi\left(x\right)}=0$$

2. Ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς;

   (α′) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\varphi(x)}{e^x}-\frac{\ln x}{\varphi(x)}\right)=0$

   (β′) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi^2(x)-e^x\ln x}{e^x\ln x}=-1$

   (γ′) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varphi^2\left(x\right)-e^x\ln x\right)=0$

849. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha}$$

850. Για ποιά τιμή του λ η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda & , \quad x=0\\ x^{x} & , \quad x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

είναι συνεχής;

851. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\frac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν ϕ είναι μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}\backslash\left\{\alpha\right\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f\left(x\right)}{\left(x-\alpha\right)^{2}g\left(x\right)}=\frac{A}{\left(x-\alpha\right)^{2}}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{\phi\left(x\right)}{g\left(x\right)}\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\alpha\right\}$$

να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\phi\left(x\right)$.

Υποδειξη: Λύνοντας την δοθείσα σχέση ως προς $\phi\left(x\right)$ θα βρείτε ότι $\phi\left(x\right)=\frac{f(x)-Ag(x)-Bg(x)x+Bg(x)\alpha}{x^{2}-2\alpha x+\alpha^{2}}$. Κατόπιν βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha}\phi\left(x\right)$ με την βοήθεια του κανόνα του De l' Hospital. Η τιμή που πρέπει να βρείτε για το όριο είναι $\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)g^{2}(\alpha)-f(\alpha)g''(\alpha)g(\alpha)-2g'(\alpha)f'(\alpha)g(\alpha)+2f(\alpha)(g')^{2}(\alpha)}{g^{2}(\alpha)}$ ή αλλιώς $\frac{1}{2}\left(f''\left(\alpha\right)-Ag''\left(\alpha\right)-2Bg'\left(\alpha\right)\right)$.

852. Από τις εξετάσεις Mathematical Tripos, Cambridge, 1925. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο a τότε

$$f''\left(a\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-2f\left(a\right)+f\left(a-h\right)}{h^{2}}$$

853. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to\sigma}f\left(x\right)=0$ και ότι δεν μηδενίζεται κοντά στο 0. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{e^{f(x)}+\eta\mu f(x)-1}{f(x)}$

854. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\alpha^{x}}=0$.

3.6.3 Γ΄ ΟΜΑΔΑ

855. Αν οι α,β,γ είναι θετικοί βρείτε το

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha^{x^{3}}+\beta^{x^{3}}+\gamma^{x^{3}}}{\alpha^{x^{2}}+\beta^{x^{2}}+\gamma^{x^{2}}}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$$

856. Με $0<\alpha<\beta<\gamma$ βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^{x}+\beta^{x}+\gamma^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.7 Ασύμπτωτοι

3.7.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

857. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασυμπτώτους των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
2. $\varphi(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$
3. $\sigma(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$
4. $g(x) = \frac{x}{x^3-x-x^2+1}$
5. $h(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$
6. $\theta(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

858. Να βρείτε τις ασυμπτώτους για $x \to +\infty$ της συνάρτησης f στις περιπτώσεις:

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} + \sqrt{x^2-1}$
4. $f(x) = \frac{\left|4-x^2\right|}{|x+1|+|1-x|}$
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x+1}}$
6. $f(x) = \frac{(x+1)2^x}{2^x+1}$

3.7.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

859. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της $\mathcal{C}_f$ όταν

$$f(x) = \frac{\left|x^2-1\right| - 5x}{x+1}$$

860. Έστω

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $A(0,-6)$ έχει άλλο ένα κοινό σημείο με την $\mathcal{C}_f$ του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

861. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της συνάρτησης $f(x) = \ln\frac{x^2-1}{x-2}$.

862. Έστω

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1. Να βρεθούν οι ασύμπτωτοι της $\mathcal{C}_f$.

2. Υπάρχουν άραγε κοινά σημεία της $\mathcal{C}_f$ και των ασυμπτώτων της;

863. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη IV. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

1. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$.

2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

864. Για τις συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Να αποδείξετε ότι αν η $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτος της f για $x \to +\infty$ τότε θα είναι και ασύμπτωτος της g για $x \to +\infty$.

865. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους;

866. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι υπάρχει θ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$|f(x)| \leq \theta$$

Έχει άραγε η f κατακόρυφες ασυμπτώτους;

3.7.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

867. Θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ και τους οποιουσδήποτε αριθμούς $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_\nu$. Να βρεθούν οι αριθμοί A, B έτσι ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \sqrt{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2} + ... + \sqrt{\alpha_\nu x^2 + \beta_\nu x + \gamma_\nu} - Ax - B \right) = 0$$

868. Για κάθε συνάρτηση φ που έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ με $\hat{\varphi}$ συμβολίζουμε την συνάρτηση $\hat{\varphi}(x) = \kappa x + \lambda$. Να αποδείξετε ότι αν

- Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο με θετικό συντελεστή διευθύνσεως
- Η συνάρτηση g έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο

τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο ισχύει

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$$

869. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική προσέγγιση συναρτήσεων για $x \to \pm\infty$ όχι από ευθείες $y = \alpha x + \beta$ αλλά από συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha e^x + \beta$. Γράψτε μία «θεωρία» για αυτό το είδος ασυμπτώτων. Βρείτε και μερικά παραδείγματα.

3.8 Μελέτη και γραφική παράσταση.

3.8.1 Α' ΟΜΑΔΑ

870. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

871. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

872. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - |x| - 2$. Να γίνει η μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

873. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(2x^3 - 24x^2 + 72x - 6\right)$$

874. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$.

3.8.2 Β' ΟΜΑΔΑ

875. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε

$$(x-2) f''(x) + \left(\alpha\eta\mu x - \beta x^2\right) f'(x) = e^{x-2} - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

876. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x_0) = f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(\nu)}(x_0) = 0$ και $f^{(\nu+1)}(x_0) \neq 0$ και η $f^{(\nu+1)}$ είναι συνεχής. Να επαληθεύσετε τα συμπεράσματα του ακόλουθου πίνακα:

$\mathbf{f}^{(\nu+1)}(\mathbf{x_0})$ / ν	*αν ο ν είναι άρτιος*	*αν ο ν είναι περιττός*
αν $\mathbf{f}^{(\nu+1)}(\mathbf{x_0}) > \mathbf{0}$	τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0	τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
αν $\mathbf{f}^{(\nu+1)}(\mathbf{x_0}) < \mathbf{0}$	τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0	τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0

3.8.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

877. Για μία συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

1. $f'(x) = e^{-x^2}(x-1)^2(2-x)$ για όλα τα x
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Να μελετήσετε την f όσο καλλίτερα μπορείτε . Μην επιχειρήσετε να την βρείτε!!

3.9 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

878. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f. Είναι ολικά;
3. Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x}$$
4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
5. Για ποιές τιμές του λ ισχύει
$$f(x) \geq \lambda + 1$$
για όλα τα x;
6. Να αποδείξετε ότι για κάθε ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ που έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως με της (ε).

879. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.
2. Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

880. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.
2. Πόσες ρίζες έχει η f;
3. Υπάρχουν άραγε πραγματικοί αριθμοί t τέτοιοι ώστε $f(t) = t$;
4. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης
$$g(x) = \eta\mu f(\eta\mu x)$$

881. Έστω η συνάρτηση
$$f\left(x\right)=x^{\ln x}$$

1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να βρείτε το οριο της $f(x)$ όταν $x\to+\infty$

882. Από τις εξετάσεις του 1989, Δέσμη Ι. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:
i) Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
ii) $f''=g''$
ii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$.
Να δειχθεί ότι:

1. Για κάθε $x\in\Delta, f(x)-g(x)=cx$ όπου $c\in\mathbb{R}$.
2. Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1<\rho_2$ τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\ \rho_2]$.

883. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ και κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει[3]
$$e^x>\sum_{k=0}^{\nu}\frac{x^k}{k!}$$

884. 1. Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)$$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ με
$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{array}\right.$$
Να αποδείξετε ότι η f :
(α') Είναι συνεχής
(β') Είναι παραγωγίσιμη
(γ') Έχει ακριβώς μία ρίζα.

885. Δίνονται οι συναρτήσεις
$$f\left(x\right)=x^2-4x+2$$
$$g\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\alpha x^2-\beta x+\frac{1}{3}$$

[3] Αν k είναι θετικός ακέραιος το $k!$ είναι $k!=1\cdot2\cdot...\cdot k$. Επίσης ορίζεται $0!=1$

1. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε οι δύο συναρτήσεις να έχουν θέση τοπικού ακροτάτου στο $x_0 \in \mathbb{R}$ με
$$f(x_0) = g(x_0) = -2$$

2. Για την τιμή των α, β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

   (α′) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $h(x) = f(x)g(x)$

   (β′) Να βρείτε το όριο:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{f(x)}}{g(e^x)}$$

   (γ′) Να αποδείξετε ότι η συναρτηση $r(x) = f(g(x))$ έχει ελάχιστο.

886. Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι κυρτή και για κάποιο ζεύγος αριθμών $\alpha < \beta$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

887. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^5 (x-\lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa} + \frac{3}{x-\lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

2. Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ).

888. Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = x + \eta\mu x$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε άπειρα σημεία που απέχουν από την αρχή των αξόνων αποστάσεις $\nu\pi\sqrt{2}$, $\nu = 0, 1, 2, ...$ και είναι σημεία καμπής της f.

3. Είναι η $y = x$ ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$;

4. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση ενός σημείου της $\mathcal{C}_f$ από την $y = x$;

889. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - \ln x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

890. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει

$$f^2(x) + \ln^2 x + e^{2x} = 2e^x f(x) - g^2(x) + 2g(x)\ln x$$

για κάθε $x > 0$.

1. Να βρείτε τις f, g
2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

891. Να αποδείξετε ότι αν η $\varphi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ παρουσιάζει ακρότατα σε σημεία που βρίσκονται σε ευθεία η οποία διεέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα ισχύει $\beta\gamma = 9\alpha\delta$.

892. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

893. Από τις εξετάσεις του 2004. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

894. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}$ έχει ασύμπτωτο την πρώτη διχοτόμο των αξόνων.

895. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Να δείξετε ότι οι f, g παρουσιάζουν μέγιστο καιελάχιστο αντιστοίχως όταν $x = \frac{\pi}{4}$.
2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x > \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

896. Για ποιά τιμή του α η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 1$ εφάπτεται στην $y = 5$.

897. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$.

898. Έστω η οικογένεια των συναρτήσεων

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x + x \ln x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f είναι συνεχείς.

2. Να δείξετε ότι για κάθε λ η f χει μία μόνο οριζόντια εγαπτομένη και ότι το σημείο επαφής ανήκει στην ευθεία $y = -x$.

899. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμες. Επίσης ισχύουν:

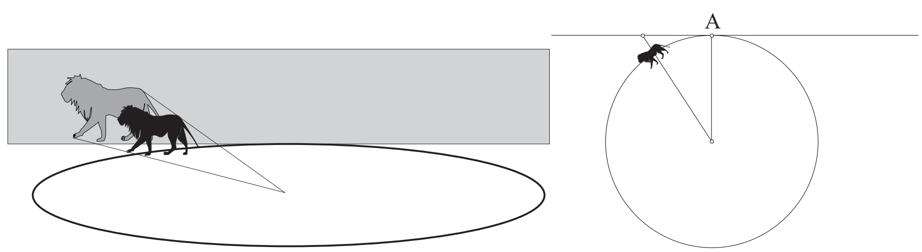
- $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$
- $f''(x)\, g(x) = f(x)\, g''(x)$

1. Να αποδειχθεί ότι $f'(x)\, g(x) = f(x)\, g'(x)$

2. Να αποδειχθεί ότι αν κανένας αριθμός του $[\alpha, \beta]$ δεν είναι ρίζα της g τότε κάθε αριθμός του $[\alpha, \beta]$ είναι ρίζα της f,

900. Οι αριθμοί α, β, x είναι θετικοί, οι α, β σταθεροί και ο x μεταβλητός, Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\alpha x + \frac{\beta}{x}$;

901. Ένα λιοντάρι κινείται στην κυκλική πίστα ενός τσίρκου με ταχύτητα $20km/h$ με σημείο το εκκίνησης A. Στο κέντρο της πίστας βρίσκεται ένας προβολέας που φωτίζει το λιοντάρι. Ένα πέτασμα εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A και σε αυτό φαίνεται η σκιά του λιονταριού. Με τι ταχύτητα κινείται η σκιά τη χρονική στιγμή που το λιοντάρι έχει διανύσει το $\frac{1}{8}$ του κύκλου;



902. Από τις εξετάσεις του 2006. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού τους.

3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $\mathrm{A}(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $\mathrm{B}(\beta, e^{\beta})$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

903. Για τη συνάρτηση $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$-x^2 \leq h(x) \leq x^2 + 1$$

για όλα τα x και ότι το "=" στην πρώτη ανισότητα ισχύει για $x = -1$ και στη δεύτερη ισχύει για $x = 1$. Να βρεθεί η $h(x)$.

904. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2005. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία λεία[4] συνάρτηση τέτοια ώστε

$$(f'(x))^2 = f(x)f''(x)$$

για όλα τα x. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$ και $f^{(4)}(0) = 9$. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $f'(0)$.

905. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάποια x_1, x_2, x_3 με $0 < x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει $f(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, 3$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν t_1, t_2 με $0 < x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < x_3$ έτσι ώστε $f'(t_i) = \frac{f(t_i)}{t_i}$, $i = 1, 2$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

906. 1. Να αποδέιξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένα y έτσι ώστε $y^3 + y = e^x + x$

2. Η συνάρτηση f ορίζεται από τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = e^x + x \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') Για κάθε x_0 ισχύει

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1}\left((e^x + x) - (e^{x_0} + x_0)\right)$$

(β') Για κάθε x_0 ισχύει $|f(x) - f(x_0)| \leq |e^x + x - e^{x_0} - x_0|$

(γ') Η f είναι συνεχής.

[4] Δηλαδή έχει παραγώγους όλων των τάξεων.

(δ΄) Η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{e^x+1}{3f^2(x)+1}$.

(ε΄) Η f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

907. Έστω $f(x) = \ln x$ και $0 < \alpha < \beta$.

1. Να βρείτε το (μοναδικό) $\gamma \in [\alpha, \beta]$ που επαληθεύει το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $\alpha < \beta$.
2. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

908.

1. Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τέτοια ώστε $\alpha < \beta < \gamma$. Έστω ότι

$$(f(\beta) - f(\alpha))(f(\gamma) - f(\beta)) < 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$

2. Να αποδείξετε το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς όμως την υπόθεση συνεχείας της f'.

909. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \le 1 \\ \frac{1}{x} & |x| > 1 \end{cases}$$

1. Να βρείτε σε ποια x_0 η f είναι συνεχής.
2. Να βρείτε σε ποια x_0 η f είναι παραγωγίσιμη.
3. Να κάνετε, πρόχειρα, την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
4. Υπάρχει άραγε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F' = f$;

910. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $f(0) = 0$, είναι παραγωγίσιμη στο 0, $f'(0) = \frac{1}{2}$ και ότι για όλα τα x, y ισχύει:

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για όλα τα x.
2. Να αποδείξετε ότι η $f(x) \neq 1$ και $f(x) \neq -1$ για όλα τα x.
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη καί ότι για όλα τα x ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - f^2(x)\right)$$

4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη,

5. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει:

$$\frac{(f(x)+1)'}{f(x)+1} - \frac{(f(x)-1)'}{f(x)-1} = 1$$

6. Να βρείτε την f.

911. Από τις εξετάσεις του 2001. Για μία πραγματική συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$.

912. Από τις εξετάσεις του 2002. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

1. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g(f(x) + 2x - 1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

913. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g(x) f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $\mathrm{B}(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$. [5]

914. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

[5] Όταν τελειώσετε τη λύση απαντήστε στα ερωτήματα: Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες; Πότε οι ευθείες $y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha' x + \beta'$ είναι παράλληλες; Δοκιμάστε $f(x) = e^{-x^2} + \frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{2e}}$, $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $g(x) = \frac{2f(x)}{f'(x)}$. Τί έχετε να πείτε για το τελευάιο ερώτημα του θέματος της άσκησης 780;

1. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f.

915. Από το διαγωνισμό Putnam, 1973. Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση $f(x)=2^x-1-x^2$;

916. Έστω η συνάρτηση (*συνάρτηση του Cauchy*):

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι f', f''.

2. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f.

917. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο α τότε ισχύει $f'(\alpha)\geq 0$.

918. Από τις εξετάσεις του 2008. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

4. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$$

919. Από τις εξετάσεις του 2009. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1), \qquad x>-1$$

όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq -1$.

1. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

2. Για $\alpha=e$

(α′) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(β′) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

(γ′) αν $\beta,\gamma \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

920. Από τις εξετάσεις ΑΣΕΠ του 2009. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$$

$0<x<1$ και $\alpha>1$.

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0,1)$.
2. Αποδείξτε ότι για όλα τα $x,y\in(0,1)$ και $\alpha>1$ ισχύει

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

3. Αποδείξτε ότι, αν $x>0, y>0, \alpha>1$ και $x+y=1$, τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\geq\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$$

921. Από τις εξετάσεις του 2010. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$, $0<x<1$ και $\alpha>1$.

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0,1)$.
2. Αποδείξτε ότι για όλα τα $x,y\in(0,1)$ και $\alpha>1$ ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$.
3. Αποδείξτε ότι, αν $x>0, y>0, \alpha>1$ και $x+y=1$, τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\geq\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$$

922. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

- Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
- Η δεύτερη παράγωγος της είναι συνεχής.
- Ισχύει $f(x)\,f''(x)=0$ για όλα τα x.

Βρείτε ποια μπορεί να είναι η f.

923. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=cf(x)$ όπου c είναι σταθερά.

924. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^{(x^x)} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

Βρείτε την $f'(0)$

925. Για μία συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα είναι γνωστό ότι δεν μηδενίζεται και ότι η συνάρτηση $(f(x))^2$ είναι παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι και η f είναι παραγωγίσιμη.

926. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Να μελετηθεί ως προς τις ασυμπτώτους.

927. Από τις εξετάσεις του 2011. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε x.

1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x)$ $x\in\mathbb{R}$.
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.
4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

928. Έστω παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερή.

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώτικός Λογισμός

4.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα: Τα Βασικά

4.1.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

929. Βρείτε από μία παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. e^{x+1}
2. e^{2x}
3. $2e^{x}$
4. e^{2x+1}

930. Βρείτε από μία παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $2x^2 - x + 1$
2. $\frac{1}{x} + e^x$
3. $x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x}$
4. $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

931. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

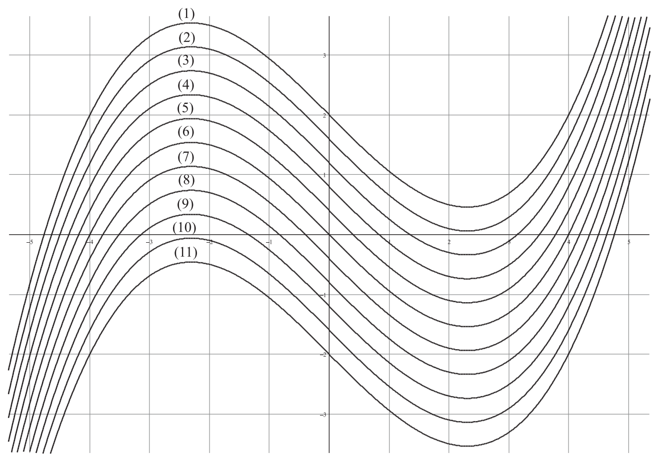
Συνάρτηση	Μία παράγουσα
f	F
g	G
$f+g$	
$fG+gF$	
$\frac{fG-Fg}{G^2}$	
$3fF^2+4gG^3$	

932. Βρείτε από μία παράγουσα F της $f(x) = x + 1$ τέτοια ώστε $F(0) = 1$.

933. Η συνάρτηση f έχει παράγουσα την $F(x) = \frac{x}{e^x} + (x+1)^2$. Να βρείτε μία παράγουσα G ης f τέτοια ώστε $G(\ln 2) = 1$

934. Μπορούν άραγε οι συναρτήσεις $F(x) = e^{x+1} + x$, $G(x) = e^{x+1} - x$ να είναι παράγουσες της ίδιας συνάρτησης·

935. Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζονται μερικές παράγουσες της ίδιας συνάρτησης f δηλαδή η γραφική παράσταση μερικών από τις συναρτήσεις που απαρτίζουν το $\int f(x)\,dx$.



Βρείτε ποιά παράγουσα

1. Έχει ρίζα το 4.
2. Διέρχεται από το σημείο Α$(0, -2)$.

936. Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει το πολύ μία παράγουσα της f που έχει ρίζα τον αριθμό 2009.

4.1.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

937. Είναι γνωστό ότι όταν ένα σώμα κινείται στον αέρα δέχεται αντίσταση από τον αέρα της οποίας ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος της ταχύτητας του. Για ένα συγκεκριμένο σώμα η αντίσταση είναι $4N$ όταν κινείται με ταχύτητα $3m/sec$. Ποια θα είναι η αντίσταση του σώματος όταν κινείται με ταχύτητα $6m/sec$;

938. Ένα μέγεθος $\Xi(t)$ μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t και ο ρυθμός μεταβολής του κάθε χρονική στιγμή είναι διπλάσιος της τιμής του μεγέθους. Βρείτε την τιμή του μεγέθους για $t = 3$ αν γνωρίζετε ότι η τιμή του για $t = 2$ είναι 1.

939. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

- Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι x_0^2.

940. Να αποδείξετε ότι:

$$\int \sqrt{x^2+k}\;dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right] + c$$

941. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

αν και ασυνεχής στο 0 έχει παράγουσα την $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ενώ η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\begin{cases} x & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$$

η οποία είναι επίσης ασυνεχής στο 0 δεν έχει παράγουσα.

942. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $f'(x)=2e^{2x-f(x)}$ για όλα τα x.

943. Έστω f συνεχής με πεδίο ορισμού το το Δ. Να αποδείξετε ότι αν ένα στοιχείο F του $\int f(x)\,dx$ δηλαδή για μία παράγουσα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε και κάθε άλλη έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

944. Έστω f συνεχής με πεδίο ορισμού το Δ. Να αποδείξετε ότι μία παράγουσα F της f είναι γνησίως αύξουσα τότε είναι και οι υπόλοιπες.

945. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4.2 Αόριστο Ολοκλήρωμα: Τεχνικές

946. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (x+1)\,dx$
2. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)dx$
3. $\int \frac{x+1}{x^2}dx$
4. $\int \frac{x^3+1}{x^6}dx$

947. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sqrt{x+1}dx$
2. $\int \eta\mu\,(2x)\,dx$
3. $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$
4. $\int e^{x-1}dx$

948. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sqrt[13]{x}^{18}dx$
2. $\int \frac{1}{1+\frac{1}{x}}dx$
3. $\int (x+1)(x+2)\,dx$
4. $\int \frac{x+1}{x+2}dx$

949. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \left(x^2 + y\right) dx$
2. $\int \left(x^2 + y\right) dy$
3. $\int \left(\frac{1}{x+1} + \eta\mu x\right) dx$
4. $\int \sqrt{3x+2}dx$

950. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x\sqrt{x}dx$
2. $\int \frac{x+\alpha}{x+\beta}dx$
3. $\int \frac{x+y}{x-y}dx$
4. $\int \frac{x+y}{x-y}dy$

951. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (x+1)(x+2)(x+3)\, dx$
2. $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}dx$
3. $\int (x^m + x^n)\, dx$
4. $\int \eta\mu\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) dx$

952. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int xe^{x^2} dx$
2. $\int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}\right) dx$
3. $\int x\eta\mu x dx$
4. $\int \left(x^2 + y^2\right) dx$

953. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int e^{x+2}(x-1)\, dx$
2. $\int xe^{x+1}dx$
3. $\int x^2e^{x+1}dx$
4. $\int |x|\, dx$

954. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$
2. $\int \left(e^{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) dx$
3. $\int \eta\mu t\sigma\upsilon\nu t dt$
4. $\int \frac{e^x}{e+1}dx$

955. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x3^x dx$
2. $\int \left(\frac{p}{p+q}\right)^t dt$
3. $\int \left(\frac{p}{p+q}\right)^t dq$
4. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

956. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$
2. $\int \frac{6x^3+x-2}{x^2-3x+2}dx$
3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$
4. $\int \left(e^x + x^e\right)dx$

957. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2+1\right)dx$
2. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 13x}dx$
3. $\int \frac{5x^2+3x+1}{x-1}dx$
4. $\int \frac{5x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)}dx$

958. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int xe^{3x-1}dx$
2. $\int \left(x^3+e^3+\eta\mu x\right)dx$
3. $\int \eta\mu\left(2x\right)\eta\mu\left(3x\right)dx$
4. $\int \sigma\upsilon\nu\left(3x+\pi\right)dx$

959. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sigma\upsilon\nu\left(3x+\pi\right)\eta\mu\left(2x-\pi\right)dx$
2. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$
3. $\int \left(2^x+3^x\right)dx$
4. $\int \left(1+4x\right)^{\frac{3}{5}}dx$

960. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x^3 e^{x^4}dx$
2. $\int x^3 e^x dx$
3. $\int \left(\eta\mu x+1\right)^2$
4. $\int \left(\left(x-2\right)^2+\left(x-3\right)^2\right)dx$

961. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-3)^2}\right)dx$
2. $\int \left(x-2\right)^2\left(x-3\right)^2dx$
3. $\int e^{\alpha x+\beta x}dx$
4. $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x}dx$

962. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{u^5}{13u^6+18}du$
2. $\int x\ln\sqrt{x}$
3. $\int \left(\alpha x+\beta\right)^{\gamma}dx$
4. $\int 2\left(\frac{4}{7}\right)^t dt$

963. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int f\left(x\right)dx$ όταν $f\left(x\right)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$
2. $\int \frac{x}{1+|x|}dx$

964. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$
2. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$
3. $\int \sqrt{2x-3}dx$
4. $\int \sqrt{\frac{1}{x-1}}dx$

965. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{(\ln(x))^5}{x}dx$
2. $\int \left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}} x^2dx$
3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
4. $\int xe^{4x^2+5}dx$

4.2.1 Β′ ΟΜΑΔΑ

966. Έστω x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του πολυωνύμου x^3-7x^2+6x. Αφού προσδιορίσετε αριθμούς α, β, γ έτσι ώστε για κάθε x διάφορο των x_1, x_2, x_3 να ισχύει

$$\frac{1}{x^3-7x^2+6x} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2} + \frac{\gamma}{x-x_3}$$

κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^3-7x^2+6x}dx$$

967. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$.

1. Να βρείτε αριθμούς A, B, Γ, Δ, E έτσι ώστε $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x-2} + \frac{\Delta}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}$.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$

968. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \varepsilon\varphi^2 x dx$

969. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}dx$.

970. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

971. Να βρεθεί συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$ τέτοια ώστε:

1. $f''(x)\sqrt{x-1} = 1$
2. Η γραφική παράσταση της f να έχει εφαπτομένη στο σημείο $(2, f(2))$ την ευθεία $3y-3x+5=0$

972. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

973. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$

974. Χρησιμοποιείστε τον καθολικό μετασχηματισμό του Euler, $t = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, για υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$

975. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$

976. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = x + \frac{1}{x}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)dx$$

977. Έστω ότι

$$I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$$

$$J_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $$I_\nu = -\frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$$

2. $$J_\nu = \frac{1}{\nu}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu}J_{\nu-2}$$

978. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2}{(\alpha x^3+\beta)^\nu}dx$ όπου ν είναι φυσικός μεγαλύτερος του 1.

979. Έστω $f(x) = \alpha 2^x + \beta$. Να υπολογισθούν τα α, β έτσι ώστε να ισχύει $f'(1) = 2$ και $\int_0^3 f(x)\,dx = 7$.

980. Βρείτε το $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

981. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}dx$.

982. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$

2. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx$

3. $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}dx$

983. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\sqrt{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}dx$

2. $\int \frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$

3. $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}dx$

984. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

985. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\eta\mu^2\left(\sqrt{x}\right)}dx$.

4.2.2 Γ′ ΟΜΑΔΑ

986. Έστω $I_n = \int e^{ax} \sigma\upsilon\nu^n \beta x dx$. Να εκφράσετε το I_n συναρτήσει του I_{n-2}.

987. Έχει αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\ln x} dx$$

που ονομάζεται **λογαριθμικό ολοκλήρωμα** δεν υπολογίζεται δηλαδή μολονότι υπάρχει δε μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων.
Να στηριχθείτε στο παραπάνω για να αποδείξετε ότι και το ολοκλήρωμα

$$\int e^x \ln x dx$$

δεν υπολογίζεται.

988. Το πιο απλό μοντέλο για την περιγραφή της ανάπτυξης ενός πληθυσμού $P(t)$ προκύπτει αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του είναι ανάλογος του ήδη υπάρχοντος πληθυσμού δηλαδή ότι $P'(t) = kP(t)$ (**Εκθετικό μοντέλο**). Συχνά όμως οι πληθυσμοί δε μπορούν να υπερβούν ένα μέγιστο L που καθορίζεται από τις εκάστοτε συνθήκες. Σε μια τέτοια περίπτωση θεωρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος *όχι μόνο* του υπάρχοντος πληθυσμού *αλλά και* των υπαρχόντων περιθωρίων αύξησης δηλαδή του $L - P(t)$. Αντί δηλαδή της σχέσης $P'(t) = kP(t)$ του εκθετικού μοντέλου έχουμε την σχέση:

$$P'(t) = kP(t)(L - P(t))$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$\int \frac{P'(t)}{P(t)(L - P(t))} dt = \int k dt$$

2. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = P(t)$ να αποδείξετε ότι
$$\int \frac{P'(t)}{P(t)(L - P(t))} dt = \int \frac{du}{u(L-u)}$$

3. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $\int \frac{du}{u(L-u)}$ να αποδείξετε ότι
$$P(t) = \frac{Le^{L(kt+c)}}{1 + e^{L(kt+c)}}$$
όπου c σταθερά.

4. Να αποδείξετε ότι
$$P(t) = \frac{LP_0}{P_0 + (L - P_0) e^{-Lkt}}$$
όπου $P_0 = P(0)$

4.3 Ορισμένο Ολοκλήρωμα: Έννοια, Ιδιότητες

4.3.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

989. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$, $\int_0^4 f(x)\,dx = 64$ και $\int_1^3 f(x)\,dx = 20$ να βρείτε το $\int_3^4 f(x)\,dx$.

990. Αν
$$\int_0^{\alpha} (2f(x) + 3g(x)) = 5$$
και
$$-4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx + 5\int_0^{\alpha} g(x)\,dx = 7$$
να βρείτε τα
$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$
και
$$\int_0^{\alpha} g(x)\,dx$$

991. Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
$$\int_3^4 f(x)\,dx - \int_3^2 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^4 f(x)\,dx$$

992. Αν για την συνεχή f ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 4$ να υπολογίσετε την παράσταση:
$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} \beta f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} \alpha f(x)\,dx}{\beta - \alpha} - \int_{\beta}^{\alpha} 3f(x)\,dx$$

993. Έστω $f(x) = e^x$. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

1. $\int_0^t f(x)\,dx = 3$
2. $\int_0^{1+t} f(x)\,dx = 3$
3. $\int_0^1 f(t+x)\,dx = 3$
4. $\int_0^1 tf(x)\,dx = 3$

994. Για ποιούς αριθμούς $b > 1$ ισχύει
$$\int_1^b (b - 4x)\,dx \geq 6 - 5b$$

995. Από τις εξετάσεις του Πανπιστημίου του Τοροντο, 1994.

1. Να υπολογίσετε το $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (t+1)\,\sigma\upsilon\nu\,(2t)\,dt$.

2. Να Επαληθεύσετε την απάντηση σας παραγωγίζοντας.

996. Να αποδείξετε ότι

$$\int_2^3 \left(x^2+\beta x+\gamma\right) dx = 2 - \int_0^1 \left(x^2+\beta x+\gamma\right) dx + 2\int_1^2 \left(x^2+\beta x+\gamma\right) dx$$

4.3.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

997. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^2 (t-\log_2\alpha)\, dt = 2\log_2\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

998. Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

999. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha<\beta$ και για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx = 0$$

τότε $f(x)=0$ για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$.

1000. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{2}{\sqrt{e}} < \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx < 2$$

1001. Να αποδείξετε ότι

$$\ln\sqrt[4]{4} < \int_3^4 \frac{\ln t}{t} dt < \ln\sqrt[3]{3}$$

1002. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα Δ. Υποθέτουμε ότι για δύο υποδιαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\kappa,\lambda]$ του Δ ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx > \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$ και $\int_\kappa^\lambda f(x)\, dx < \int_\kappa^\lambda g(x)\, dx$. Να αποδείξετε ότι οι $(C)_f$, $(C)_g$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

1003. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για όλα τα x. Να λύσετε την εξίσωση $\int_x^{e^x-1} f(t)\, dt = 0$.

4.3.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

1004. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1981. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Βρείτε το όριο

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 x^t f(x)\,dx$$

4.4 Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$

4.4.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

1005. Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις:

1. $f(x)=\int_1^x e^t dt$
2. $g(x)=\int_x^1 \sqrt{t}dt$
3. $h(x)=\int_1^{x^2+x+1} \sqrt{t-2}dt$
4. $s(x)=\int_{x+1}^{4x-2} e^t dt$
5. $w(x)=\int_1^x \left(axe^{-t^2}+b\right)dt$

1006. Έστω $\varphi(x)=\int_0^x \eta\mu t dt$. Βρείτε τα $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

1007. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_2^x(2t-5)\,dt$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $\mathcal{C}_f$ στα σημεία με τετμημένες 2 και 3.

1008. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\int_\alpha^{\alpha x}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}$$

1009. Να βρείτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x)=x\eta\mu x$ και $f(0)=0$.

1010. Έστω $F(x)=\int_2^x e^t dt$, $G(x)=\int_3^{-x}\left(t^2+1\right)dt$. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $(F(x)+G(x))'=e^x-x^2-1$
2. $(F(x)\cdot G(x))'=e^x\int_3^{-x}\left(t^2+1\right)\,dt-x^2\int_2^x e^t\,dt-\int_2^x e^t\,dt$
3. $(F\circ G)'(x)=-\left(x^2+1\right)e^{\int_3^{-x}\left(t^2+1\right)dt}$

1011. Βρείτε το $\int_{-x}^x \frac{e^t+t^2}{e^t+1}dt$.
Υποδειξη: Παραγωγίστε.

1012. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \eta\mu\left(t^2\right)dt}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}$

1013. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) = 4f(x)$.

4.4.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

1014. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι γιά όλα τα $x > 0$ ισχύει

$$x \int_0^x f(t)dt > \int_0^x t f(t)dt$$

1015. Η συνάρτηση $I : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $I(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+5t+6} dt$ είναι συνεχής (γιατι;) και επομένως παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο. Βρείτε τα.

1016. Για την συνεχή συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι δε μηδενίζεται και ότι για όλα τα $x \neq$ και ισχύει

$$\int_0^x f(t)(t+1)\,dt = f^2(x)$$

Να βρείτε την f.

1017. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)' = \begin{vmatrix} \beta'(x) & f(\alpha(x)) \\ \alpha'(x) & f(\beta(x)) \end{vmatrix}$$

1018. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση

$$f(x) = \int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt$$

1019. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Αν $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ και $x > 0$, $t > 0$ να βρείτε:

1. $G''(1)$
2. το $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$

1020. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση

$$g(x) = \int_{x^2}^1 \ln t\,dt$$

1021. Να βρεθεί η παράγωγος της f στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $f(x) = \int_1^x \frac{\eta\mu t}{t} dt$
2. $f(x) = \int_1^x \frac{\eta\mu tx}{tx} dt$

1022. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$ τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ και τη συνάρτηση

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)\,dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
2. $g(x_0) = 2 + f(x_0)$

1023. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_{x+1}^{x-1} \ln t dt$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή-κοίλη.

1024. Έστω
$$f(x) = \int_1^x \frac{t-1}{e^t} dt$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
2. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της f

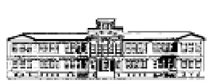
1025. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Με την βοήθεια της

$$g(x) = (1 - x)\int_0^x f(t)\,dt$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)\,dt = (1 - x) f(x)$ έχι μία τουλάχιστον ρίζα.

1026. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για όλα τα x ισχύει:
$$\int_0^x e^t f(x - t)\,dt = \eta\mu x$$

1027. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \left(t^4 - t^3 - t + 2\right) dt$ είναι γνησίως αύξουσα.



1028. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{1}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dx}{1+x^2}$$

1029. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $\int_{x}^{x^3} a^3 dt$.

1030. Για ποια τιμή του x το ολοκλήρωμα $\int_{x}^{x+3} t\,(5-t)\,dt$ γίνεται μέγιστο; Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

1031. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_{0}^{x} \left(e^{\eta\mu t} - \eta\mu t - 1\right) dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

Υποδειξη: Στηριχθείτε στην ανισότητα $e^x \geq x+1$

1032. Να βρείτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία, για όλα τα x, ισχύει

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = xe^x + d$$

1033. Έστω $I(x) = \int_{0}^{x} (1+t)^{\nu}\,dt$. Να αποδείξετε ότι

$$(1+x)\,I''(x) - \nu I'(x) = 0$$

1034. Να βείτε σε ποια x_0 παρουσιάζει ακρότατο ή καμπή η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \int_{0}^{x} (t-1)(t-2)^3\,dt$$

1035. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν είναι γνωστό ότι

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = f(x) - e^x$$

1036. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

1037. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ για την οποία ισχύει

$$2\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = 2\eta\mu x - 1$$

όπου $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του α.

1038. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $F(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt$. Να αποδείξετε ότι $F'(x) = f(x+\alpha) - f(x-\alpha)$.

1039. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για όλα τα x ισχύει

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\eta\mu(\pi x)$$

Να βρείτε τον τύπο της $g(x) = f\left(x^2\right)$.

1040. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2006. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$xg(f(x))\,f'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(f(x))\,f'(x)$$

για όλα τα x. Επιπλέον, η f είναι μη αρνητικη και η g θετική. Ακόμη για κάθε α

$$\int_0^{\alpha} f(g(x))\,dx = 1 - \frac{e^{-2\alpha}}{2}$$

Δοθέντος ότι $g(f(0)) = 1$ να υπολογίσετε το $g(f(4))$.

1041. Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ μία συνεχής συνάρτηση η οποία γίνεται μηδέν μόνο στο μηδέν. Έστω

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x tf(t)\,dt}$$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

1042. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερός. Για την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $\int_{\alpha}^{\alpha x} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \int_1^x f(t)\,dt$ για όλα τα x. Ποια μπορεί να είναι η συνάρτηση f;

Υποδειξη: Να μετασχηματίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\alpha x} f(t)\,dt$.

1043. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για όλα τα x. Έστω ότι για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = \int_0^x g(f(t))\,dt$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο της.

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

1044. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt) + 1$$

1045. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2003. Για ποια τιμή του $\alpha > 1$ το

$$\int_{a}^{a^2} \frac{1}{x} \ln \frac{x-1}{32} dx$$

γίνεται ελάχιστο;

1046. Απο τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη Ι. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-t} f(t)\,dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x)$$

με $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Charles Hermite
1822-1901

1047. Να βρείτε το α ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu\sqrt{x}dx}{x^3}, & x \neq 0 \\ \alpha \quad , & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

1048. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$h(x) = 1999(x-1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t} dt$$

για κάθε $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι

1. $h(x) = 1999x \ln x$, $x \geq 1$.
2. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Jacques Salomon Hadamard
1865-1963

1049. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι περιττή.

4.4.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

1050. Το θεώρημα Hermite- Hadamard. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

4.5 Ορισμένο Ολοκλήρωμα: Τεχνικές

4.5.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

1051. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^3 x dx$
2. $\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx$
3. $\int_{-1}^1 x^2 dx$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x dx$

1052. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-1}^2 \sqrt{x+7} dx$
2. $\int_2^4 \left(e^x - e^{-x}\right) dx$
3. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{x} dx$
4. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx$

1053. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_\alpha^\beta \sqrt{x} dx$
2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 2x dx$
3. $\int_\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \ln x dx$
4. $\int_p^{p^2} x^2 dx$

1054. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-6}^{-1} \frac{1}{x} dx$
2. $\int_3^1 x^2 dx$
3. $\int_{-9}^{-12} \frac{x+1}{x+2} dx$
4. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx$

1055. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_s^t \left(u^2+1\right) du$
2. $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$
3. $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

1056. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \left(\int_0^x (3t+1) dt\right) dx$
2. $\int_0^1 \left(\int_0^1 (3t+1) dt\right) dx$
3. $\int_x^{x^2} (2t-1) dt$
4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

1057. Να υπολογίσετε τα:

1. $\int_1^2 \left(\int_3^4 (x+2y) dx\right) dy$
2. $\int_3^4 \left(\int_1^2 (x+2y) dx\right) dy$
3. $\int_1^2 \left(\int_3^4 (x+2y) dy\right) dx$
4. $\int_3^4 \left(\int_1^2 (x+2y) dy\right) dx$

1058. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^4 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} dx$
2. $\int_s^{s^3} x \ln x dx$
3. $\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx$
4. $\int_1^3 \left(x^2 - 4x + \kappa\right) dx$

1059. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sigma\upsilon\nu x dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\eta\mu^2 x}dx$
4. $\int_1^e x^3 \ln x dx$

1060. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική της αλλαγής μεταβλητής για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$
2. $\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx$
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{y\ln y}dy$
4. $\int_1^e \frac{\eta\mu \ln y}{y}dy$

1061. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_\pi^{2\pi} \eta\mu^2 x dx$
2. $\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)\, dx$ όπου $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ και $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της f.
3. $\int_m^n \left(mx^2 + nx\right) dx$
4. $\int_x^{\frac{1}{x}} tdt$

1062. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ \ 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x} & \alpha\nu\ \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

1063. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \left(|x-3| + \left|x^2-4\right|\right) dx$$

1064. Από τις εξετάσεις του 1988, Δέσμη IV. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}dx$$

1065. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_\alpha^\beta x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_\beta^0 \left(x^2 + x\sigma\upsilon\nu x\right) dx = -\frac{\beta^3}{3}$$

1066. Να βρείτε τον $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\lambda} \eta\mu x dx$.

1067. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε για ποιές τιμές των α, β, γ ισχύουν $f'(1) = 8,\ f(2) + f''(2) = 33$ και $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{7}{3}$.

1068. Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_x^{x+1} \left(t^2 - 4t + \frac{50}{3}\right) dt = 13$$

1069. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη IV. Αν η συνάρτηση $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και ικανοποιεί την σχέση

$$\int_0^1 xg'(x)\, dx = 1993 - \int_0^1 g(x)\, dx$$

να βρείτε το $g(1)$.

1070. Από το διαγωνισμό Putnam, 1973. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο ώστε $f(0) = 0$ και $0 \le f'(x) \le 1$ γι αόλα τα x. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)\, dx$$

Υποδειξη: Εργασθείτε με τη συνάρτηση $h(x) = \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\, dt$.

1071. Αν $\int_1^t \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx = 11$ βρείτε το $\int_1^t \left(3x^2 - 2x + 1\right) dx$.

1072. Για τη συνεχή συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $f(-x) + f(x) = x^2$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$.

1073. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2002. Μία συνεχής πραγματική συνάρτηση f ικανοποιεί την ταυτότητα

$$f(2x) = 3f(x)$$

για όλα τα x. Αν $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$ βρείτε το $\int_0^2 f(x)\, dx$.

4.5.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

1074. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{10} \frac{x}{1+|x|}dx$

1075. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$$

1076. Να αποδείξετε, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10}\eta\mu^9 x = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} e^{\sigma\upsilon\nu x}dx = 2\int_0^1 e^{\sigma\upsilon\nu x}dx$$

1077. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\nu} k^x\right) dx$$

1078. Έστω $I_\nu = \int_0^\alpha e^{-x}x^\nu dx$

1. Να υπολογίσετε το I_1.
2. Να αποδείξετε ότι $I_\nu = \nu I_{\nu-1} - \alpha^\nu e^{-\alpha}$.
3. Να υπολογίσετε το I_3.

1079. Έστω $I_\nu = \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$.

1. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu+2} = \frac{\nu+1}{\nu+2}I_\nu$.
2. Να αποδείξετε ότι

   (α′) $I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2k)}\pi$

   (β′) $I_{2k+1} = 0$

1080. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x + \sigma\phi x + \ln x)\, dx$.

1081. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$$

1082. Για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\alpha f(x) + \beta f(1-x) = 2((\beta-\alpha)x+\alpha)$$

για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq -\beta$ τότε $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

1083. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

1084. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x^2)\,dx = 1$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x^2)}{\alpha^x+1}dx$, $0<\alpha\neq 1$.

Υποδειξη: Να γράψετε $I = \int_{-1}^0 \frac{f(x^2)}{\alpha^x+1}dx + \int_0^1 \frac{f(x^2)}{\alpha^x+1}dx$ και να θέσετε στο πρώτο ολοκλήρωμα $x=-u$.

1085. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^x x dt$.

1086. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \int_a^b \eta\mu(2tx)\,dt$ τότε $f'(x) = 2\int_a^b (\sigma\upsilon\nu 2tx)\,t\,dt$.

1087. Να αποδείξετε ότι

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

και κατόπιν να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

1088. Να αποδειχθεί ότι αν μ,ν είναι θετικοί ακέραιοι τότε

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{\mu}{\nu}} + x^{\frac{\nu}{\mu}}\right)dx = 1$$

1089. Έστω λ θετικός αριθμός και f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0,\lambda]$.

1. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\lambda \frac{f(x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx = \int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx$$

2. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx$$

είναι ανεξάρτητο της f.

3. Με την βοήθεια του προηγουμένου ερωτήματος ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx$$

1090. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^2 (|x-1|+x+1)\,dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (|x-\ln x|+|3x-2|)\,dx$$

1091.

1. Έστω ότι $\sqrt{x^2-\alpha^2}=u-x$. Να αποδείξετε ότι $x=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+u^2}{u}$.
2. Χρησιμοποιείστε τον μετασχηματισμό $\sqrt{x^2-\alpha^2}=u-x$ για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int\sqrt{x^2-\alpha^2}dx$
3. Αν $F(x)=\int_2^x\sqrt{t^2-1}dt$ να υπολογίσετε το ελάχιστο της F.

1092. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $x=\alpha\eta\mu t$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$

1093. Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_0^{\alpha}\left(\sigma\upsilon\nu x+\alpha^2\right)dx=\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha^3$$

1094. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_0^{\beta-\alpha} f(\alpha+x)\,dx$$

1095.

1. Έστω $\alpha>0$ και $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)\,dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

2. Έστω $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ και $g:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
   - f,g συνεχείς
   - για όλα τα $x\in[0,\alpha]$ ισχύει $f(\alpha-x)=f(x)$
   - υπάρχει σταθερά c έτσι ώστε για όλα τα $x\in[0,\alpha]$ να ισχύει $g(x)+g(\alpha-x)=c$.

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{c}{2}\int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

1096. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}dy\right)dx$.

1097. Υποθέτουμε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ότι η f'' είναι συνεχής. Έστω ότι $f'(e) = f(e) = f(1) = 1$ και $\int_1^e \frac{f(x)}{x^2}dx = \frac{1}{2}$. Βρείτε το $\int_1^e f''(x)\ln x dx$.

1098. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

1099. Να αποδείξετε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = \int_0^{\alpha}(f(x)+f(-x))\, dx$

1100. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 f(x)\, f'(x)\, dx = 0$ και $\int_0^1 f^2(x)\, f'(x)\, dx = 18$. Ποιό είναι το $\int_0^1 f^4(x)\, f'(x)\, dx$;

1101. 1. Να βρείτε αριθμούς α,β,γ έτσι ώστε για κάθε αριθμό $x\neq 0$ να ισχύει

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

1102. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t)\, dt$.

2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x>0$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$.

   (β΄) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

1103. Αν $I_\nu = \int \ln^\nu x dx$ να αποδείξετε ότι

$$I_\nu = x\ln^\nu x - \nu I_{\nu-1}$$

1104. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων μ, ν ισχύει

$$\int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu \, dx = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu \, dx$$

1105. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{3+x\ln x} dx$

1106. Να επαληθεύσετε την ισότητα

$$\int_{\alpha+1}^{\beta+1} xe^x dx - \int_{\alpha-1}^{\beta-1} xe^{-x} dx = \beta e^{\beta+1} - \alpha e^{\alpha+1} + \beta e^{-\beta+1} - \alpha e^{-\alpha+1}$$

1107. Να επαληθεύσετε την ισότητα

$$\int_1^2 \alpha^\beta d\alpha + \int_1^2 \alpha^\beta d\beta = \frac{2^{\beta+1}-1}{\beta+1} + \alpha\frac{\alpha-1}{\ln\alpha}$$

1108. Έστω $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \geq 3$ ισχύει:

$$I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$$

1109. Να αποδέιξετε ότι για $\alpha > 0$ και $n \geq 3$ ισχύει $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{1-x^{n-2}}{1+x^n} dx = 0$.

1110. Από τις εξετάσεις του πανεπιστημίου της Οξφόρδης, 1889. Βρείτε ένα αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα

$$I_\nu = \int e^{\alpha x} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

όπου ο ν είναι ένας θειкός ακέραιος και στη συνέχεια υπολογίστε το $\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu^4 x dx$.

1111. Από τις εξετάσεις του 1991, Δέσμη Ι. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$,
2. Να υπολογίσετε το I_5.

1112. Έστω

$$I_{\nu,\mu} = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu \, dx$$

Να αποδείξετε ότι

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\mu}{\nu+1} I_{\nu+1,\mu-1}$$

1113. 1. Να υπολογίσετε το $\int x^2 \ln x dx$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\ln x & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

είναι συνεχής

3. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx$$

1114. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \varepsilon\varphi t$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

1115. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία άρτια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

1. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f\left(x\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = 0$

2. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f\left(x\right)\frac{1}{e^{kx}+1}dx = \int_0^{\alpha} f\left(x\right)dx$

1116. Αν $\int_1^2 \left(f\left(x\right)+x\right)dx = 4$ να βρείτε το $\int_1^2 f\left(x\right)dx$.

1117. 1. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(a+\beta-x\right)dx$

2. Δείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu}xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu}xdx, \quad \nu\in\mathbb{N}^{\cdot}$

3. Βρείτε τα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2xdx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2xdx$

1118. Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^{\alpha}\left(2-4x+3x^2\right)dx\leq\alpha$$

1119. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει

$$f\left(\alpha-x\right)+f\left(\alpha+x\right)=\beta$$

όπου α,β είναι σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2\alpha} f\left(x\right)dx = \alpha\beta$$

1120. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$$

1. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)\, dt$$

1121. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx$
2. Αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$.

1122. Υπενθυμίζεται ότι μία συνάρτηση f ονομάζεται **περιοδική** αν υπάρχει αριθμός $T \neq 0$ που ονομάζεται **περίοδος** της f έτσι ώστε:

- για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ είναι και $x + T \in \mathcal{D}_f$
- για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(x+T) = f(x)$.

Να αποδείξετε ότι αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο T τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{x}^{x+T} f(t)\, dt = \int_{0}^{T} f(t)\, dt$$

Υποδειξη: $x = T - u$

1123. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε

$$\int_{0}^{x} f(t)\, dt + \int_{0}^{2r-x} f(t)\, dt \geq 2\int_{0}^{r} f(t)\, dt$$

1124. Να αποδειχθεί ότι αν η συνεχής άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{0}^{T} x g(f(x))\, dx = \frac{T}{2}\int_{0}^{T} g(f(x))\, dx$$

1125. Η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Βρείτε το $\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)\, \sigma\upsilon\nu x dx$.

1126. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\alpha) = f(\alpha)$ και $f'(\beta) = f(\beta)$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x}\left(f''(x) - 2f'(x) + f(x)\right) dx = 0$$

1127. Από το διαγωνισμό Putnam, 1979. Έστω ότι $0 < a < b$. Βρείτε το

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_0^1 (bx + a(1-x))^t \, dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

1128. Για τη συνεχή συνάρτηση f είναι γνωστό ότι για όλα τα x ισχύει:

$$f(x) = P(x) + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\, dt \quad (*)$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με ρίζα το 0.

1. Να αποδείξετε ότι
$$f'(x) = P'(x) + P(x)$$
2. Να εξηγήσετε γιατί η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στην εύρεση της f και γιατί η συνάρτηση f που ικανοποιεί την $(*)$ είναι μοναδική.

1129. Έστω ότι $0 < \alpha < \beta$ και ότι για τη συνεχή $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(xt)\, dt \geq \int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ για κάθε θετικό αριθμό x. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

1130. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
2. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$.

1131. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\int_\alpha^\beta (f(x) - \lambda g(x))^2 \, dx \geq 0$$
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\mathrm{A}\lambda^2 + \mathrm{B}\lambda + \Gamma \geq 0$$
όπου
$$\mathrm{A} = \int_\alpha^\beta g^2(x)\, dx, \quad \mathrm{B} = -2\int_\alpha^\beta f(x) g(x)\, dx, \quad \Gamma = \int_\alpha^\beta f^2(x)\, dx$$

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\, dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)\, dx\right)$$

(Ανισότητα Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky)

1132. Θεωρούμε f, g συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε x να ισχύουν:

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

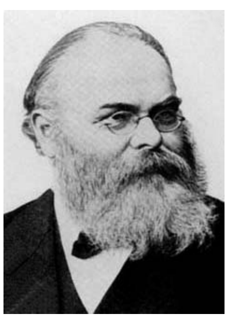
- $f(-x) = f(x) + \kappa$
- $g(-x) = -g(x) + \lambda$

όπου οι κ, λ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, g(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx - \kappa \int_{0}^{\alpha} g(x)\, dx + \kappa\lambda\alpha$$

1133. Έστω ν θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός y έτσι ώστε

$$y^{2\nu+1} + y = x$$



Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

και επομένως ορίζεται μία συνάρτηση $x \to f(x) = y$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$f^{2\nu+1}(x) + f(x) = x \qquad (1)$$

για κάθε x. Κατόπιν:

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
5. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
6. Να εκφράσετε ως παράσταση της f το $\int_0^x f(t)\, dt$.

Viktor Yakovlevich
Bunyakovsky
1804-1889

4.5.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

1134. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω $P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$. Έστω $P^{[1]}(x) = P(x)$ και για $\nu \geq 1$ έστω $P^{[\nu+1]}(x) = P^{[\nu]}(P(x))$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 P^{[2004]}(x)\,dx$.

1135. (Η ανισότητα του Jensen) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδειχθεί ότι:

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x))\,dx$$

1136. (Οι ανισότητες του Young) Έστω $f : [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ μία μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) > 0$ για όλα τα x και $f(0) = 0$. Θεωρούμε $\alpha \in [0, \gamma]$, $\beta \in [0, f(\gamma)]$. Να θεωρήσετε ως δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής για να δείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)\,dx \geq \alpha\beta$$

Johan Ludwig William Valdemar Jensen 1859-1925

Να αποδείξετε ότι το "ίσον" ισχύει μόνο όταν $\beta = f(\alpha)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για τους θετικούς αριθμούς α, β, p, q με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ισχύει:

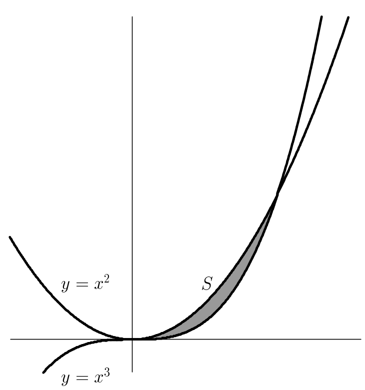
$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \geq \alpha\beta$$

4.6 Εμβαδά

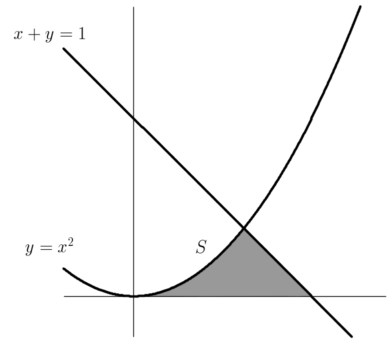
4.6.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

William Henry Young 1863-1942

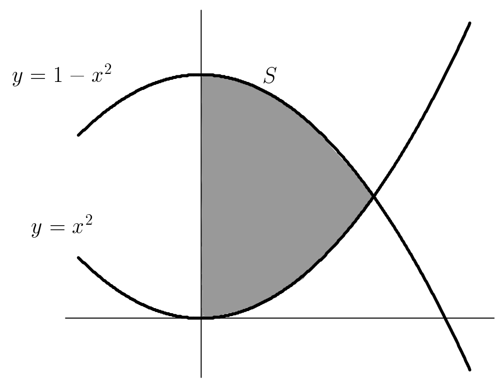
1137. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



1138. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



1139. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



1140. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\ln x$ και $\ln^2 x$.

1141. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=2x-1$ και την ευθεία $x=0$.

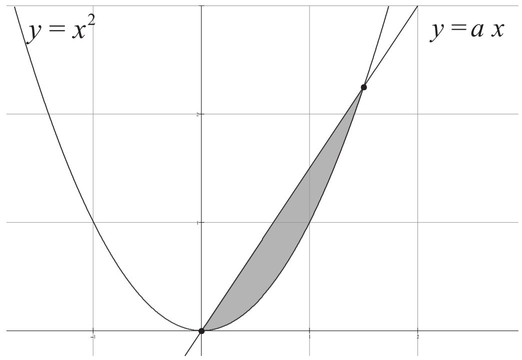
1142. Από τις εξετάσεις I.I.T, Ινδία, 1989. Να βρείτε το μεγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x)=x(x-1)^2, \quad 0\le x\le 2$$

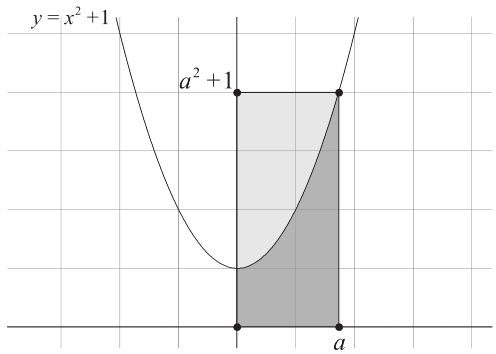
Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=x(x-1)^2$, τον y-άξονα και την ευθεία $y=2$.

1143. Ποιό είναι το εμβαδόν που περικλείουν οι γραφικές παραστάσεις των $y=x^2$, $y=\sqrt{|x|}$;

1144. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του σχήματος είναι 1. Ποιό είναι το α;

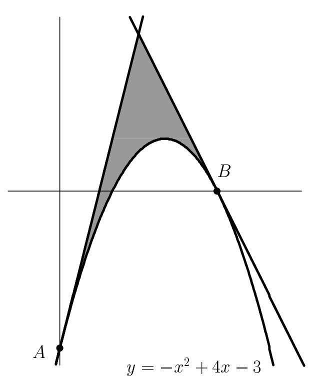


1145. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2002. Προσδιορίστε τη θετική τιμή α που είναι τέτοια ώστε η παραβολή $y = x^2 + 1$ να διχοτομεί το εμβαδόν του ορθογωνίου με κορυφές $(0,0)$, $(\alpha,0)$, $(0,\alpha^2+1)$, και (α,α^2+1).



1146. Έστω $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- την $\mathcal{C}_f$
- την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(0,-3)$ και
- την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $B(3,0)$



1147. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ και τον $x-$άξονα.

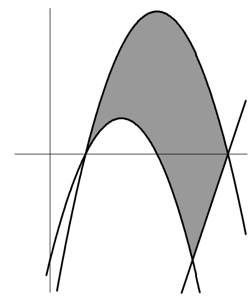
1148. Το χωρίο του σχήματος περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$g(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$h(x) = 3x - 15$$

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του.



1149. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$, και των ευθειών με εξισώσεις $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.

3. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(\alpha)$ του ανωτέρω χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

4.6.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

1150. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^{\nu}$, $g(x) = \sqrt[\nu]{x}$.

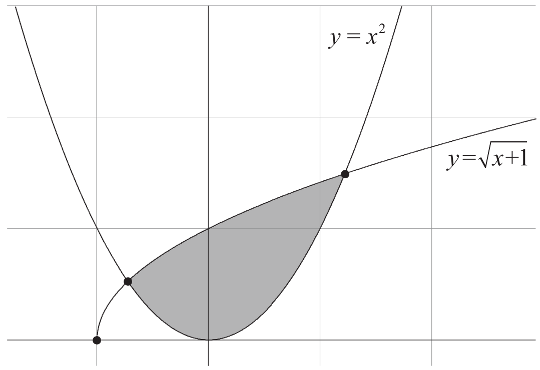
1151. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq f(x)$.

1152. 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\sqrt{x+1} = x^2$$

έχει ακριβώς δύο (πραγματικές) ρίζες.

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου στο παρακάτω σχήμα



είναι ίσο με

$$\frac{1}{3}\left(q_2-q_1\right)\left(q_1^2+2q_1+q_2q_1+2q_2+q_2^2\right)$$

όπου $q_1 < q_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α').

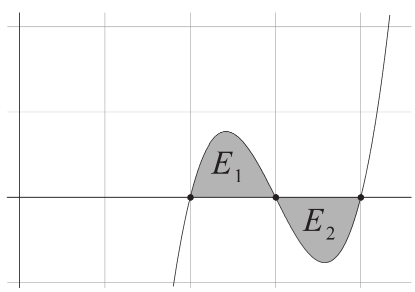
1153. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

Συμβολίζουμε με $E(a)$ το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την $x=\alpha$. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{\alpha^2}E(\alpha)$$

1154. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση ενός τριτοβαθμίου πολυωνύμου με ρίζες 2, 3, 4, Να αποδείξετε ότι $E_1=E_2$.



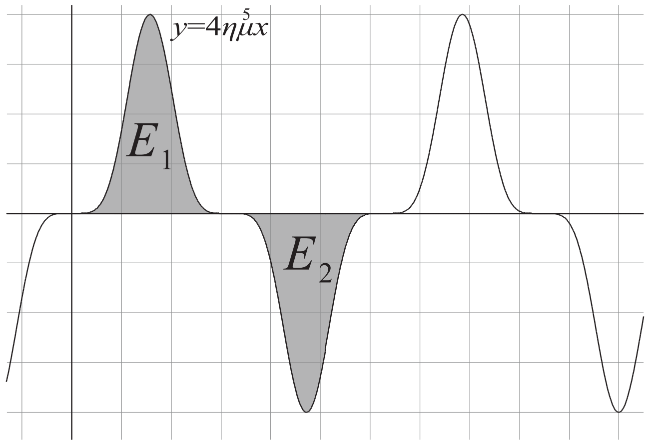
Προσπαθείστε να γενικεύσετε.

1155. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S του χωρίου που περικλείεται από τις $x=0$, $x=2$, $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

1156. Έστω $f(x)=e^x$. Να βρείτε για ποια τιμή του p το εμβαδόν S_1, που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f$, $y=0$, $x=0$,$x=p$ είναι ίσο με το εμβαδόν S_2 που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f$, $y=0$, $x=1$,$x=p$.

1157. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x - \lambda x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{\lambda}$ είναι μέγιστο;

1158. Για το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.



1159. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Έστω $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, τον y-άξονα και την ευθεία $x = t$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)$.

1160. Από τις εξετάσεις του 2006. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
3. (α΄) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

   (β΄) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

1161. Από τις εξετάσεις του 1989, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.
2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy.

1162. Για ποια τιμή του λ η ευθεία που:

- διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ και
- έχει συντελεστή διευθύνσεως λ

σχηματίζει με την καμπύλη $y = x^2 + 1$ χωρίο εμβαδού 6;

1163. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$f''(x) - g''(x) = 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{ και } f(2) = g(2)$$

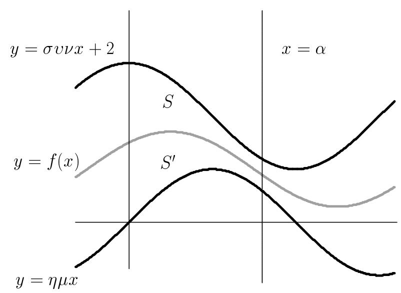
1. Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

1164. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

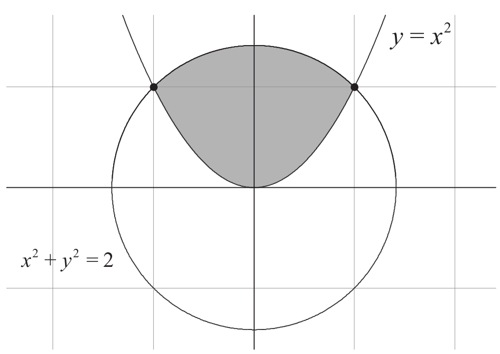
$$m(x) = \sigma\upsilon\nu x + 2,$$
$$n(x) = \eta\mu x$$

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f που έχει την ιδιότητα:

- Για κάθε $\alpha > 0$ το εμβαδόν S που περικλείεται από τις $x = 0$, $x = \alpha$, $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}_f$ είναι ίσο με το εμβαδόν S' που περικλείεται από τις $x = 0$, $x = \alpha$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_f$.



1165. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου:



1166. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$. Έστω M τυχόν σημείο της $\mathcal{C}$ και M_1, M_2 οι προβολές του M στους άξονες $x'x, y'y$ αντιστοίχως. Ονομάζουμε E_1, E_2 τα εμβαδά του μικτογράμμου OM_1M και του παραλληλογράμμου OM_1MM_2. Να αποδείξετε ότι:

$$E_1 = \frac{1}{\alpha+1}E_2$$

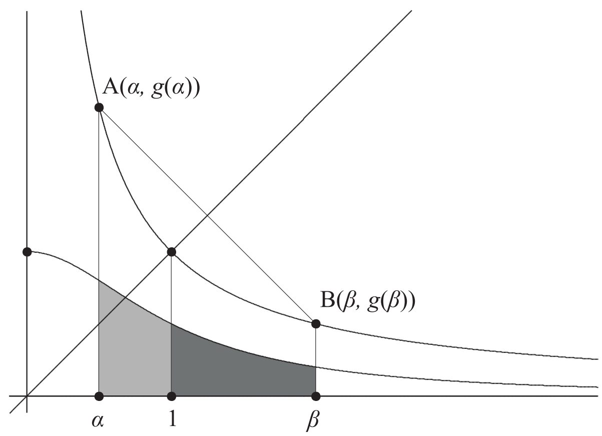
1167. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

και την ευθεία $y = x$.

1. Δείξτε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι κάτω από την $\mathcal{C}_g$.

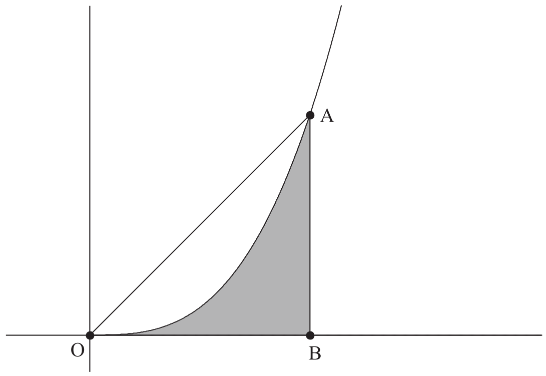
2. Σε κάθε $\alpha \in (0,1)$ αντιστοιχούμε το σημείο $\mathrm{A}(\alpha, g(\alpha))$. Από το Α φέρνουμε κάθετη στην $y = x$. Δείξτε ότι αυτή θα τέμνει πάντοτε την $\mathcal{C}_g$ σε ένα και μοναδικό σημείο $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ με $\beta \in (1, +\infty)$.



3. Δείξτε ακόμη ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τις $x = \alpha$, $x = 1$, $y = 0$ και $\mathcal{C}_f$ είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από τις $x = \beta$, $x = 1$, $y = 0$ και $\mathcal{C}_f$.

1168. Υπάρχουν άπειρες, το πλήθος, συνεχείς συναρτήσεις f που ορίζονται στο $[0, +\infty)$ και οι γραφικές παραστάσεις τους περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο και διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για παράδειγμα μερικές είναι οι $f(x) = e^{x-1}$, $f(x) = \ln(x+1)$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$ όλες για $x > 0$. Ζητείται να βρείτε ποιές από αυτές έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

- Για κάθε σημείο $A \in C_f$, με προβολή στον $x'x$ το σημείο Β, το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με το διπλάσιο του μικτογράμμου χωρίου ΟΑΒ.

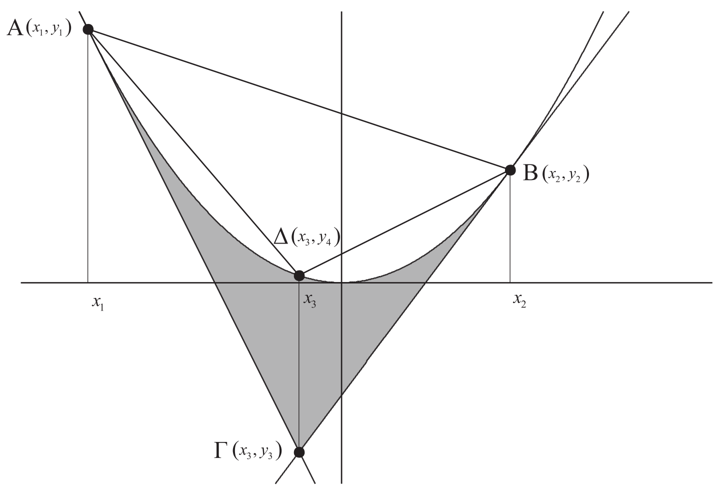


1169. Από τις εξετάσεις του 1991, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e & , \quad x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = e$.

1170. Έστω $\mathcal{C}$ η παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2$ ($\alpha > 0$). Έστω Α, Β δύο διάφορα σημεία της $\mathcal{C}$. Έστω Γ το σημείο τομής των εφαπτομένων της $\mathcal{C}$ στα Α, Β. Έστω τέλος Δ εκείνο το σημείο της παραβολής που έχει την ίδια τετμημένη με το Γ.



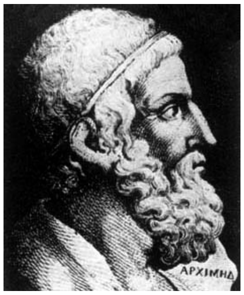
Συμβολίζουμε:

- Με E_1 το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου που περικλείεται από τις ΑΓ, ΒΓ και την $\mathcal{C}$.
- Με E_2 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

- Με E_3 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.
- Με E_4 το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου που περικλείεται από την ΑΒ και την $\mathcal{C}$.

Να αποδείξετε ότι:

1. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$
2. Η εφαπτομένη της $\mathcal{C}$ στο Δ είναι παράλληλη στην ΑΒ.
3. Από όλα τα σημεία του παραβολικού τόξου ΑΒ το Δ είναι εκείνο που απέχει από την ΑΒ τη μεγαλύτερη απόσταση.
4. **(Αρχιμήδης)** $E_4 = \frac{4}{3}E_3$
5. **(Cavalieri)**[1] $E_1 = \frac{1}{3}E_2$



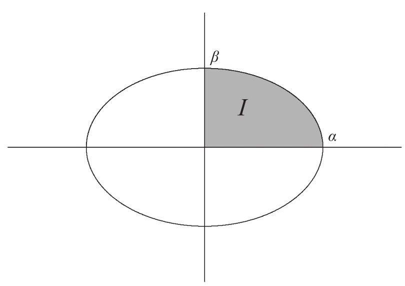
Αρχιμήδης
287-212 π.Χ.

4.6.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

Bonaventura Francesco Cavalieri
1598-1647

1171. Στην άσκηση αυτή θα υπολογίσετε το εμβαδόν της έλλειψης και του υπερβολικού χωρίου.

1. **Εμβαδόν της έλλειψης:** Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Για να βρούμε το εμβαδόν της αρκεί να βρούμε το εμβαδόν της που περικλείεται στο πρώτο τεταρτημόριο και να πολλαπλασιάσουμε επί 4. Το χωρίο αυτό περικλείεται από την γραφική παράσταση της $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \quad x \in [0, \alpha]$ και τον $x'x$. Το εμβαδόν του είναι ίσο με το $I = \int_0^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}dx$. Για να υπολογίσετε αυτό το ολοκλήρωμα να θέσετε $x = \alpha\eta\mu t$. Θα βρείτε $I = \frac{\pi\alpha\beta}{4}$. Τελικά το εμβαδόν της έλλειψης είναι $E = \pi\alpha\beta$.



2. **Εμβαδόν υπερβολικού χωρίου:** Έστω η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Για να υπολογίσουμε το εμβδόν του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή και την ευθεία $x = t > \alpha$ αρκεί να υπολογίσουμε το διπλάσιο του ολοκληρώματος $I = \int_{\alpha}^{t} \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}dq$. Για τον υπολογισμό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε

[1] Ο Cavalieri υπήρξε μαθητής του Γαλιλαίου.

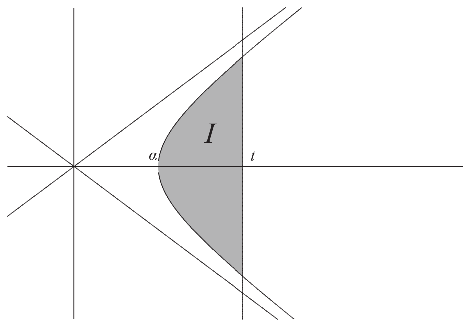
(α′) Την αντικατάσταση $u = \frac{\alpha}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ή

(β′) την αντικατάσταση $u = \frac{\alpha}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ ή

(γ′) την αντικατάσταση $u = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu x}$

Πρέπει να βρείτε

$$I = \frac{\beta}{2\alpha}\left(t\sqrt{t^2 - \alpha^2} - \alpha^2 \ln\left(t + \sqrt{(t-\alpha)(t+\alpha)}\right) + \alpha^2 \ln \alpha\right)$$



1172. Μήκος καμπύλης. Στην άσκηση αυτή μπορείτε να δείτε, πώς, με μικρή τροποποίηση των ιδεών που χρησιμοποούμε για τον υπολογισμό των εμβαδών μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη καμπυλών. Θα εργασθούμε στην ειδική περίπτωση μίας καμπύλης $y = f(x)$ όπου η $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι συνεχής. Έστω $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$. Θα βρούμε το μήκος L της καμπύλης από το $A = (\alpha, f(\alpha))$ στο $B = (\beta, f(\beta))$.

Για το σκοπό αυτό χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν υποδιαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Έχουμε έτσι τους αριθμούς

$$x_0 = \alpha, \qquad x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad \ldots \quad, x_\nu = \alpha$$

και με τη βοήθεια τους τα σημεία

$$X_0 = A = (x_0, f(x_0)), \qquad X_1 = (x_1, f(x_1)), \quad \ldots \qquad X_\nu = B = (x_\nu, f(x_\nu))$$

Όταν το ν αυξάνει απεριόριστα δηλαδή όταν $\nu \to +\infty$ το μήκος της τεθλασμένης $X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu$ τείνει στο L δηλαδή

$$\lim_{\nu \to +\infty} X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = L$$

Αλλά

$$X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = (X_0X_1) + (X_1X_2) + \ldots + (X_{\nu-1}X_\nu) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (f(x_0) - f(x_1))^2} +$$
$$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2} + \ldots + \sqrt{(x_{\nu-1} - x_\nu)^2 + (f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu))^2}$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

βρίσκουμε ότι

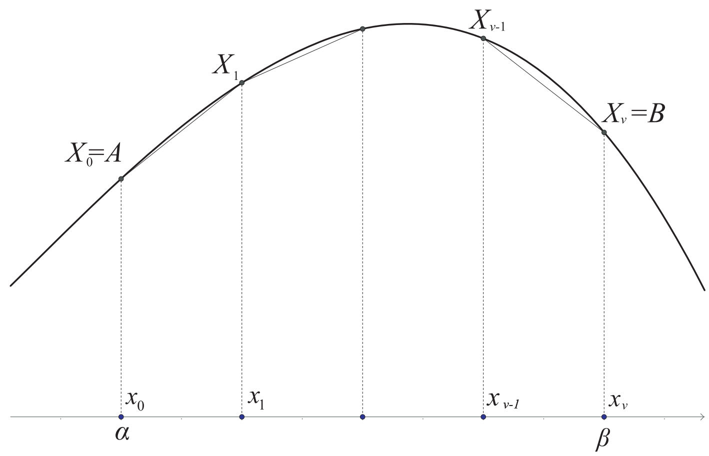
$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1)$$
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_1 - x_2)$$
$$\ldots$$
$$f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu) = f'(\xi_\nu)(x_{\nu-1} - x_\nu)$$

Άρα

$X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = |x_0 - x_1| \sqrt{1 + (f'(\xi_1))^2} + \ldots + |x_{\nu-1} - x_\nu| \sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2} =$

$= \frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$

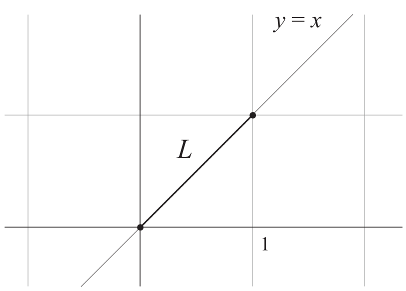
Επομένως $L = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f(x))^2} dx$

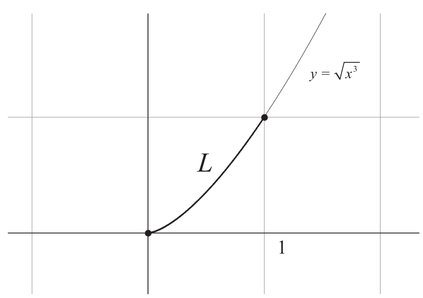


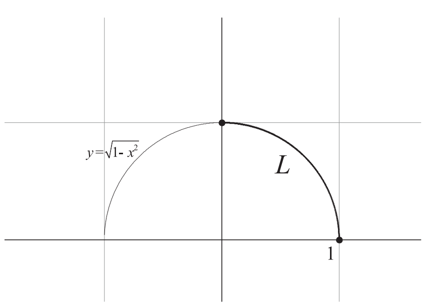
Άρα

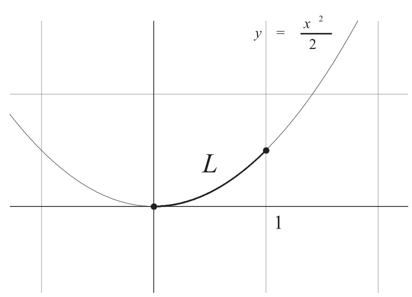
$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$$

Εφαρμόστε τον παραπάνω τύπο για να βρείτε το μήκος L στις ακόλουθες περιπτώσεις:









Υποδειξη: Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ να θέσετε $x = \varepsilon\varphi t$.

4.7 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

1173. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\int f'(x)\,dx =$
2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' =$
3. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' =$
4. $\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)' =$
5. $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx =$
6. $\int_\alpha^x f'(t)\,dt =$

1174. Για μία συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \geq \frac{1}{3} \geq \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Να αποδείξετε ότι

1. $\int_0^1 (f(x)-x)^2\,dx \leq 0$
2. $f(x)=x$ για κάθε x

1175. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u=1+\ln x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$$

1176. Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και

$$F(x)=\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt$$

Να αποδείξετε ότι $F'(x)=f(x+\alpha)-f(x-\alpha)$.

1177. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι

$$f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)$$

1178. Να βρείτε τον α αν είναι γνωστό ότι

$$\int_{\alpha^3-6}^{6\alpha^2-11\alpha} e^{x^2}dx=\int_0^{2\pi} \eta\mu\,(3x)\,dx$$

1179. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\ln t dt$$

και μετά το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}e^t\ln t dt$$

1180. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{\eta\mu t}{t}dt$$

1181. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $f(x)>0$ για όλα τα x
- $\int_0^3 f\left(\frac{1}{3}xu\right)du=f(x)$
- $f(1)=e^2$

1182. Από τις εξετάσεις του 2001. Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:
i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)\,dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι ισχύει
$$f'(x)=-2xf^2(x)$$
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.
3. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$

1183. Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$(f \circ g)(x) \leq x \leq (g \circ f)(x)$$

για όλα τα x τότε $f = g^{-1}$.

2. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\varphi(\sinh(x)) \leq x \leq \sinh(\varphi(x))$$

για όλα τα x, όπου

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

είναι το **υπερβολικό ημίτονο**.

(α′) Να βρείτε την φ και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

(β′) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

1184. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x$$

και $\mathcal{C}_f$ η γραφική της παράσταση.

1. Να βρείτε τα διαστήματα όπου η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ που διέρχεται από το σημείο $P(2,2)$.

1185. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Έστω f μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$g(-3)\, g(0) < 0$$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$g(x) = 0$$

έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

1186. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\int_x^{x+1} \ln t dt = ln \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} - 1$$

1187. Από τις εξετάσεις του 2002.

1. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\;\; x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

(α′) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

(β′) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

(γ′) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$

1188. Απο το διαγωνισμό του ΑΣΕΠ, 2002 (Μαθηματικοί). Αν $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = \sqrt{\ln x}$ και $I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e g(x)\,dx$ τότε:

1. $I = 1$
2. $I = e^{-1}$
3. $I = e$
4. $I = e^2$

1189. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^3}$$

1190. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε

$$\int_0^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} f(t)\,dt \le \frac{\int_0^\kappa f(t)\,dt + \int_0^\lambda f(t)\,dt}{2}$$

1191. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x}\eta\mu x, \quad x \ge 0$$

τέμνει τον άξονα xx' στα άπειρα το πλήθος σημεία

$$M_k(k\pi,\ 0), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Ποιο είναι άραγε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον xx';

1192. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της $g(x) = \int_2^x \frac{t^2-2t-1}{(t-1)^2}dt$

1193. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και τέτοια ώστε

$$x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x)$$

για κάθε x.

1. Να βρεθεί η $f(x)$.
2. Να βρεθεί η
$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$
3. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, F.

1194. Από τις Εξετάσεις του 1994, Δέσμη IV. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει

$$\int_0^2\left[xf''(x)+3f'(x)\right]dx=-\frac{8}{3}$$

να υπολογίσετε το $f(2)$.

1195. Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^x(3t-1)\,dt=1$

1196. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\int_0^\alpha \eta\mu\sqrt{x}dx}{\alpha^3}$$

1197. Θεωρούμε $\alpha<\beta$ και δύο συνεχείς συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τέτοιες ώστε για όλα τα x ισχύει

$$f(\alpha\ -x)+f(\beta+x)=g(\alpha\ -x)+g(\beta+x)$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx$$

Υποδειξη: Θα ισχύει $\int_0^{\alpha-\beta}(f(\alpha-x)+f(\beta+x))dx=\int_0^{\alpha-\beta}(g(\alpha-x)+g(\beta+x))dx$

1198. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \alpha\nu\ \ x\le 1\\ 1+\ln x & \alpha\nu\ \ x>1\end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει λύση.

1199. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Έστω

$$I = \int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x dx$$

Να αποδείξετε ότι

$$I = f(0) + f(\pi)$$

1200. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την f και μετά να χαράξετε την γραφική της παράσταση.

2. (α′) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = xf(x)$ είναι **φραγμένη** δηλαδή αν υπάρχουν αριθμοί α, β έτσι ώστε να ισχύει $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ για όλα τα x.

   (β′) Να λύσετε την εξίσωση

$$\int\limits_{x}^{x+1} f(t)dt = \frac{1}{6}$$

1201. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει $f'(x) \geq g'(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

2. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι f, g είναι συνεχείς τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

3. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι f, g είναι συνεχείς τότε ισχύει $\int f(x)\,dx \geq \int g(x)\,dx$ (Δηλαδή για κάθε αρχική F της f και για κάθε αρχική G της g ισχύει $F(x) \geq G(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$).

4. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι f, g είναι συνεχείς τότε υπάρχουν αρχική F της f και αρχική G της g ώστε $F(x) \geq G(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

5. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

1202. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(e^x - e^\beta + e^x x - e^x \alpha\right) dx = 0$$

1203. Από τις εξετάσεις του 2000, Δέσμη IV. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα:

$$\int_0^x \left(1 + t^2\right) f(t)\, dt = x^2 + \int_0^1 6x \left(t^2 + t\right) dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

1204. Για την συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^x f(t)\, dt = \frac{1}{2}$.

1205. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη I. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1206. Έστω μία συνεχής πραγματική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta \in (0, 1)$ ισχύει:

$$\int_0^\beta f(x)\, dx \geq \beta \int_0^\beta f(x)\, dx$$

1207. Για μία συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ισχύει

$$x + \int_0^x f(t)\, dt = (x+1) f(x)$$

1. Να βρεθεί η $f(x)$.
2. Να βρεθεί η $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

1208. Απο τον διαγωνισμό του ΑΣΕΠ, 2000 (Μαθηματικοί). Να αποδείξετε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη[2] συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών α, β ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta \left[f(x) - f(\alpha + \beta - x)\right] dx = 0$$

[2] για σας: συνεχή

1209. Απο τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4 \text{ με } x > 0$$

1. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.
2. Να υπολογίσετε το
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1210. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και

$$g(x) = \int_\alpha^\beta (f(t) - x)^2\,dt$$

1. Να αποδείξετε ότι η g γίνεται ελάχιστη όταν
$$x = \frac{\int_\alpha^\beta f(t)\,dt}{\beta - \alpha}$$
2. Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε x.

1211. Για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g, h ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha_1$, $\int_0^1 g(x)\,dx = \alpha_2$, $\int_0^1 h(x)\,dx = \alpha_3$ όπου $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0,1)$ ώστε $f(\alpha) + g(\alpha) + h(\alpha) = \alpha$

Υποδειξη: Να θεωρήσετε την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$

1212. Απο τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $F'(x_0) = 0$ τότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1213. Απο τις εξετάσεις του 2003. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
2. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

1214. Να αποδείξετε ότι αν για κάθε $x \geq 0$ είναι $f'(x) > 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}F(x) < F'(x)$.

1215. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $2f(x) + 3f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$.

1. Να βρείτε τον τύπο της f.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$.

1216. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση $g(x) = \int_0^1 f(tx)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη.

1217. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ τότε ισχύει $\int_0^1 f(1 - x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

1218. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{-t^2} dt}{x - 1}$$

Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα του αριθμητή.

1219. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^{\alpha} (1 - x)^{\beta}\,dx = \int_0^1 x^{\beta} (1 - x)^{\alpha}\,dx$.

1220. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη Ι. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) > 0,\ x > 0$$

$$f'(x) + 2xf(x) = 0,\ x > 0$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

2. Να δείξετε ότι

$$\frac{x - 1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x - 1}{2},\ x > 1$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_1^x \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) f(t)\,dt,\ x > 1$$

4. Να αποδείξετε ότι
$$2e\int_1^x e^{-t^2}dt < 1$$
για κάθε x μεγαλύτερο του ένα.

1221. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

- $f'(x) > x$ για κάθε $x>0$
- $f(0)=0$

Pafnuty Lvovich Chebyshev
1821 - 1894

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\int_0^\alpha xf^3(x)\,dx \geq \left(\int_0^\alpha xf(x)\,dx\right)^2$

1222. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[1,4]$, για την οποία να ισχύουν $f'(x)\geq 3$, $f(1)=-1$ και $f(4)=7$.

1223.
1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha-x)=f(\alpha)-f(x)$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι $\int_0^\alpha f(x)\,dx=\frac{\alpha f(\alpha)}{2}$.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\varepsilon\varphi x)\,dx$.

1224. Η ανισότητα του Chebyshev. Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας και $\alpha<\beta$ τότε ισχύει:
$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)\left(\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\right)\leq(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx$$

1225. Από τις εξετάσεις του 2004. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^xf(x)$ όπου η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.
2. Εάν $f(x)=2x^2-3x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)\,dx,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}I(\alpha)$.

1226. Έστω g μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\xi>0$ ισχύει
$$\int_1^\xi\frac{f(x)+2x}{1+x^2}dx+\int_1^{\frac{1}{\xi}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-2x}{1+x^2}dx=2\ln\xi$$

Υποδειξη: Στο δεύτερο ολοκλήρωμα του α΄ μέλους να θέσετε $u=\frac{1}{x}$.

1227. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και μή σταθερή συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι κάποιο κλειστό διάστημα έστω $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$.

1. Να αποδείξετε ότι[3]

$$f(x_\varepsilon)(\beta-\alpha) < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < f(x_\mu)(\beta-\alpha)$$

2. Από την προηγούμενη σχέση συνάγουμε ότι

$$f(x_\varepsilon) < \frac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\beta-\alpha} < f(x_\mu)$$

   Βάσει αυτής δείξτε ότι [4] υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

   Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την παραγωγίσιμη $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$.

3. Αν έχετε δύο συνεχείς συναρτήσεις σκεφθείτε τι μπορείτε να επιτύχετε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.[5]

1228. Από τις εξετάσεις του 2004. Έστω η συνεχης συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|\, f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0 \quad ,$$

όπου $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.
2. Να αποδέιξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.
3. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re\left(z^2\right) = -\frac{1}{2}$.
4. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

[3] Δείτε προσεκτικά την άσκηση Γ10ii. σελ. 353 και εντοπίστε ομοιότητες - διαφορές πέρα φυσικά από το συμβολισμό $f(x_\varepsilon)$ αντί m και $f(x_\mu)$ αντί M.

[4] Πρόκειται για ειδική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

[5] Δείτε την συλλογή «Παράγωγοι» ενότητα 3.2

1229. Από τις εξετάσεις του 2005. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

1. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y = \lambda e x$
   Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M.
3. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικελείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι
   $$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$
4. Υπολογίστε το
   $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$$

1230. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2005. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

1. Να δείξετε ότι
   (α′) $f(0) = 0$
   (β′) $f'(0) = 1$
2. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
   $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$$
3. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
   (α′) $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$
   (β′) $\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$

1231. 1. Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^1 x(x+t)\,dx = 0$

2. Να αποδείξετε ότι αν για τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε x.

3. Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

όταν g είναι οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις 1, x, x^2. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε x.

1232. Έστω

$$f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(x) + g'(x) = 0$, για κάθε x
2. $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1233. Από τις εξετάσεις του 2005. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x) = e^{x-f(x)}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

1. Να δειχθεί ότι:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$$

2. Να βρεθεί το:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)\, dt}{\eta\mu x}$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\, dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{2008}$$

έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

1234. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση

$$h\left(x\right) = 2^{12}\left(e^{-4x} - e^{-\alpha x}\right), \quad x \geq 0$$

όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x\right) = h\left(0\right) = 0$.
2. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)$.
3. Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(x)$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1, x_2.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $M = \frac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h\left(x\right)dx$ όταν $\alpha = 8$.

1235. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή, τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$ και το "$=$" ισχύει μόνο για $x = \alpha$ και $x = \beta$. Έστω M μέγιστη τιμή της f.

1. Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f''\left(x\right)dx \leq 0$.
2. Έστω x_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του (α, β) που μηδενίζεται η f' (τέτοια σημεία υπάρχουν από το θεώρημα του Rolle). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ έτσι ώστε
$$f'\left(\xi_1\right) - f'\left(\xi_2\right) \geq \frac{4f\left(x_0\right)}{\beta - \alpha}$$
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν p, q με $\alpha < p < q < \beta$ τέτοια ώστε
$$f'\left(p\right) - f'\left(q\right) \geq \frac{4M}{\beta - \alpha}$$
4. Να αποδείξετε ότι
$$\int_\alpha^\beta \frac{\left|f''\left(x\right)\right|}{M + f\left(x\right)}dx \geq \frac{2}{\beta - \alpha}$$

1236. Από τις εξετάσεις του Γαλλικού Baccalauréat, 1986. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

1. (α′) Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης εφαπτομένη;

   (β′) Να υπολογίσετε το I.

2. (α′) Έστω η συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ καί ότι για όλα τα x από αυτό το διάστημα ισχύει

$$f'(x) = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

(β′) Με τη βοήθεια των προηγουμένων υπολογισμών να βρείτε μία σχέση που συνδέει τα I, J και στη συνέχεια να υπολογίσετε το J.

1237. Από τις εξετάσεις του Γαλλικού Baccalauréat, 2006.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{1-x}$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική της παράσταση σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η μονάδα μέτρησης είναι $2cm$.

   (α′) Να βρείτε τα όρια της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Πώς ερμηνεύονται γραφικά τα συμπεράσματα σας;

   (β′) Να αιτιολογήσετε γιατί η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε την παράγωγο της f.

   (γ′) Να κάνετε ένα πίνακα μεταβολών της f καθώς και τη γραφική της παράσταση.

2. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος. Έστω $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{1-x} dx$.

   (α′) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα $I_{\nu+1}, I_\nu$.

   (β′) Να υπολογίσετε το I_1 και μετά το I_2.

   (γ′) Να ερμηνεύσετε γραφικά τον αριθμό I_2 σε σχέση με τη γραφική παράσταση του ερωτήματος 1) γ

3. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ και κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $x^\nu \le x^\nu e^{1-x} \le e x^\nu$.

   (β′) Με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής να βρείτε το όριο του I_ν όταν το ν τείνει στο $+\infty$. [6]

1238. Από το διαγωνισμό Putnam, 2005. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$$

Υποδειξη: $x = \frac{1-u}{1+u}$

1239. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(1) = 2007$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα x, y

[6] Η ερώτηση αυτή ζητάει όριο ακολουθίας που δε θα έχετε δυσκολία να το απαντήσετε

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$\int_x^{x+m} f(t)\,dt = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt$$
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = f'(0)$.
5. Να βρείτε την f.

1240. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι :

1. $f(x) - f(\alpha) \leq f'(x)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
2. $2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$

1241. Αν η f είναι όπως στην άσκηση 1240 δείξτε ότι
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$$
Να δώσετε μία γεωμετρική ερμηνεία όταν η f παίρνει μη αρνητικές τιμές.

1242. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$$\int_{(x-1)(x-3)}^{(x-2)(x-4)} \ln(xt)\,dt$$

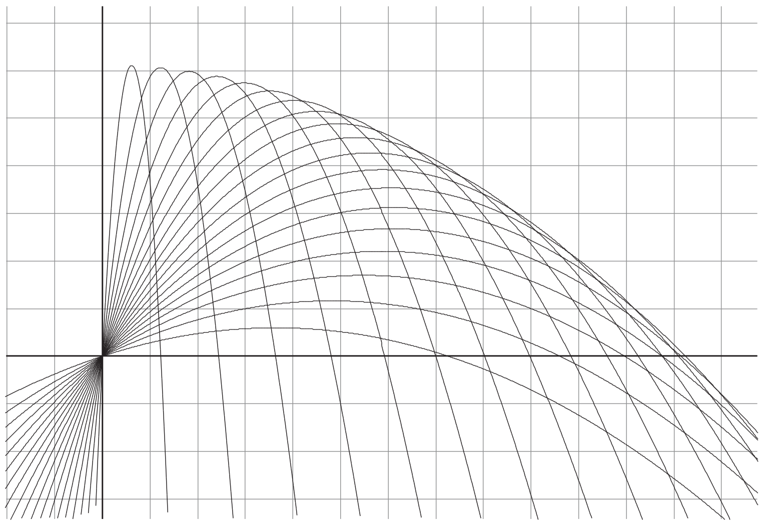
1243. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1977. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$$F(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - k\sigma\upsilon\nu^2 x}}dx, \qquad 0 \leq k < 1$$
είναι γνησίως αύξουσα.

1244. Έστω $f(y) = e^{-x^2y^2}$, $y > 1$.

1. (α′) Δείξτε ότι $|f'(y)| \leq 2$.
   (β′) Δείξτε ότι για κάθε y, y_0 ισχύει $|f(y) - f(y_0)| \leq 2|y - y_0|$.
2. Θεωρούμε $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$F(y) = \int_\alpha^\beta e^{-x^2y^2}dx$$
είναι συνεχής.

1245. Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$f_k(x) = -\frac{2}{49k^2}x^2 + \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}x \ , \qquad k \in [0,1]$$



1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f_k(x)$.
2. Ποια από τις $f_k(x)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το μεγαλύτερο εμβαδόν;

1246. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1980. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_{\eta\mu x}^{\sigma\upsilon\nu x} e^{t^2+xt}dt$$

Βρείτε την $F'(0)$.

1247. Από τις εξετάσεις του 2007. Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt, \qquad x \in [0,1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt, \qquad x \in [0,1]$$

1. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
2. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

4. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} \eta\mu^2 t dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}$$

1248. Από τις εξετάσεις του 2008. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = \left(10x^3+3x\right)\int_0^2 f(t)\,dt - 45$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$f(x) = 20x^3+6x-45$$

2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

3. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (1) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (2) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

(α′) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

(β′) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

1249. Από τον Ετήσιο Διαγωνισμό Απειροστικού Λογισμού, ΗΠΑ, 1999. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{4+t^2}dt}{x^3}$.

1250. Από τον Ετήσιο Διαγωνισμό Απειροστικού Λογισμού, ΗΠΑ, 2001. Υποθέτουμε ότι οι f, f' και f'' ορίζονται στο $[0,\ln 2]$, ότι η f'' είναι συνεχής, ότι $f(0)=0$, $f'(0)=3$, $f(\ln 2)=6$, $f'(\ln 2)=4$ και $\int_0^{\ln 2} e^{-2x}f(x)\,dx = 3$. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\ln 2} e^{-2x}f''(x)\,dx$.

1251. Για την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για κάθε x ισχύει:

$$\int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt = b$$

όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική.

1252. Από τις εξετάσεις του 2010 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{-1}^{1} xf(x)dx$

1253. Από τις εξετάσεις του 2010. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq x$
- $f(x) - x = 3 + \int\limits_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, x\in\mathbb{R}$$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση,

$$g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$$

$x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}, x\in\mathbb{R}$$

4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, x \in \mathbb{R}$$

1254. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$F(x) = \int_{x}^{x+1} \left(\int_{x}^{y} f(z)dz \right) dy$$

1255. Απο τις εξετάσεις του 2009. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,2]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{0}^{2} (t-2)\, f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$H(x) = \int_{0}^{x} tf(t)dt, \;\; x \in [0,2]$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6 \lim\limits_{t \to o} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ και ότι ισχύει:
$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \;\; 0 < x < 2$$
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\alpha \in (0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει
$$\alpha \int_{0}^{\xi} tf(t)dt = \xi^2 \int_{0}^{\alpha} f(t)dt$$

1256. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) > \frac{1}{2}$ για κάθε $x \geq 0$

Να αποδείξετε ότι $f^2(x) > \int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x > 0$.

1257. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$I(x)=\int_0^1\left(f^2(t)-2xt^2f(t)+x^2t^4\right)dt$$

Να δείξετε ότι η I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=5\int_0^1 t^2f(t)\,dt$.

1258. Από τις εξετάσεις του 2011. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:
i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$.
ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int\limits_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$
iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int\limits_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
3. Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
$$F(x)=\int\limits_1^x f\left(t^2\right)dt$$
με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

1259. Από τις εξετάσεις του 2012. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος 2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε
$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

1260. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε υπάρχει $c \in$: $[a,b]$ ώστε $\int_a^c f(t)dt \int_c^b f(t)dt < 0$.
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $[p,q] \subset [a,b]$ με $\int_p^q f(t)dt = 0$.

1261. Από τις εξετάσεις του 2012. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(t)|$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

2. Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$$

3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $lnx \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \;\; x > 0$$
όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή . Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$.

4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:
$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Απαντήσεις

1 α) 2 β) 1 γ) 2

2
1. $8+14i$
2. $10+3i$
3. $-3-i$
4. $24+22i$
5. $40+45i$
6. $1+3i$
7. $46+30i$
8. $-10i$

3
1. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$
2. $-\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$
3. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$
4. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
5. $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
6. $\frac{1358}{3757}-\frac{1283}{3757}i$

4
1. $-5-10i$
2. $-8-i$
3. $\frac{17}{26}-\frac{7}{26}i$
4. $-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}i$
5. $\frac{11}{5}+\frac{3}{5}i$
6. $-\frac{23}{13}$

6 $\frac{7}{2}+\frac{17}{2}i$

9 $x=-2,\ \ y=2$ ή $x=-2,\ \ y=-2$

10 -7 και $-y$

11 ο $2+i$

12 $2^{40}-2^{41}i$

13 $-68-20i$

14 5

15 $\lambda=2$

16 -8

17 $z_1=5+3i$, $z_2=1-i$

18 (α′) $(x+iy)\,(x-iy)$ (β′) $(2x+iy)\,(2x-iy)$

19 Μόνο αν οι z_1, z_2 είναι πραγματικοί.

20 $z=2+(2-t)i$, $w=5+ti$, $t\in\mathbb{R}$

21 $x=-8$, $y=8$

22 $\kappa=\frac{4}{5}, \lambda=-\frac{1}{5}$

23 $z=\frac{5}{4}-\frac{7}{2}i$

24
1. $2\pm 3i$
2. $\frac{1\pm 3i}{2}$
3. $\frac{1\pm i\sqrt{5}}{3}$
4. $\sigma\upsilon\nu\theta \pm i\eta\mu\theta$

25 $a=2$, $b=3$ ή $a=-3$, $b=-3$

29 $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)$

30 $z^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $z^3=-1$, $z^6=1$.

31 $x=\pm 3$

32 Κάθε αριθμός που δεν υπερβαίνει το 25

35 $x=-3+i$, $x=-3-i$

36 Ναι-Όχι

38 $w = z^2 + z$

39

$$A = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad \nu = 4k \\ 1 & \alpha\nu \quad \nu = 4k+1 \\ 1+i & \alpha\nu \quad \nu = 4k+2 \\ i & \alpha\nu \quad \nu = 4k+3 \end{cases}$$

40 $z = 2\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

41 Υπάρχουν άπειρες τιμές του z: $z = (2-2t)+ti,\ \ t \in \mathbb{R}$

43 $\kappa = 1$ και $\lambda = 3$ ή $\kappa = \frac{43}{33}$ και $\lambda = \frac{7}{4}$.

44 $\kappa = \frac{3}{7}, \lambda = \frac{2}{7}$

47 $2x - 3y = 0$

48 Προσέξτε. Η άσκηση δεν λέει ότι τα α, β είναι πραγματικοί. $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$

49 $x = 64 + 64i$

50 $\frac{7}{10}, \frac{9}{10}$

51 $w = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, $w = \pm i$

52 Πρέπει ο z να είναι πραγματικός ή $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(u)$.

53 $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 3$, $\mathrm{Im}\left(z^2\right) = -4$

54 $x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i\sqrt{3}$

55 $z = \pm(2+3i)$

57 $\left(\nu^2 - \nu\right) + \nu^2 i$

59 9

61 Όχι. Μπορεί να είναι δύο πραγματικοί αριθμοί.

62 Η εξίσωση: α) Είναι αδύνατη αν $\alpha\left(4\beta^2\gamma - \alpha\delta^2\right) < 0$. β) Έχει μία λύση την $z = \frac{\delta}{2\beta}i$ αν $\alpha\left(4\beta^2\gamma - \alpha\delta^2\right) = 0$ και γ) Έχει δύο λύσεις $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{\alpha\left(4\beta^2\gamma-\alpha\delta^2\right)}}{2|\alpha|\beta} + \frac{\delta}{2\beta}i$ αν $\alpha\left(4\beta^2\gamma - \alpha\delta^2\right) > 0$.

63

$$A_\nu = \begin{cases} 2 & , \quad \nu = 6\kappa \\ 1 & , \quad \nu = 6\kappa+1 \\ -1 & , \quad \nu = 6\kappa+2 \\ -2 & , \quad \nu = 6\kappa+3 \\ -1 & , \quad \nu = 6\kappa+4 \\ 1 & , \quad \nu = 6\kappa+5 \end{cases}$$

64 Εκτός από τον $2+i$ λύσεις είναι και οι $-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i$, $-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i$

67 $-\frac{34}{5}-\frac{118}{5}i$

68 $-\frac{7}{4}$

69 α) $x>2, y=0$ β) $x<-1$ και $y^2=3x^2$

75 Όταν $n=4m+2$.

78 α) $\sqrt{2}$, β) 5, γ) 1

79 $2, 4, \frac{1}{8}$

80 6

83 α) $\pm 2\sqrt{2}$, β) $0, -\frac{9}{5}$

84 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

85 10 και $\frac{1}{5}$.

86 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

87

1. 5
2. $\sqrt{97}$
3. $32+16i$
4. $\frac{\sqrt{13}}{13}$

88 Μόνο για τους πραγματικούς.

92 $z=\pm\frac{1}{2}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

93 $z=6+17i$ ή $z=6+8i$

94 $z=0$, $z=1$, $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$

97 1

98 0

99 $\kappa^2+\lambda^2$

100 $z=\frac{120}{17}+7i$

101 13

102 4

104 $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

106 $|rz| = |r|\,|z| =$ απόλυτη τιμή του $z \cdot |z| = r|z|$

109 $2\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

110 $3\sqrt{34}$

111 $\frac{(\gamma^2-\alpha^2)^2+(\gamma+\beta)^2\alpha^2}{(\gamma-\beta)^2}$

114 0 και -1

120 3

122 $z = -1 + i$

125 Για κανένα.

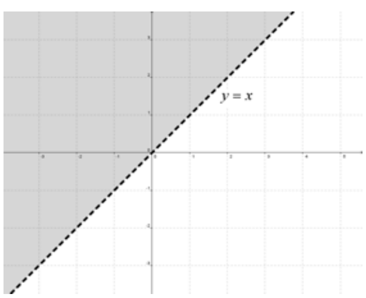
127 Για τον $z = 2 + 2i$

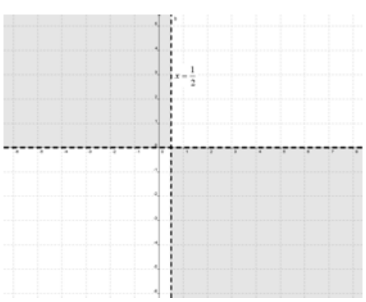
130 -1

145 (β′) ii. $\sqrt{2}$

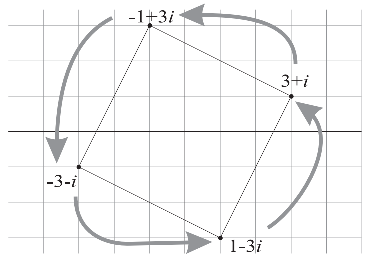
148 $\alpha = \frac{3}{2}$

152 Καταλήγουμε στα χωρία:

1. 

2. 

153 Προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



154 $\overline{z} = -\frac{2+3i}{13}(2z + 3iz - 2)$

155 1) $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$, 2) $\rho_1 \leq |z - z_0| < \rho_2$ 3) $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$, 4) $\rho_1 < |z - z_0| \leq \rho_2$ 5) $|z - z_0| \geq \rho_2$ 6) $|z - z_0| \leq \rho_1$

159

1. $K(2,0), \ \rho = 4$
2. $K(0,2), \rho = 2$
3. $K(2,3), \rho = 1$
4. $K(-2,-3), \rho = 1$
5. $K(-2,3), \rho = 1$
6. $K(1,-2), \rho = \frac{1}{2}$

161 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

163 $x = 3 \pm \sqrt{7}$

165 Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ που έχει κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

166 1) $|z - z_1| \leq \rho_1$ και $|z - z_2| \geq \rho_2$ ή $|z - z_2| \leq \rho_2$ και $|z - z_1| \geq \rho_1$
2) $|z - z_1| \leq \rho_1$ και $|z - z_2| \leq \rho_2$
3) $|z - z_1| \leq \rho_1$ ή $|z - z_2| \leq \rho_2$
4) $|z - z_1| > \rho_1$ και $|z - z_2| > \rho_2$,

167 Η έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$.

168 Η ευθεία $x = 1$.

169 $\frac{5}{2}$

170 Κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{12}, -\frac{11}{12}\right)$ και ακτίνα $R = \frac{5}{12}\sqrt{2}$.

171 Η υπερβολή με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

172 Κέντρο: $K\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Ακτίνα: $\rho = \frac{3}{4}$.

174 $3\sqrt{2}+2$

175 Ο κύκλος $x^2+y^2=2$

176 Των $3+3i, 2+2i$ ή των $5+i, 4$.

177 Αν $w=p+qi$ πρόκειται για την ευθεία $px-qy=\alpha$

179
1. Η ευθεία $|w-a-z_1|=|w-a-z_2|$
2. Στην ευθεία $|w-az_1|=|w-az_2|$
3. Ο κύκλος $|w-a-z_0|=\rho$
4. Στον κύκλο $|w-az_0|=|a|\,\rho$

184 Κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4y-1=0$ (Κέντρο: $K\,(0,2)$, Ακτίνα: $R=\sqrt{5}$)

185 Η παραβολή $y^2=4x$.

186 Ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[4]{\frac{c-2}{2}}$.

187 Αν $\beta\neq 0$ τότε ο τόπος είναι ο κύκλος $x^2+y^2+\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{1}{\beta}y=0$ από τον οποίο έχει αφαιρεθεί το σημείο O. Αν $\beta=0$ ο τόπος είναι η ευθεία $y=\alpha x$ από την οποία έχει αφαιρεθεί το O.

188
1. Η ευθεία $y=x-2$.
2. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-6x+8=0$ (Κέντρο: $K(3,0)$ ακτίνα $R=1$)
3. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-12x-4y+39=0$ (Κέντρο: $K(6,2)$ ακτίνα $R=1$)
4. Η ευθεία $y=-1$
5. Ο άξονας $y'y$.

189
1. Κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}y+\frac{4}{3}=0$ (Κέντρο $K\left(\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)$, ακτίνα $R=\frac{1}{6}\sqrt{26}$).
2. Ο κύκλος με εξίσωση $(x-2)^2+(y+3)^2=8$.

190 (α′) $\frac{3}{2}\alpha-\frac{9}{2}\beta$ και $-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta$.

192 Εκείνο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει ο άξονας $y'y$ που περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.

193 Η έλλειψη $\alpha^2x^2+\beta^2y^2=1$. άξονας $y'y$ που περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.

194 $z=1-\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}-1\right)i$ και $z=1+\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}-1\right)i$ αντιστοίχως

198
1. ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2
2. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A\,(1,1)$, $B\,(3,3)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y=x-4$

3. $2\sqrt{2}$
4. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

203 β)Είναι ο φανταστικός άξονας.

205 Το σύνολο που απαρτίζεται από τα σημεία του $x-$άξονα και τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $x=\frac{1}{2}$.

211 Όχι.

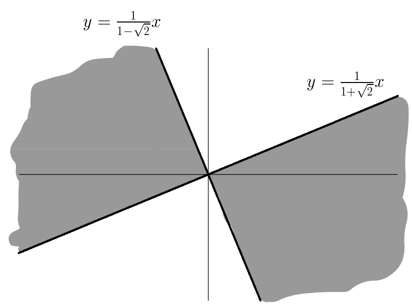
213 (γ′) Ο $z=1-i$

216 Είναι το $\mathbb{C}$ εκτός του 1 και των πραγματικών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 0.

217 Είναι οι μιγαδικοί $x+yi$ για τους οποίους ισχύει:

- $y>0$ και $y<\frac{1}{1+\sqrt{2}}x$ και $y<\frac{1}{1-\sqrt{2}}x$ **ή**
- $y<0$ και $y>\frac{1}{1+\sqrt{2}}x$ και $y>\frac{1}{1-\sqrt{2}}x$

Πρόκειται, τελικά, για τους μιγαδικούς που οι εικόνες τους ανήκουν στο γραμμοσκιασμένο χωρίο:



220 $z=1$

224 $\kappa=-\frac{8}{7}$, $\lambda=\frac{40}{7}$

226 $w=2-3i$ και $w=-2+3i$

231 $p=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

234 1

236 Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=1$

241 Η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$.

246 Τους μη μηδενικούς πραγματικούς και εκείνους που έχουν μέτρο 1

251 Κύκλος με αρχή το O και ακτίνα $2k$.

256 Ο $z = \frac{3}{20} + \frac{3}{10}i$.

262 Έστω $a = x+yi$ και $b = p+qi$.Από τις $|f(1)| = 1$ και $|f(-1)| = 1$ υψώνοντας στο τετράγωνο και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε $x+xp+yq = 0$. Κάνοντας το ίδιο με τις $|f(i)| = 1$, $|f(-i)| = 1$ βρίσκουμε $y - yp + xq = 0$. Έχουμε το σύστημα ως προς x, y:

$$\left.\begin{array}{l}(1+\mathrm{p})\,x + qy = 0\\ qx + (1-p)\,y = 0\end{array}\right\}$$

Αν $|b| \neq 1$ τότε το σύστημα δίνει $x = y = 0$ δηλαδή $a = 0$ και επιστρέφοντας στις $|f(\pm 1)| = 1$ βρίσκουμε $b = 0$. Αρκεί να αποκλεισθεί ότι $|b| = 1$. Αν όμως $|b| = 1$ θα είναι $|f(\pm b)| = 1$ που σε συνδυασμό με τις $|f(\pm 1)| = 1$ μας οδηγεί σε άτοπο.

1.4 Η εικόνα του z γράφει την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$. Μικρότερη: β. Μεγαλύτερη:α

265 (α′) Είναι $|z_1| = |z_2| = 1$

266 Θα είναι (με κάποια σειρά) οι $1, i, -i$

267 (β′) Ναι όταν είναι $z = 2$ ή $z = -1 \pm i\sqrt{3}$

268 (β′) Ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Ισόπλευρο.

270 $w = -\lambda - i$ ή $w = -\lambda\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} - i$

272 Όχι.

273 Όχι

278

1. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 - 2x = 0$ που έχει κέντρο $\Lambda(1,0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$.
2. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + x + y^2 - y = 0$ που έχει κέντρο $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. i και $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$
4. Μέγιστη: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5}+3\right)$. Ελάχιστη: 0.

280 i και $-i$

281 (β′) 2

284 1

285 Το σχήμα που απαρτίζεται από τους κύκλους $x^2 + (y-1)^2 = 2$, $x^2 + (y+1)^2 = 2$

288 1

289 $z_1 = \pm i$, $z_2 = \mp i$

290 Το $\rho_1^2+\rho_2^2$ είναι πάντα πραγματικός αριθμός. Βρίσκουμε $\rho_1^2+\rho_2^2=-12\lambda^2+4\lambda+1$ και το τριώνυμο αυτό έχει μέγιστο για $\lambda=\frac{1}{6}$ το $\frac{4}{3}$

291 Δείξτε πρώτα ότι

$$A^2=2\left(r_1^2+r_2^2+\left|z_1^2-z_2^2\right|\right)$$

Η ελάχιστη τιμή είναι $2r_1$ και επιτυγχάνεται λ.χ. όταν $z_1=r_1$, $z_2=r_2$. Η μέγιστη τιμή είναι $2\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ και επιτυγχάνεται όταν λ.χ είναι $z_1=r_1$, $z_2=r_2i$.

292 $1, \pm\frac{1}{2}$

293 $\frac{\alpha^2}{4}<\beta<1$

295 Ελάχιστη τιμή του $|z|$: 0 για $z=0$. Μέγιστη τιμή του $|z|$:$\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$ για $z=\frac{-1+i\sqrt{23+8\sqrt{10}}}{4}$.

296 Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}(z_0)x-\mathrm{Im}(z_0)y=\alpha$.

298
1. *Της εικόνας του* z: Η ευθεία με εξίσωση $x-y=1$. *Της εικόνας του* w:Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+x-y=0$ (κέντρο το $K\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$) οποίο έχει εξαιρεθεί η αρχή των αξόνων.
2. Ο $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. Για τους w δεν υπάρχει μιγαδικός με ελάχιστο μέτρο.

299 1(α): $y=x-2$, 2: $w=3+i$, $w=-4+i$

302 1. $1+i$, $1-i$ 2. Ο κύκλος με κέντρο $K(4,-3)$ και ακτίνα $R=2$.

304 -1

305

306 2. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι ο είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $R=1$.

307

309

308

310 Ναι. Είναι $f(7)=f(-3)=22$.

311 14

315 $\alpha=2, \beta=3, \gamma=-2$

316 (4)

317
1. $\mathcal{D}_f=[1,\,3]$
2. $\mathcal{D}_g=(9,+\infty)$

318
1. $D_f = R$
2. $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R} - \{1,3\} = (-\infty,1) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$
3. $\mathcal{D}_g = (-\infty,1] \cup [3,+\infty)$
4. $\mathcal{D}_h = (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$
5. $\mathcal{D}_\omega = (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$
6. $\mathcal{D}_\psi = (-\infty,2-\sqrt{2}) \cup \left(2-\sqrt{2},1\right) \cup \left(3,2+\sqrt{2}\right) \cup (2+\sqrt{2},+\infty)$

319 $\mathcal{D}_f = (-\infty,1] \cup (2,+\infty)$, $\mathcal{D}_g = (2,+\infty)$.

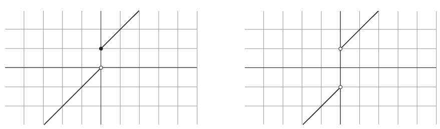
320 Τα A, Γ.

321 Για $t=-2$.

322 $\alpha = 5$

323 $f\,(7) = -\frac{43}{11}$

324 Οι γραφικές παραστάσεις είναι:



325
1. $A\,(1,2)\,,\ B\,(3,10)$
2. $y = 4x-2$

326 (I) $y=\sqrt{\alpha^2+x^2}$, (II) $y=\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}$ (III) $y=\frac{\alpha}{\eta\mu x}$ (IV) $y=2\alpha\eta\mu x$

327 (α) $y=x+1$, (β) $y=\frac{1}{2}x+1$

328 (α) $f\,(x)=\begin{cases} 1-x\ , & x\le 0 \\ x\ , & x>0 \end{cases}$, (β) $f\,(x)=\begin{cases} 1-x\ , & x\le 0 \\ 1\ , & 0<x<1 \\ x\ , & 1\le x \end{cases}$

329 (α) $f\,(x)=\begin{cases} -2-x\ , & x\le -2 \\ \sqrt{4-x^2}\ , & -2<x<2 \\ x-2\ , & 2\le x \end{cases}$
(β) $f\,(x)=\begin{cases} -2x-1\ , & x<-1 \\ x+1\ , & x>1 \end{cases}$

330 (α) $d=\sqrt{x^4-7x^2+16}$, (β) $d=\frac{1}{x}\sqrt{x^4+1}$

331 $\lambda = 2$

333 Για $\lambda = 3$.

334 $E\,(0,2),\ A\,(-3,0),\ B\,(1,0),\ \Gamma\,(4,0),\ Z\left(2,-\frac{5}{3}\right),\ H\,(0,-1)$

335 Η $f+g$ έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_{f+g} = [-3,1] \cup [2,3]$ και $(f+g)(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-3x+2}$. Η $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το ίδιο με της $f+g$ και $(fg)(x) = \sqrt{9-x^2}\sqrt{x^2-3x+2}$. Τέλος το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = [-3,1) \cup (2,3]$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

336 Η τομή των πεδίων ορισμού τους είναι το κενό σύνολο.

337 $\frac{11}{4}$

339 $x = 5$

342 $f(x) = 2x - 1$

343 $f^{-1}(x) = \ln x, g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$

344

1. $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$
2. $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}] \cup [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+x-2}$
3. $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-1,1) \cup (2, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = \ln\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)$

345 Όχι, Όχι, Ναι.

346

	Μέγιστο	Ελάχιστο
f	ΝΑΙ	ΝΑΙ
g	ΝΑΙ	ΝΑΙ
h	ΟΧΙ	ΝΑΙ

348 Υπάρχει ένα κοινό σημαίο το $M(1,1)$.

349 $[1,5]$

350 Όχι

351 $\mathcal{D}_{\varphi} = [-1,1]$, $\mathcal{D}_{\sigma} = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 3, +\infty)$

352 $k = 0$

353 $f(x) = xe^x$

354 (3)

355 $\alpha < 0$ ή $\alpha > 1$

356 $f(x) = 2x - 1$

357 $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}} + \frac{x+1}{2}$

362 $M\left(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}\right)$

363 (3)

364 Είναι το (4). Ισχύει για $\alpha = -1$ και οποιαδήποτε τιμή του β.

367 $d = d(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left|2x^3 - 6x^2 - x - 2\right|$

368 (1) $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{6+3x}$ (2) $g^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)+1}{\ln(x-1)-1}$ (3) $h^{-1}(x) = \ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)$

371 (1), (4), (6)

372 (5) $g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

374 $\frac{1}{2}$

376

377 Όχι.

378 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[2\nu+1]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[2\nu+1]{x} & x \geq 0 \end{cases}$

379 Κάθε $\alpha \neq 0$

380 Ναι.

381 Όχι.

383 Αν μία συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T \neq 0$ τότε θα είναι $x \neq x + T$ και $f(x) = f(x+T)$ επομένως η f δε μπορεί να είναι 1-1 άρα ούτε και γνησίως μονότονη.

384 (1) $\uparrow$, (2) $\uparrow$, (3)

386 (2)Έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι $(f \circ 2f)(x) = \frac{3x+1}{x+3}$.

388 $f(x) = 2x - 1$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

392 Αν η g ήταν φθίνουσα η $g \circ f$ θα παρουσίαζε μέγιστο στο x_0. Η w έχει ελάχιστο στο -1 το $\frac{5}{6}$

393 Για $\lambda = \pm 1$. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda x}{\lambda x - 1}, & x \neq \lambda \\ 1, & x = \lambda \end{cases}$

394 Είναι $f^{-1}(x) = -x^3 - x$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

395 Όχι.

396 Όχι.

398 $g^{-1}(\alpha) = f^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$

399 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+1}$

400 $f(x) = x + 2$

401 $f(x) = -\frac{1}{x-2}$ για $x \neq 2, 3$

402

1. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο $\lambda = -2 + \sqrt{2}$ δηλαδή η $f_{-2+\sqrt{2}}(x) = x^2 + \left(-2+\sqrt{2}\right)x + 1$
2. Ναι. Όλες οι f_λ που αντιστοιχούν στις τιμές $\lambda < -2$ ή $2 < \lambda$.

403 $x = 2$

404 $x = 1$

405 $(3) f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

406 $f(0) = 1,\ f(1) = 6$

407 $(4) f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{4x}$

412 $t = 1$

415 $g(x) = x - 2$

417 Όχι

423

1. 0, 0, 3, 3
2. 0, 0, 3, 3
3. 0, 0, 4, 3
4. 3, 0, 0, 3
5. 3, 0, 2, *
6. 3, *, 2, *

424

1. 2
2. 9
3. β
4. α
5. β
6. $-\beta$
7. 2
8. v

425

1. 1
2. 0
3. 1
4. 0
5. 1
6. 0
7. -1
8. -1

426

1. $-\infty, +\infty, -\infty, +\infty$
2. $+\infty, -\infty, -\infty, +\infty$
3. $+\infty, +\infty, +\infty, +\infty$
4. $-\infty, +\infty, +\infty, +\infty$

427

1. 0
2. 0
3. $\sqrt{2}$
4. 2
5. $|\alpha| + 1$
6. $\frac{1}{3}$

428
1. 2
2. -1
3. $\frac{1}{2}$
4. -3
5. $-\frac{3}{4}$
6. 0

429
1. 0
2. 4
3. $\frac{2}{9}$
4. 0
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\frac{1}{2}$

430
1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{16}$
4. 0
5. $\frac{1}{4}$
6. $-\frac{1}{8}$

431
1. 0
2. 1
3. 0
4. 1
5. 0
6. 0

432
1. 4
2. $\frac{2}{3}$
3. -3
4. $e + 2$

433
1. 9
2. 0
3. $\frac{1}{2}$
4. 0
5. $4x^3$
6. 0

434 $(1')$ $\frac{1}{6}$ $(2')$ $\frac{1}{6}$ $(3')$ $\frac{1}{6}$

435
1. $-\frac{1}{3}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. -1
4. $-\infty$
5. 1
6. -1
7. $+\infty$
8. 1

436
1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $-\infty$
6. $+\infty$
7. $-\infty$
8. $-\infty$

437
1. $-\infty$
2. $+\infty$
3. $-\infty$
4. $-\infty$
5. $-\infty$
6. $+\infty$

438
1. $-\infty$
2. $+\infty$
3. $-\infty$
4. $-\infty$
5. Δεν υπάρχει
6. $+\infty$

439
1. $+\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $-\infty$
6. 0

440
1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $-\infty$
4. $+\infty$
5. $-\infty$
6. 0

441
1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $+\infty$
4. 2
5. $-\infty$
6. $+\infty$

442
1. $+\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. 2
5. $+\infty$
6. 2

443
1. $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
2. (α′) 0
   (β′) 0
   (γ′) $\frac{7}{108}$
   (δ′) $\frac{3}{152}$
   (ε′) 0
   (ϛ′) 0
   (ζ′) 0
   (η′) $-\infty$
   (ϑ′) $+\infty$
   (ι′) $*$
   (ια′) $\frac{e+2}{e^3-e^2+e+3}$
   (ιβ′) $\frac{2}{3}$

444
1. 2
2. 8
3. 8
4. 14
5. 14
6. y^2+3y+4
7. 22
8. 22
9. y^2+5y+8
10. 4

445 $p = 3,\ q = -\frac{7}{2}$

446 Για το **(Α)**

1. 15
2. 18
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. 3
6. 3
7. 3
8. $3\sqrt{m^2+1}$

Για το **(B)**

1. $\alpha = 0,\ \alpha = \frac{4}{3}$
2. $\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17},\ \alpha = 3$

447 4

448 -4

449

1. $+\infty$
2. 1
3. $-\infty$
4. 1
5. 1
6. $-\infty$
7. $+\infty$
8. $+\infty$
9. $+\infty$
10. $+\infty$

450

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $-\infty$
4. $-\infty$
5. 1
6. $\frac{2}{5}$
7. 0
8. $\frac{1}{2}$
9. $+\infty$
10. 0

454 1

455 $2a$

459 $\lambda = 3, \mu = 1$

460 $x = 1$

462 1

463 1

464 $\frac{9}{2}$

465 -1

466 $f(x) = 2x - 4,\ \alpha = -2,\ \beta = 2$

467 $\frac{1}{3}$

468

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1} = \begin{cases} +\infty & , \quad \mu < 0 \\ -\infty & , \quad 0 \le \mu < 1 \\ 0 & , \quad \mu = 1 \\ +\infty & , \quad \mu > 1 \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}=\begin{cases}\frac{\mu+4}{\mu+1} & , \quad \mu\neq -1\\ * & , \quad \mu=-1\end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\mu x\right)=\begin{cases}-\infty & , \quad \mu<-1\\ 1 & , \quad \mu=-1\\ +\infty & , \quad \mu>-1\end{cases}$

469 1. (α′) 15
(β′) 18
(γ′) $+\infty$
(δ′) $+\infty$
(ε′) 3
(ϛ′) 3
(ζ′) 3

2. (α′) Δεν υπάρχει.
(β′) $\alpha=-2$ και $\alpha=\frac{10}{7}$

470

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\begin{cases}+\infty & \mu<1\\ 0 & \mu=1\\ -\infty & \mu>1\end{cases}$$

471 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$

472 $+\infty$

473 1. $\mathcal{D}_f=(-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty)$

2. (α′) $-\frac{\alpha+\beta}{2}$
(β′) $+\infty$
(γ′) $-\alpha$
(δ′) $-\beta$
(ε′) $*$
(ϛ′) $\lim\limits_{x\to|\beta|}f(x)=\begin{cases}\sqrt{2\beta(\alpha+\beta)}+\beta & , \quad \beta<0\\ -\beta & \quad \beta\geq 0\end{cases}$
(ζ′) $+\infty$
(η′) $\frac{1}{2}|\alpha+\beta|$

474 1. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

2. Σε κάθε διάστημα $(0,h)$ με $h>0$ περιέχονται διαστήματα της μορφής $\left(\frac{1}{2\kappa\pi},\frac{1}{(2\kappa+1)\pi}\right),\left(\frac{1}{(2\kappa+1)\pi},\frac{1}{(2\kappa+2)\pi}\right),\left(\frac{1}{(2\kappa+2)\pi},\frac{1}{(2\kappa+3)\pi}\right)$ με $\kappa\in\mathbb{N}^*$. Στο πρώτο διάστημα η f παίρνει θετικές τιμές, στο δεύτερο αρνητικές και στο τρίτο θετικές. Άρα δεν είναι μονότονη.

475 Αν απαντήσατε «$\lambda=1$» ξανασκεφθείτε το. Η απάντηση είναι «δεν υπάρχει τιμή του λ»

476 $+\infty$

477 -1

478 (2) Όχι. Για παράδειγμα με $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και $\sigma_1=-\frac{\pi}{2}$, $\sigma_2=\frac{\pi}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to\sigma_2}d(x)=+\infty$ χωρίς να είναι $\sigma_2=+\infty$.

480 $t=1$ ή $t=2$

481 $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$

482

1. $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$
2. $\frac{\nu}{\mu}\alpha^{\frac{\nu-\mu}{\nu\mu}}$
3. $\frac{\mu^2-\nu\mu+\nu^2}{\mu^2+\nu\mu+\nu^2}$

485 Μόνο στην περίπτωση (1)

486 Απαντηση:

1. 5
2. 6
3. 0
4. 6
5. $\sqrt{3}$
6. 3
7. 7
8. 5

487

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{31}{6}$
3. 9

488

1. Ναι
2. Ναι
3. Ναι
4. Όχι
5. Ναι
6. Ναι

489

1. $\alpha = 2$
2. Δεν υπάρχει.
3. $\alpha = 6$
4. Δεν υπάρχει.

490 Όλες.

492

1. συνεχής
2. ασυνεχής

493

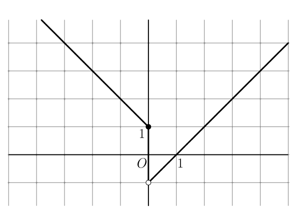
1. 31
2. 18
3. 1

496 $\alpha = 4,\ \beta = \frac{5}{3}$

497 $\alpha = -3$

498

1. Δεν είναι συνεχής διότι είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$. Η γραφική της παράσταση είναι:



2. 1

499 Όχι. Αν ήταν συνεχής τότε θα είχαμε το άτοπο συμπέρασμα: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{s}\in\mathbb{R}$.

502 Ναι διότι $|\varphi(x)|=\left|x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq x^2$ και επομένως $-x^2\leq\varphi(x)\leq x^2$ για όλα τα x. Άρα, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0=\varphi(0)$.

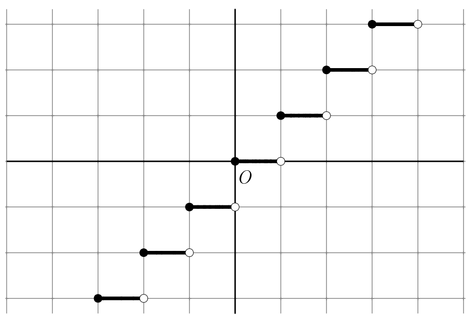
505 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$

512 Όχι. Για παράδειγμα να πάρετε τις συναρτήσεις $g(x)=0$ και $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$

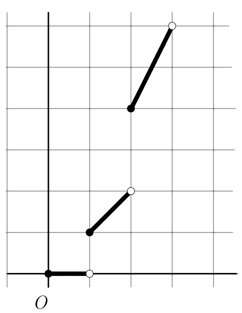
513
1. $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$
2. $\alpha=-1,\beta=0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

514 Όχι.

516 Οι γραφικές παραστάσεις των f,g είναι:



,



Το σύνολο τιμών της g είναι το $\{0\}\cup[1,2)\cup[4,6)$.

523 Η f στο $(-2,2)$ είναι αρνητική.

528 Όχι-Όχι-Όχι.

529 Απαντηση: $[4,8]$, $[4,25]$, $[1,16]$, $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $[0,2)$, $[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$,$[1,+\infty)$.

541 (α′) Ναι (β′) Όχι

542

1. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}$ ή $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}$

2. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x<0 \\ c & x=0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x>0 \end{cases}$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x<0 \\ c & x=0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x>0 \end{cases}$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x\neq 0 \\ c & x=0 \end{cases}$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5} & x\neq 0 \\ c & x=0 \end{cases}$$

556 (4) Η σταθερή $f(x)=0$, η σταθερή $f(x)=1$ και οι εκθετικές $f(x)=\alpha^x,\ \ a>0,\ \ \alpha\neq 1$

558 Η απάντηση είναι ναι. Ας ονομάσουμε για συντομία Α και Β τον πρώτο και τον δεύτερο παίκτη αντιστοίχως. Ο Α θα κάνει 5 κινήσεις και ο Β τέσσερεις δηλαδή τον τελευτάιο λόγο δεν τον έχει ο Β αλλά ο Α. Θα πρέπει δε να συμπληρωθούν 5 συντελεστές που αντιστοιχούν σε όρους περιττής τάξης και 4 συντελεστές που αντιστοιχούν σε όρους άρτιας τάξης. Ας δούμε μία στρατηγική που μπορεί να οδηγήσει τον Β σε νίκη.

1. Ο Β μπορεί να φροντίσει ώστε κατά τις 3 πρώτες κινήσεις του να σημειώνει όσους περισσότερους συντελεστές άρτιας τάξης μπορεί. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα μετά την 4η κίνηση του Α να έχουν απομείνει για συμπλήρωση δύο συντελεστές εκ των οποίων *οπωσδήποτε* ο ένας θα είναι περιττής τάξης $2\nu+1$.

2. Ας πούμε λοιπόν ότι το πολυώνυμο έχει διαμορφωθεί ως εξής: $f(x) = g(x) + *x^{\mu} + *x^{2\nu+1}$ όπου $g(x)$ είναι το πολυώνυμο που απαρτίζεται από τους συντελεστές που έχουν ήδη συμπληρωθεί. Στόχος του Β είναι να δώσει τέτοια τιμή β στο συντελεστή του x^{μ} ώστε όποια τιμή α και αν επιλέξει ο A για τον συντελεστή του $x^{2\nu+1}$ να ισχύει:

$$pf(t_1) + qf(t_2)$$

για κάποιους αριθμούς p,q,t_1,t_2 με τους p,q να είναι θετικούς. Τότε το πολυώνυμο $f(x)$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

3. Ας δούμε πως μπορεί να γίνει η επιλογή του β: Θα είναι $f(x) = g(x) + \beta x^{\mu} + \alpha x^{2\nu+1}$ και ο Β θέλει $pf(t_1)+qf(t_2)=0$ δηλαδή (κάνοντας τις πράξεις)

$$\beta = -\frac{pg(t_1) + qg(t_2) + \alpha\left(pt_1^{2\nu+1} + qt_2^{2\nu+1}\right)}{pt_1^{\mu} + qt_2^{\mu}}$$

Πρέπει βέβαια να είναι $pt_1^{\mu}+qt_2^{\mu}\neq 0$. Πρέπει ακόμη η τιμή του β να μην εξαρτάται από την τιμή του α (που ο Β την αγνοεί). Γιαυτό πρέπει να είναι $pt_1^{2\nu+1}+qt_2^{2\nu+1}=0$. Συνοψίζοντας λοιπόν πρέπει ο Β να επιλέξει αριθμούς p,q,t_1,t_2,β ώστε:

   (α′) $p,q>0$

   (β′) $pt_1^{\mu}+qt_2^{\mu}\neq 0$

   (γ′) $pt_1^{2\nu+1}+qt_2^{2\nu+1}=0$

   (δ′) $\beta = -\frac{pg(t_1)+qg(t_2)}{pt_1^{\mu}+qt_2^{\mu}}$

Οι επιλογές των p, q, t_1, t_2 μπορούν να γίνουν κατά πολλούς τρόπους (βρέιτε μερικούς) και βέβαια η επιλογή του β είναι μετά αυτόματη.

560 Όχι κατ΄ ανάγκην.

561 (2) $+\infty$ (3) 0

562 1 και 0.

566 Είναι $\mathcal{D}_f = R - \{\alpha\}$ και το $\mathcal{D}_{f\circ f}$ αποτελείται από τα $x \neq \alpha$ για τα οποία είναι $f(x) \neq \alpha$ τελικά τα $x \neq \alpha, \frac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha-1}$ (Οι δύο αυτές τιμές συμπίπτουν αν $\alpha = 0$. Είναι $(f\circ f)(x) = \frac{(1+\alpha)x+\alpha-\alpha^2}{(1-\alpha)x+\alpha+\alpha^2}$ Το $\mathcal{D}_{f\circ f\circ f}$ αποτελείται από τα $x \neq \alpha, \frac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha-1}$ για τα οποία $(f\circ f)(x) \neq \alpha$ δηλαδή τελικά από τα $x \neq \alpha, \frac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha-1}, \frac{\alpha(\alpha^2+2\alpha-1)}{\alpha^2+1}$. (Η τρίτη τιμή που εξαιρούμε δηλαδή η $\frac{\alpha(\alpha^2+2\alpha-1)}{\alpha^2+1}$ συμπίπτει με κάποια από τις προηγούμενες μόνο αν $\alpha = 0$). Είναι δε $(f\circ f\circ f)(x) = \frac{(1+2\alpha-\alpha^2)x+\alpha+\alpha^3}{(1+\alpha^2)x+\alpha-2\alpha^2-\alpha^3}$

568 Όχι.

569

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right) = \begin{cases} +\infty & \mu < 1 \\ 0 & \mu = 1 \\ -\infty & \mu > 1 \end{cases}$$

571 $a < -1$ ή $3 < a$

572 1

574 $\lambda = 0$

575 (1) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ (2) Για τα $\sigma \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

579

1. $+\infty$
2. Πεδίο ορισμού: $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$. Είναι $\lim_{x\to-2^+}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2} = +\infty$ και $\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2} = -\infty$, επομένως το όριο της συνάρτησης στο - δεν υπάρχει.

580 Το λάθος βρίσκεται στο σημείο που γράφουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Δε μπορούμε να αντικαθιστούμε τα όρια τμηματικά.

583 Είναι γνησίως φθίνουσα.

584 $\frac{2}{3}$

586 $[2, 3]$

590 Οι 1, 2, 6

591 $f(7) = -\frac{43}{11}$

597 Να θέσετε $f(x) = y$. Λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει θα βρείτε ότι για *δοθέν* x θα είναι $y = -\frac{1}{3}x$ ή $y = -\frac{1}{2}x$. Κατόπιν, αξιοποιώντας τη συνέχεια της f δείξτε ότι ή $f(x) = -\frac{1}{2}x$ *για όλα τα* x είτε ότι $f(x) = -\frac{1}{3}x$ *για όλα τα* x.

601 (2) $f(x) = 0$, $f(x) = \sqrt[4]{k}x^3$

609 $\frac{\pi}{4}$

611 $f(f(0)) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$.

612 $g(t) = \begin{cases} t^2 & , \quad t < -\frac{1}{2} \\ (t+1)^2 & , \quad t \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, συνεχής.

613 Όχι. Για παράδειγμα με $x_0 = 0$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$ έχει αυτή την ιδιότητα αλλά στο $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής.

616

1. $f'(1) = \frac{1}{4}$
2. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $f'\left(e^2\right) = 3$
4. $f'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
5. $f'(1) = 1$
6. $f'(0) = 1$

617

1. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}\sqrt{x^2-1}}$
2. $f'(x) = \frac{(e^x \ln x+1)(1-x)}{(1+x\ln x)^2}$
3. $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$
4. $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(-1+x)}$

618

1. $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$
2. $f'(x) = \frac{-\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha - x^2}}$
3. $f'(x) = \frac{\beta x}{\alpha\sqrt{x^2-\alpha^2}}$
4. $f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

619

1. $f'(x) = \frac{(e^x \ln x+1)(x-1)}{(1+x\ln x)^2}$
2. $g'(x) = 1 + 2\frac{|x^2-x|}{x^2-x}x - \frac{|x^2-x|}{x^2-x}$, $x \neq 0, 1$

624 2

626

1. $y = (1+e)x$

2. $y = 3x - 2$
3. $y = -2x + 7$
4. $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$

627 Όχι

628 $M\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $N\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

629
1. $y = \left(2\sqrt{2} - 2\right)x - 3 + 2\sqrt{2}$,
   $y = \left(-2\sqrt{2} - 2\right)x - 3 - 2\sqrt{2}$
2. $y = \left(-3 + 2\sqrt{2}\right)x + 4 - 2\sqrt{2}$,
   $y = \left(-3 - 2\sqrt{2}\right)x + 4 + 2\sqrt{2}$
3. $y = -3x + 4$
4. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

632 $\kappa = 3, \lambda = -2$

633 $\alpha = 2$

636 $y = x - 1$

637

638 $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{4}{3}$

641 2

642 $f(1) = 2$

643 $y = x - 2$

644 $y = 6x - 2$

646 $p = \frac{e^2+6e+1}{2e^2+4e+6}$

647 Στο 1 δεν υπάρχει. Στο -1 υπάρχει και είναι $f'(-1) = -5$.

648 $f'(0) = 2$

649 19

650 $g'(x) = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{180}$

651 $\alpha = \frac{4}{3},\ \beta = \frac{2}{3}$

652 $d'(x)=\frac{13x-2}{3\sqrt{13x^2-4x+1}}$

654 $\alpha=\pm1$

658 Η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύση την $x=\sqrt{e}$. Στο σημείο $P\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$ οι $\mathcal{C}_f,\mathcal{C}_g$ έχουν κοινή εφαπομένη την $y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}$.

659 $f'(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2x & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

660

1. Η $f(x)=|x|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από το $x_0=0$.
2. Η $g(x)=|x|+|x-1|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από τα $x_0=0,1$.
3. Η $h(x)=|\eta\mu x|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από τα $x_0=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$.

662 Υπάρχουν άπειρες παραβολές που είναι της μορφής $f(x)=\alpha\left(x^2-2x+1\right)+3x+2$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$

664 $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-|x|$.

665 Υπάρχει μία εφαπτομένη η $y=4x-3$ που εφάπτεται στην $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με τετμημένη -2 και στην $\mathcal{C}_g$ στο σημείο με τετμημένη 1

668 (2) $\kappa=-4\nu+2$, $\lambda=4\nu-8$

669 Στα σημεία Α $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}-1\right)$,Β $\left(\frac{5\pi}{8},-\sqrt{2}-1\right)$, Γ $\left(\frac{9\pi}{8},\sqrt{2}-1\right)$, Δ $\left(\frac{13\pi}{8},-\sqrt{2}-1\right)$

670 $f'(0)=10$

672 $y=6x-2$

673 $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$

674 (1) $f(-1)=g(-1)=0$

678 325

679 $\alpha=1$ ή $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ή $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}$

681 Όχι.

682 1

686 (2)Δεν είναι συνεχής στο 0

687 Λ, Λ, Σ

691 (1) $-\frac{1}{2}$, (2) $-\frac{3}{2x^2}$

692 α

697 $f''(2) = 42$

698 $x_0 = 0,\ y_0 \leq 0$

699 $y = -3x - 4$

700 $\left(f'\left(\eta\mu^2 x\right) - f'\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right)\eta\mu 2x.$

701 $\frac{\nu x^{\nu+1} - \nu x^{\nu} - x^{\nu} + 1}{(x-1)^2}$

703 $y = kex$

704 $\kappa = 3, \lambda = -1, \mu = 2$

708

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^2}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x - 1}$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{e}{x^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)(1-x^2)}}$

709

1. $d'(t) = 5,\ E'(t) = 12t$
2. $d'(t) = \frac{x'(t)x(t) + y'(t)y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}},\ E(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t)\,y(t) + x(t)\,y'(t)\right)$

710

1. $x'(t)x(t) + y'(t)\,y(t) = 0$
2. $x'(t) + y'(t) = 0$
3. $x'(t)e^{x(t)} + y'(t)\,e^{y(t)} = 0$

711 Αν υ_1, υ_2 είναι οι ταχύτητες ρυμουλκού-ρυμουλκουμένου αντιστοίχως τότε $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}$

713 (1) $E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}$, (2) $E'(4) = -\frac{14}{3}$

714 $g'(x) = -\mu\left(g(x) - M_0 - M\right)$. Η σταθερά M_0 είναι η συγκομιδή όταν δε χρησιμοποιηθεί λίπασμα.

715 Η f' μηδενίζεται στα -1, 0, 1. Η f παρουσιάζει ακρότατα στα 0,1 (τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο αντιστοίχως). Η g' μηδενίζεται στα -2, -1, 0, 1, 2. Η g παρουσιάζει ακρότατα στα -2, 1, 2 (τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο αντιστοίχως).

716

1. 1

2. -1, 1
3. -1, 1, 2
4. 1, 2
5. $0, \ln 2$
6. $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

717
1. $\xi = 0$
2. $\xi = -2$
3. $\xi = 1$
4. $\xi = \ln 3 - \ln 2$
5. $\xi = \frac{1}{4}$
6. $\xi = \frac{1}{e}$

718
1. $\xi = \frac{5}{2}$
2. $\xi = -\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{283}$
3. $\xi = -2+3\sqrt{2}$
4. $\xi = 2$
5. κάθε $\xi \in (1,4)$
6. $\xi = \frac{5}{2}$

719 $\xi = 1-\frac{1}{6}\sqrt{21}$

720 (1) $f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$ (2) Τα ξ του θεωρήματος μέσης τιμής είναι τα $\xi = \sqrt{2}-1$, $\xi = 1-\sqrt{2}$.

722
1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}-1$
2. Στα $x_0 \neq 0$
3. Όχι διότι η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα $x_0 \in (-\alpha,\alpha)$

732 (2) Από το (1) βρίσκουμε ότι $\frac{\mu}{\xi-\alpha}+\frac{\nu}{\xi-\beta}=0$ και λύνοντας ως προς ξ έχουμε ότι $\xi = \frac{\mu\beta+\nu\alpha}{\mu+\nu}$ από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα.

735 $g(x) = 1992e^x\sigma\upsilon\nu x$

746
1. $\left[-\sqrt{2},0\right], [\sqrt{2},+\infty)$
2. $(-\infty,0], [\ln 4,+\infty)$
3. $(-\infty,1), (1,+\infty)$
4. $(0,+\infty)$

747 Μέγιστο: $f(1) = \frac{17}{8}$, Ελάχιστο: $f(4) = 1$.

748 Μέγιστο: $f(1) = 3$, Ελάχιστο: $f(-1) = 1$.

749 Μέγιστο: $f(0) = 6$, Ελάχιστο: $f(2) = 0$.

750 (2) $[f(2), f(4)] = [11, 29]$

751 Η f είναι γνησίως αύξουσα $[-1, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$. Το σύνολο τιμών της f είναι $[f(-1), f(1)] \cup [f(2), f(1)] \cup [f(2), f(3)] = [-22, 6] \cup [5, 6] \cup [5, 10] = [-22, 10]$.

754 $[-\frac{1}{3}, 1]$

757 $f(3) = 12 \ln 9$

758 (1) $\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2}$ (2) Είναι γνησίως αυξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

759 $f(0) = \frac{2}{3}$

760 Για το ανοικτό ναι για το κλειστό όχι.

761 Υπάρχουν δύο σημεία τα $M\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

762 Οταν είναι ίσοι με 5.

764 (2) $d(p) = \sqrt{(p^2 + 4)(1 + p^2)}$ (γ′) Για $p = 0$ και είναι $d(0) = 2$.

765 Οι πωλήσεις μετά χρόνο t θα είναι $\Pi(t) = 500\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$ και $\Pi(30) = 60\sqrt{15} = 232,\ 38$.

766 Είναι $\Pi(t) = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{10}t}\Pi_0$ και λύνοντας την εξίσωση $\Pi(t) = e\Pi_0$ βρίσκουμε $t = \frac{10}{\ln 5 - 2\ln 2} = 44.8$.

767 Η $E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{4\alpha\beta + 2\sqrt{\alpha\beta S}}{2\beta}$ το οποίο είναι το

$$E\left(\frac{4\alpha\beta + 2\sqrt{\alpha\beta S}}{2\beta}\right) = 4\alpha\beta + 4\sqrt{\alpha\beta S} + S$$

769 Είναι $f'(x) = n\left((1+x)^{n-1} - x^{n-1}\right)$. Επομένως αν ο n είναι άρτιος η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν ο n είναι περιττός τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

772 *(1)* Όταν $x + y = \alpha$ η παράσταση xy παρουσιάζει μέγιστο για $x = y = \frac{\alpha}{2}$ ενώ η παράσταση $x^2 + y^2$ παρουσιάζει ελάχιστο επίσης όταν $x = y = \frac{\alpha}{2}$. *(2)* Όταν $xy = \alpha$ η παράσταση $x + y$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = y = \sqrt{\alpha}$. *(3)* Όταν $x^2 + y^2 = \alpha$ η παράσταση $x + y$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$. Η παράσταση $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ γράφεται $k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha - x^2}}$ και $k'(x) = \frac{x^3 - \sqrt{\alpha - x^2}^3}{x^2(\alpha - x^2)\sqrt{\alpha - x^2}}$ επομένως $k'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{\alpha - x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > \alpha \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$ δηλαδή έχουμε ελάχιστο για $x = y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$. *(4)* Για $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \alpha$ η $x + y$ παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x = y = \frac{2}{\alpha}$.

774 Ο ολικός χρόνος που απαιτείται για την διαδρομή APB είναι $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\upsilon_1} + \frac{\beta - x}{\upsilon_2}$ με $0 \leq x \leq \beta$. Επομένως

$$t'(x) = \frac{x\upsilon_2 - \upsilon_1\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\upsilon_1\upsilon_2\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

Είναι

$$t'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha\upsilon_1\sqrt{\frac{1}{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $\alpha\upsilon_1\sqrt{\frac{1}{\upsilon_2^2-\upsilon_1^2}} < \beta$ ή ισοδύναμα $\upsilon_2 > \upsilon_1\sqrt{1+\frac{\alpha}{\beta}}$. Τότε ελάχιστο χρόνο έχουμε όταν $x = \alpha$ $\upsilon_1\sqrt{\frac{1}{\upsilon_2^2-\upsilon_1^2}}$.

- Ισχύει $\upsilon_2 \leq \upsilon_1\sqrt{1+\frac{\alpha}{\beta}}$. Τότε η t είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και ελάχιστη τιμή του χρόνου έχουμε όταν $x = \beta$.

775 1. $\mathcal{D}_g = (-1, +\infty)$

2. Γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

777 Το τυχόν σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης απέχει από την ευθεία απόσταση $d(x) = \frac{x^2+4x+5}{\sqrt{10}}$ η οποία γίνεται ελάχιστη για $x = -2$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $P(-2, -8)$.

778 Είναι $\alpha = -\frac{6}{5}, \beta = -\frac{3}{20}$. Τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$.

781 $f(x) = x^2 + x$

783 *(1)* $\alpha = 5, \beta = 6$ *(2)* $f(t) \geq 12 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$.

784 $x = 0,\ x = 1$

786 Είναι $\widehat{POB} = 2x$. Επομένως $AP = 2\rho\sigma\upsilon\nu x$ και ο ολικός χρόνος που απαιτείται για την διαδρομή APB είναι $t(x) = \frac{2\rho\sigma\upsilon\nu x}{\upsilon_1} + \frac{2\rho x}{\upsilon_2}$. Εργαζόμαστε με την προϋπόθεση ότι $\upsilon_1 < \upsilon_2$. Είναι $t'(x) = \frac{2\rho}{\upsilon_1}\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} - \eta\mu x\right)$ και $t'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} > \eta\mu x$. Αν x_0 είναι ο μοναδικός αριθμός του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$ για τον οποίο ισχύει $\eta\mu x_0 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ τότε η t είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της t παρουσιάζεται στα άκρα 0, $\frac{\pi}{2}$ του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$. Είναι $t(0) = \frac{2\rho}{\upsilon_1}$ και $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\rho}{\upsilon_2}$. Επομένως

- Αν είναι $\upsilon_2 < \frac{\pi}{2}\upsilon_1$ δηλαδή περίπου $\upsilon_2 < 1,57\upsilon_1$ τότε η συντομώτερη διαδρομή είναι η AB με άλλα λόγια ο αθλητής φθάνει γρηγορότερα στο B κολυμπώντας!

- Αν είναι $\upsilon_2 > \frac{\pi}{2}\upsilon_1$ ο αθλητής θα φθάσει γρηγορότερα στο B τρέχοντας κατα μήκος του τόξου AB.

- Στην περίπτωση που $\upsilon_2 = \frac{\pi}{2}\upsilon_1$ τότε ο ίδιος -ελάχιστοσ- χρόνος επιτυγχάνεται αν ο αθλητής κολυμπήσει κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ή αν τρέξει κατά μήκος του τόξου AB.

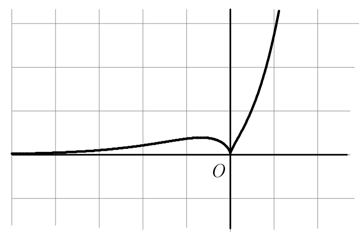
787 Τρεις.

791 Είναι $f'(x) = e^{2\lambda - x}x^{\lambda-1}(\lambda - x)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι στο $(0,\lambda]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[\lambda, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως έχει (ολικό) μέγιστο το $f(\lambda) = \lambda^\lambda e^\lambda = (\lambda e)^\lambda$. Έστω τώρα $g(\lambda) = (\lambda e)^\lambda$ με $\lambda > 0$. Είναι $g'(\lambda) = e^\lambda \lambda^\lambda (2 + \ln \lambda)$ και επομένως $g'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow 2 + \ln\lambda > 0 \Leftrightarrow \ln\lambda > -2 \Leftrightarrow \lambda > e^{-2}$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = \frac{1}{e^2}$. Άρα η ελάχιστη μέγιστη τιμή της f επιτυγχάνεται όταν $\lambda = \frac{1}{e^2}$ και είναι η $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = e^{-e^{-2}}$.

792 Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός του 0 και είναι

$$f'(x) = \frac{e^x |x|^{\frac{2}{3}}}{3} \, \frac{3x+2}{x}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{2}{3}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{2}{3}, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.



Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $f(x) \geq 0$ για όλα τα x, το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$. Η εξίσωση $e^x\sqrt[3]{x^2} - \lambda = 0$ ισοδυναμεί με την $f(x) = \lambda$ και το πλήθος των ριζών της εξαρτάται από το λ. Για $\lambda < 0$ η εξίσωση δεν έχει καμμία ρίζα. Αν $\lambda = 0$ έχει ακριβώς μία και για $0 < \lambda = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{12}{e^2}}$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες. Για $\lambda = f\left(-\frac{2}{3}\right)$ έχει ακριβώς δύο και για $\lambda > f\left(-\frac{2}{3}\right)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

793 Αν $n(\lambda)$ είναι το πλήθος των ριζών της εξίσωσης τότε

$$n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad |\lambda| > \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 2 & \alpha\nu \quad |\lambda| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 3 & \alpha\nu \quad 0 < |\lambda| < \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 2 & \alpha\nu \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

795
1. Πεδίο ορισμού: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, Σύνολο τιμών: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.
2. Γνησίως φθίνουσα, Γνησίως αύξουσα.

797 Είναι $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ και επομένως η μονοτονία της f στο διάστημα $[-2, 3]$ έχει ως εξής: Στο $[-2, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[1, 3]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Στο $[-2, 1]$ η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1$. Είναι $f(1) = -6 < 0$ και επομένως η f δεν μηδενίζεται στο $[-2, 3]$.

800 Έστω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα. Όμως $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Άρα από το θεώρημα του Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Άρα τελικά η f (άρα και η εξίσωση) έχει ακριβώς μία ρίζα.

801 Έχει ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

805 $f(4)$

806 $y=0$

808 Με $z=x+yi$ είναι $\left|z^3-z+2\right|^2=y^6+\left(3x^2+2\right)y^4+\left(3x^4-12x+1\right)y^2+x^6-2x^4+4x^3+x^2-4x+4$ και αφού $x^2+y^2=1$ είναι $\left|z^3-z+2\right|^2=16x^3-4x^2-16x+8$. Τελικά η μέγιστη τιμή είναι $\sqrt{13}$ που επιτυγχάνεται για $z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

809 Ο όγκος του του κουτιού θα είναι

$$V(x)=x(\alpha-2x)(\beta-2x)$$

Επειδή πρέπει $2x<\alpha$ και $2x<\beta$ συμπεραίνουμε ότι θα είναι $x<\frac{\alpha}{2}$ και $x<\frac{\beta}{2}$.
Επομένως η συνάρτηση $V(x)$ θα έχει πεδίου ορισμού το διάστημα $(0,\frac{\beta}{2})$. Παραγωγίζοντας την $V(x)$ βρίσκουμε
$V'(x)=12x^2-4\alpha x-4\beta x+\alpha\beta$.
Λύνοντας την ανίσωση $V'(x)>0$ βρίσκουμε ότι επαληθεύεται για
$x<\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)$ ή $x>\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)$.
Διαπιστώνεται εύκολα ότι
$\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)<\frac{\beta}{2}$
και ότι
$\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)>\frac{\beta}{2}$.
Επομένως η $V(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα
$\left(0,\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)\right]$
και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα
$[\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right),\frac{\beta}{2})$. Άρα παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x=\frac{1}{6}\left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)$.

811

1. Είναι τα $A\left(-2,0\right)$,$B\left(1,0\right)$
2.
   - Για $\lambda=0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{1}{2},+\infty)$.
   - Για $\lambda\neq 0$ η παράγωγος της f έχει ρίζες τις $\rho_1=\frac{-1-\sqrt{9\lambda^2-3\lambda+1}}{3\lambda}$ και $\rho_2=\frac{-1+\sqrt{9\lambda^2-3\lambda+1}}{3\lambda}$. Αν είναι $\lambda>0$ είναι $\rho_1<\rho_2$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\rho_1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1,\rho_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\rho_2,+\infty)$. Στα ρ_1,ρ_2 παρουσιάζει αντιστοίχως τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούμεθα αν $\lambda<0$.

814 Μέγιστο $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ για $x=\frac{3}{4}$

815 Το εμβαδόν είναι $E\left(r\right)=\frac{1}{4}r^2\sqrt{4-r^2}$ και η μέγιστη τιμή του είναι $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ για $r=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

817 $\frac{e-1}{e}$

823

1. $(-\infty,2]$: κοίλη, $[2,+\infty)$: κυρτή
2. $(-\infty,1]$: κυρτή, $[1,2]$: κοίλη, $[2,+\infty)$: κυρτή
3. $(0,1]$: κοίλη, $[1,+\infty)$: κυρτή
4. $(-\infty,0)$: κοίλη, $(0,+\infty)$: κυρτή

5. $[2k\pi, (2k+1)\pi]$:κοίλη, $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$: κυρτή $(k \in \mathbb{Z})$
6. $(0, 1]$: κυρτή, $[1, +\infty)$: κοίλη

824 1. $A(1, 16)$
2. $A\left(e, 1-3e^2\right)$
3. $A(-1, -2)$, $B(1, -2)$
4. $\mathrm{A}(0, 169)$, $\mathrm{B}(1, 96\mathrm{e}-6)$, $\Gamma\left(2, 48e^2-15\right)$
5. Το $A(0, 3)$ αλλά *όχι* το $B(1, 6)$
6. $A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$, $B\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$

825 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

826 $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{9}{2}$

827 1. $f(x) = \frac{\alpha^3}{x^2+\alpha^2}$
2. $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3}, \frac{3\alpha}{4}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{3}, \frac{3\alpha}{4}\right)$

829 $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$

830 Είναι
$$f''(x) = \frac{2(x-1)\left(x^2+4x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$
και σημεία καμπής είναι τα $A(1, f(1))$, $B\left(-2+\sqrt{3}, f\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)$, $\Gamma\left(-2-\sqrt{3}, f\left(-2-\sqrt{3}\right)\right)$. Για να αποδείξουμε ότι είναι συνευθειακά μπορούμε να πάρουμε συντελεστές διευθύνσεως. Είναι: $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma} = \frac{1}{4}$ και επομένως τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

834 Θα πρέπει $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ δηλαδή πρέπει $\alpha = 1$. Για $\alpha = 1$ έχουμε
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 7$$
$$f'(x) = x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$$
$$f''(x) = 2x - 3$$
Η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = \frac{3}{2}$ και επομένως πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \frac{3}{2}$.

837 (1) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή. (2) $\lambda = -1,\ \lambda = 2$

842 1. 1
2. 2
3. 0
4. -1
5. α
6. $\frac{1}{\alpha}$
7. 0
8. $\frac{\alpha}{\beta}$

843

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 1
6. 2
7. 0
8. $\frac{1}{2}$

844

1. $\frac{1}{2}$
2. 0
3. 1
4. 1
5. 1
6. 0
7. 1
8. e

845 $\frac{\pi}{2}$

846 $\frac{1}{2}$

847 (2) $\lambda = 3$

848 (2) Οι a, b.

849 Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\alpha}{x(x+\alpha)}}{-\frac{1}{x^2}} = \alpha$ και επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to\alpha} e^y = e^\alpha$

850 Για $\lambda = 1$.

853 2

855 $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$

856 γ

857

1. $x = 1$
2. $x = 1, x = 2$
3. $x = 1$
4. $x = 1, x = -1$
5. $x = 1, x = -1$
6. *

858

1. $y = x - 1$
2. $y = x$
3. $y = 2x - 1$
4. $y = \frac{1}{2}x$
5. $y = x + \frac{1}{2}$
6. $y = x + 1$

859 $x = -1$, $y = x - 6$, $y = x - 6$

860 (1) Είναι οι $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. (2) Η εφαπτομένη στο A είναι η $y = 11x - 6$. Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = 11x - 6 \\ y = f(x) \end{array}\right\}$$

βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη επανατέμνει την C στο σημείο $B(6, 60)$.

861 Είναι $\mathcal{D}_f = (-1,1) \cup (2,+\infty)$. Η f έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους τις $x=-1$, $x=1$, $x=2$ ενώ για $x \to +\infty$ δεν έχει ασύμπτωτο.

862 (1) $x=0$ και $y=1$ (2) Όχι.

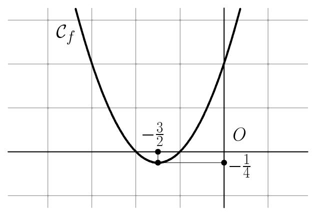
863 (1) 2 και 5 (2) $\mu = 2$

865 Όχι.

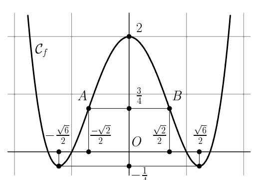
866 Όχι διότι δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

867 $A = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + ... + \sqrt{\alpha_\nu}$, $B = \frac{\beta_1}{2\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\beta_2}{2\sqrt{\alpha_2}} + ... + \frac{\beta_\nu}{2\sqrt{\alpha_\nu}}$.

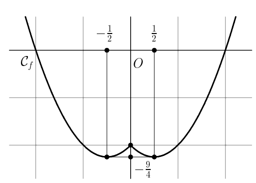
870 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δέν έχει ασυμπτώτους. Στο $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\frac{3}{2}$ το $-\frac{1}{4}$ το οποίο είναι και ολικό. Η γραφική της παράσταση είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι η :



871 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δέν έχει ασυμπτώτους. Στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}]$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ είναι γνησίως αύξουσα, στο $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα, και στο $[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ το $-\frac{1}{4}$, τοπικό μέγιστο στο 0 το 2 και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{\sqrt{6}}{2}$ το $-\frac{1}{4}$. Τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά. Είναι κυρτή στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, κοίλη στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Τα $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{1}{4}, +\infty)$. Η γραφική της παράσταση είναι η:



872 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γράφεται και $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 0 \\ x^2 - x - 2 & x \geq 0 \end{cases}$ Παραγωγίζεται παντού εκτός του 0 και η παράγωγος της είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ 2x - 1 & x > 0 \end{cases}$ Είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$,γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Στα $\pm\frac{1}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο που είναι και ολικό το $-\frac{9}{4}$. Στο 0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το -2. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{9}{4}, +\infty)$. Δέν έχει ασυμπτώτους. Η γραφική της παράσταση είναι η:



873 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δέν έχει ασυμπτώτους. Είναι

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{18}{5} = \frac{3}{10}(x-2)(x-6)$$

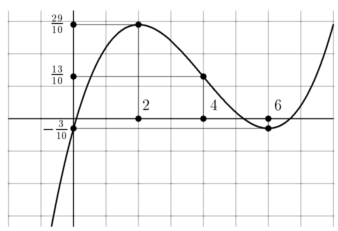
και

$$f''(x) = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}(x-4)$$

Ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{29}{10}$ $\tau.\varepsilon.$	↘	$\frac{13}{10}$ $\sigma.\kappa.$	↘	$-\frac{3}{10}$ $\tau.\mu.$	↗	$+\infty$

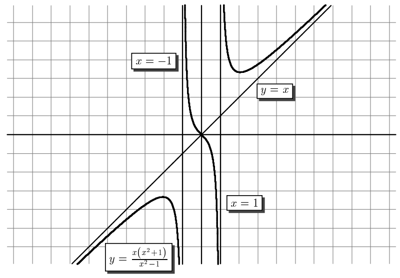
και η γραφική της παράσταση η



874 Είναι $\mathcal{D}_f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Η $\mathcal{C}_f$ έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους τις $x = -1, x = 1$ (αφού $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$) και ασύμπτωτο για $x \to \pm\infty$ την $y = x$ (αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1\cdot x) = 0$). Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ και $f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$, $f''(x) = 4x\frac{x^2+3}{(x^2-1)^3}$. Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2+\sqrt{5}}$, ή $x > \sqrt{2+\sqrt{5}}$. Επίσης $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ ή $x > 1$. Παρατηρείστε ότι η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Ο πίνακας μεταβολής της f είναι

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$\tau.\mu.$	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	$\sigma.\kappa.$	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	$\tau.\varepsilon.$	↗ $+\infty$	

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ το $f\left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)}$, τοπικό ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ το $f\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$ Η γραφική της παράσταση έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων και είναι η:



875 Από τη σχέση $f''(x) = \frac{e^{x-2}-1}{x-2} - \frac{\alpha\eta\mu x - \beta x^2}{x-2} f'(x)$ συναγουμε ότι η f'' είναι συνεχής και παίρνοντας όρια για $x \to \rho$ βρίσκουμε ότι $f''(\rho) > 0$. Αυτό προσέχοντας ότι $\frac{e^{x-2}-1}{x-2} > 0$. Επομένως κοντά στο ρ είναι $f(x) > 0$ κτλ

878

1. Γνησίως φθίνουσα στο $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$, γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}\sqrt{6}, 0\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{2}\sqrt{6}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}\sqrt{6}, +\infty)$.
2. Στα $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = f\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = -\frac{1}{4}$ που είναι και ολικό ελάχιστο. Στο 0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το 2.
3. 0
4. Είναι $\mathcal{D}_h = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Η h παραγωγίζεται στο $\mathcal{D}'_h = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ και ισχύει $h'(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$
5. $\lambda \leq -\frac{5}{4}$

879 για το (1′): Είναι $A(-1, \alpha-1)$, $B(0, \alpha), \Gamma(1, \alpha-1)$ και $\lambda_{AB} = 1$, $\lambda_{B\Gamma} = -1$ οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$.

880

1. Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[\frac{2}{3}, +\infty)$. Γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.
2. Μία.
3. Ναι οι -1 και 1.
4. $g'(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x + 1\right)(3\eta\mu x - 2)\,\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

881

1. Τοπικό ελάχιστο το 1 για $x = 1$ που είναι και ολικο
2. Η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο τυχόν σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η
$$y = 2\frac{e^{\ln^2 x_0}}{x_0}\ln x_0 (x - x_0) + x_0^{\ln x_0}$$
Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να επαληθεύεται από το ζεύγος $x = 0$, $y = 0$.
3. $+\infty$

884 (1) 0

885 (1) $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 1$, (2) $a : 3$ $b : +\infty$

888 (3) Όχι. Για να είναι η $y = x$ ασύμπτωτος στο $+\infty$ πρέπει η διαφορά $f(x) - x = \eta\mu x$ για $x \to +\infty$ νά έχει όριο το 0 πράγμα που δεν αληθεύει διότι ως γνωστόν η $\eta\mu x$ δεν έχει όριο για $x \to +\infty$. Για τον ίδιο λόγο δε μπορεί η $y = x$ να είναι ασύμπτωτος για $x \to -\infty$.
(4) Το τυχόν σημείο της C_f είναι της μορφής $M(x, x + \eta\mu x)$ και η απόσταση του από την ευθεία $y = x$ είναι $\frac{|x-(x+\eta\mu x)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}|\eta\mu x|\sqrt{2}$ η οποία γίνεται μέγιστη όταν $|\eta\mu x| = 1$. Η μέγιστη απόσταση είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

889 (2) 0

890 (1) $f(x) = \ln x$, $f(x) = e^x$, (2) 0

893 (1) Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$. Στο διάστημα $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\frac{1}{2e}$
(2) Στο διάστημα $(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}]$ η f είναι κοίλη και στο $[\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty)$ είναι κυρτή. Σημείο καμπής είναι το $M\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3e^{-3}}{2}\right)$. (γ') Σύνολο τιμών είναι το $[-\frac{1}{2e}, +\infty)$.

896 $\alpha = -3$

897 1 για $x = 1$

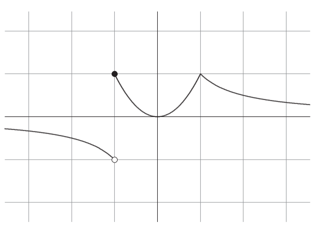
900 $2\sqrt{\alpha\beta}$

901 $40 km/h$

903 $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

904 $\pm\sqrt{3}$

907 (1) $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\ln\beta - \ln\alpha}$

909
1. Είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$.
2. Είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq \pm 1$.
3. 
4. Όχι.

910 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

914 $f(0) = f(1) = \frac{3}{2}$

915 Έχει τρεις ρίζες το 0, το 1 και μία ακόμη μεταξύ 4 και 5.

916 1. $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ $f''(x) = \begin{cases} -2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{3x^2-2}{x^6} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

2. Α $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$, Β $\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

918 (3) 0 ρίζες αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, 1 ρίζα αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, 2 ρίζες αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, 1 ρίζα αν $\alpha \geq 0$.

922 $f(x) = ax + b$

923 $f(x) = ae^{cx}$

924 $f'(0) = 1$

926 Δεν έχει.

927 2) Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

929 1. e^{x+1}

2. $\frac{1}{2}e^{2x}$

3. $2e^x$

4. $\frac{1}{2}e^{2x+1}$

930 1. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

2. $\ln|x| + e^x$

3. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

4. $-\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

931 $F + G$, $F \cdot G$, $\frac{F}{G}$, $F^3 + G^4$

932 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

933 $G(x) = \frac{x}{e^x} + (x+1)^2 + c$ όπου $c = -\frac{5}{2}\ln 2 - \ln^2 2$.

934 Όχι.

935 (6), (11)

937 $16N$

938 e^2

939 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

942 $f(x) = 2x$

945 $f(x) = ax$

946

1. $\frac{1}{2}x^2+x+c$
2. $\frac{2}{3}\sqrt{x}^3+2\ln x+c$
3. $\ln x-\frac{1}{x}+c$
4. $-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{5x^5}+c$

947

1. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3+c$
2. $-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x+c$
3. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+c$
4. $e^{x-1}+c$

948

1. $\frac{13}{31}\sqrt[13]{x^{31}}+c$
2. $x-\ln|x+1|+c$
3. $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+c$
4. $x-\ln|x+2|+c$

949

1. $\frac{1}{3}x^3+yx+c$
2. $x^2y+\frac{1}{2}y^2+c$
3. $\ln|x+1|-\sigma\upsilon\nu x+c$
4. $\frac{2}{9}\sqrt{3x+2}^3+c$

950

1. $\frac{2}{5}\sqrt{x}^5+c$
2. $x+\alpha\left|\ln(x+\beta)\right|-\beta\left|\ln(x+\beta)\right|+c$
3. $x+2y\ln|y-x|+c$
4. $-y-2x\ln|x-y|+c$

951

1. $\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+c$
2. $2\sqrt{x^3+x^2+x+1}+c$
3. $\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
4. $-\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\pi x+\frac{1}{3}\pi\right)}{\pi}+c$

952

1. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$
2. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3+\frac{2}{3}\sqrt{1-x}^3+c$
3. $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+c$
4. $\frac{1}{3}x^3+y^2x+c$

953

1. $-2e^{x+2}+e^{x+2}x+c$
2. $-2e^{x+1}+e^{x+1}(x+1)+c$
3. $5e^{x+1}-4e^{x+1}(x+1)+e^{x+1}(x+1)^2+c$
4. $\frac{1}{2}x|x|+c$

954

1. $\frac{1}{2}e^x\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}e^x\eta\mu x+c$
2. $e^{x-2}-\frac{1}{x}+c$
3. $\frac{1}{2}\eta\mu^2 t+c$
4. $\frac{e^x}{e+1}+c$

955

1. $\frac{x}{\ln 3}3^x-\frac{1}{\ln^2 3}3^x+c$
2. $\frac{1}{\ln\frac{p}{p+q}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^t+c$
3. $\frac{1}{1-t}p\left(\frac{p}{p+q}\right)^t+\frac{1}{1-t}q\left(\frac{p}{p+q}\right)^t+c$
4. $\ln|x-2|-\ln|x-1|+c$

956

1. $3\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c$
2. $18x+3x^2-5\ln|x-1|+48\ln|x-2|+c$
3. $-2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x}^3+c$
4. $e^x+\frac{x^{e+1}}{e+1}+c$

957

1. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{5}\sqrt{x}^5+\frac{2}{9}\sqrt{x}^9+c$
2. $\frac{1}{13}\varepsilon\varphi 13x+c$
3. $\frac{5}{2}x^2+8x+9\ln|x-1|+c$
4. $5x-9\ln|x-1|+27\ln|x-2|+c$

958

1. $\frac{1}{9}e^{3x-1}(3x-1)+c$
2. $\frac{1}{4}x^4+e^3x-\sigma\upsilon\nu x+c$
3. $\frac{1}{2}\eta\mu x-\frac{1}{10}\eta\mu 5x+c$
4. $-\frac{1}{3}\eta\mu 3x+c$

959 1. $-\frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu 5x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x+c$
2. $2\ln|e^x-1|-x+c$
3. $\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{\ln 3}3^x+c$
4. $\frac{5}{32}\sqrt[5]{1+4x^8}+c$

960 1. $\frac{1}{4}e^{x^4}+c$
2. $x^3e^x-3x^2e^x+6e^xx-6e^x+c$
3. $\frac{3}{2}x-2\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x+c$
4. $\frac{1}{3}(x-2)^3+\frac{1}{3}(x-3)^3+c$

961 1. $-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+c$
2. $\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{37}{3}x^3-30x^2+36x+c$
3. $\frac{1}{\alpha+\beta}e^{\alpha x+\beta x}+c$
4. $\frac{1}{\ln 2+2\ln 3+3\ln 5}2^x3^{2x}5^{3x}+c$

962 1. $\frac{1}{78}\ln\left(13u^6+18\right)+c$
2. $\frac{1}{4}x^2\ln x-\frac{1}{8}x^2+c$
3. $\frac{(\alpha x+\beta)^{\gamma+1}}{\alpha(\gamma+1)}+c$
4. $\frac{2}{\ln\frac{4}{7}}\left(\frac{4}{7}\right)^t+c$

963 1. $\int f(x)\,dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+c & x<0\\ \frac{x^3}{3}+c & x\geq 0\end{cases}$
2. $|x|-\ln(1+|x|)+c$

964 1. $-\frac{1}{\beta-\alpha}\ln|x-\alpha|+\frac{1}{\beta-\alpha}\ln|x-\beta|+c$
2. $e^x+\ln|e^x-1|+c$
3. $\frac{1}{3}\sqrt{2x-3}^3+c$
4. $2(x-1)\sqrt{\frac{1}{x-1}}+c$

965 1. $\frac{1}{6}\ln^6 x+c$
2. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-1)^4}+c$
3. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}+c$
4. $\frac{1}{8}e^{4x^2+5}+c$

966 $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x-1|+\frac{1}{30}\ln|x-6|+c$

967 1. $A=-3, B=-1, \Gamma=3, \Delta=-2, E=1$
2. $\frac{1}{x-1}-3\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}+3\ln|x-2|+c$

968 $\varepsilon\varphi x-x+c$

969 $\frac{\alpha x\gamma+\beta\gamma|\ln(\gamma x+\delta)|-\delta\alpha|\ln(\gamma x+\delta)|}{\gamma^2}+c$

970 $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+c$

971 $f(x)=\frac{4}{3}\sqrt{x-1}^3-x+1$

972 $\frac{1}{3}\ln^3 x + c$

973 $\frac{2}{5}\sqrt{1+x^5} + c$

974 $\ln|1+\eta\mu x| - \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$

975 $\sqrt{x^2-2x+3} + c$

976 $e^{x+\frac{1}{x}} + c$

978 $-\frac{1}{3\alpha(\nu-1)\left(\alpha x^3+\beta\right)^{\nu-1}}$

979 $\alpha = \frac{1}{\ln 2}, \beta = \frac{7}{3}\frac{\ln^2 2-1}{\ln^2 2}$

980 $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

981 $\frac{2}{3(\beta-\alpha)}\left(\sqrt{x-\alpha}^3 - \sqrt{x-\beta}^3\right) + c$

982

1. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + c$
2. $\sqrt{3x^2+2x+1} + c$
3. $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-3x+2}^3 + c$

983

1. $-\frac{2}{3}\left(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right)^{\frac{3}{2}} + c$
2. $\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} + c$
3. $\ln\left(x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) + c$

984 $-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{1}{x} + c$

985 $-\frac{2}{\eta\mu\sqrt{x}} + c$

986 $I_n = e^{\alpha x\sigma\upsilon\nu n-1}\beta x\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\beta x+n\beta\eta\mu\beta x}{\alpha^2+n^2\beta^2} + \frac{n(n-1)\beta^2}{\alpha^2+n^2\beta^2}I_{n-2}$

989 $\frac{175}{4}$

990 $\int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{11}, \int_0^\alpha g(x)\,dx = \frac{17}{11}$.

992 16

993

1. $t = \ln 4$
2. $t = -1 + \ln 4$
3. $t = \ln\frac{3}{-1+e}$
4. $t = \frac{3}{-1+e}$

994 $b=2$

995 $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x+x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

997 Όλοι οι θετικοί αριθμοί

1003 $x=0$

1005
1. $f'(x)=e^x$
2. $g'(x)=-\sqrt{x}$
3. $h'(x)=(2x+1)\sqrt{(x^2+x-1)}$
4. $s'(x)=4e^{4x-2}-e^{x+1}$
5. $w'(x)=a\int_1^x e^{-t^2}\,dt+axe^{-x^2}+b$

1006 $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

1007 $y=-x+2$ και $y=x-3$

1009 $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$

1011 $\frac{x^3}{3}+x$

1012 $\frac{2}{3}$

1015 Ελάχιστο $I\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{2t+1}{t^2+5t+6}\,dt=\ln 2+5\ln 5-8\ln 3$. Μέγιστο $\max\left(I(-1),I(1)\right)=\max\left(-5\ln 3+8\ln 2,13\ln 2-8\ln 3\right)=13\ln 2-8\ln 3$

1016 $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$

1018 Είναι $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=x$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

1019 (1) $e^3\sqrt{3}$ (2) $6\sqrt{3}$

1020 Είναι $\mathcal{D}_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $g'(x)=-4x\ln|x|$ και η g γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1],(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1,0),[1,+\infty)$

1021
1. $\frac{\eta\mu x}{x}$
2. $\frac{2\eta\mu x^2-\int_1^{x^2}\frac{\eta\mu t}{t}dt-\eta\mu x+\int_1^x\frac{\eta\mu t}{t}dt}{x^2}$

1023 (1)$(1,+\infty)$ (2) Είναι κυρτή σε όλο το πεδίο ορισμού της

1024
1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
2. Ελάχιστο 0 για $x=1$.

1026 $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

1029 $3x^2a^3 - a^3$

1030 Για $x = 1$ η $\frac{33}{2}$.

1032 $f(x) = e^x + xe^x$

1034 1) Τοπικό μέγιστο για $x = 1$, τοπικό ελάχιστο για $x = 2$. 2) Καμπή για $x = \frac{5}{4}$

1035 Παραγωγίζοντας θα βρείτε $f'(x) - f(x) = e^x$. Κατόπιν να πολλαπλασιάσετε με e^{-x}. Θα βρείτε τελικά ότι $f(x) = xe^x + e^x$.

1037 $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

1039 $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\pi x)}{2x} + \frac{\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{2} & , \quad x \neq 0 \\ \pi & , \quad x = 0 \end{cases}$

1040 e^{-16}

1041 $+\infty$

1042 Αν $\alpha = 1$ η f μπορεί να είναι η οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση. Αν $\alpha \neq 1$ θα είναι $f = 0$.

1044 $f(x) = e^x$

1045 $a = 3$

1046 $f(x) = \alpha - x$

1047 $\alpha = \frac{2}{3}$

1051

1. 4
2. $\ln 3$
3. $\frac{2}{3}$
4. 0

1052

1. $18 - 4\sqrt{6}$
2. $-\left(-e^8 - 1 + e^6 + e^2\right)e^{-4}$
3. $4 + \ln 3$
4. -1

1053

1. $\frac{2}{3}\sqrt{\beta}^3 - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}^3$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{\lambda^2 - \lambda^2 \ln\lambda - \ln\lambda - 1}{\lambda}$
4. $\frac{1}{3}p^6 - \frac{1}{3}p^3$

1054

1. $-\ln 2 - \ln 3$
2. $-\frac{26}{3}$
3. $\ln 7 - \ln 2 - \ln 5 - 3$
4. 1

1055

1. $t+\frac{1}{3}t^3-s-\frac{1}{3}s^3$
2. 0
3. $\frac{1}{4}$
4. $1+\ln 2-\ln(e+1)$

1056
1. 1
2. $\frac{5}{2}$
3. x^4-2x^2+x
4. 2

1057
1. $\frac{13}{2}$
2. $\frac{17}{2}$
3. $\frac{17}{2}$
4. $\frac{13}{2}$

1058
1. $\frac{65}{81(\ln 2-\ln 3)}$
2. $\frac{3}{2}s^6\ln s-\frac{1}{4}s^6-\frac{1}{2}s^2\ln s+\frac{1}{4}s^2$
3. $-\frac{4}{3}$
4. $-\frac{22}{3}+2\kappa$

1059
1. $1-\frac{2}{e}$
2. $\frac{1}{4}\pi^2-2$
3. $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$
4. $\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}$

1060
1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{7}{2}+\ln 2$
3. $\ln 2$
4. $1-\sigma\upsilon\nu 1$

1061
1. $\frac{\pi}{2}$
2. -9
3. $\frac{1}{3}mn^3+\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{3}m^4-\frac{1}{2}nm^2$
4. $\frac{x^4-1}{2x^2}$

1062 $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-1\right)$

1063 $\frac{98}{3}$

1064 $\ln 2-\frac{31}{6}$

1065

1066 $\lambda=\frac{\pi}{3}$

1067 $\alpha=7,\ \beta=-6,\ \gamma=3$

1068 $x=1,\ x=2$

1069 1993

1071 5

1072 $\frac{1}{3}$

1073 6

1074 $9-\ln 11+\ln 2$

1075 12

1077 $1+\sum\limits_{k=2}^{\nu}\frac{k-1}{\ln k}$

1078 1) $1-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}$ γ) $6-e^{-\alpha}\alpha^3-3\alpha^2e^{-\alpha}-6\alpha e^{-\alpha}-6e^{-\alpha}$

1080 $\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{6}\pi\ln 3-\frac{1}{3}\pi\ln 2+\frac{1}{12}\pi\ln\pi-\frac{1}{12}\pi$

1081 $\frac{1}{2}\ln^2 2$

1083 2

1084 1

1085 x^2

1087 $\frac{11}{48}+\frac{5}{64}\pi$

1089 2) $\int_0^{\lambda}\frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx=\frac{\lambda}{2}$ γ′) $\frac{1}{2}$

1090 $I_1=5,\ I_2=\frac{13}{12}-\frac{1}{2}\ln 2.$

1091 2) $I=\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)}-\frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right)+c$
3) $F(1)=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}$

1092 $\frac{1}{2}\pi\alpha^2$

1093 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}$

1095 3) $\frac{\pi^2}{4}$

1096 $\ln\frac{25}{24}$

1097 $\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$

1098 Να γράψετε $1=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$. Θα βρείτε $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

1100 $\frac{486}{5}$

1101
1. $\alpha=1,\beta=-1,\gamma=0$
2. $\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$

1102 (1) $6-\ln 2$ (2) ii. $6-\ln 2$

1105 Με την αντικατάσταση $u=3+x\ln x$ θα βρείτε τελικά την τιμή $\ln\left(3+2e^2\right)-\ln\left(3+e\right)$.

1110

$$I_\nu = e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu x + \nu\eta\mu x}{\alpha^2+\nu^2} + \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2+\nu^2}I_{\nu-2}$$

$$I_4 = e^{\alpha x}\frac{\alpha^4\sigma\upsilon\nu^4 x + 4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^4 x + 12\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\alpha^3\eta\mu\sigma\upsilon\nu^3 x + 16\alpha\sin x\sigma\upsilon\nu^3 x + 24\alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 24}{\alpha(\alpha^4+20\alpha^2+64)}$$

1111 $I_5 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

1113 1) $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$ 3) $-\frac{1}{9}$

1114 $\frac{\pi}{4}$

1116 $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{2}$

1117 3) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

1118 $\alpha = 1$

1120 (2 Είναι $f'(x) = \frac{2\pi(\eta\mu x)}{x^2-\pi^2}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

1125 0

1127 $\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$

1130 (1 $\lambda = 0$ (2 $\frac{1}{2}\ln 2$

1133 (6 $\frac{2x\nu + x - f(x)\nu}{2(\nu+1)}f(x)$

1134 $\frac{1}{2}$

1137 $S = \frac{1}{12}$

1138 $S = \frac{13-5\sqrt{5}}{12}$

1139 $S = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

1140 $E = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right)dx = 3 - e$

1141 $E = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - (2x-1)\right)dx = \frac{2}{3}$

1142 Μέγιστο $f(2) = 2$. Ἐλάχιστο $f(0) = f(1) = 0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^2 (2 - f(x))\,dx = \frac{10}{3}$.

1143 $\frac{2}{3}$

1144 $\alpha = \sqrt[3]{6}$

1145 $\alpha = \sqrt{3}$

1146 $\frac{9}{4}$

1147 10

1148 $\frac{73}{6}$

1149 1) Για $x \to \pm\infty$ η $y = 3x$ για $x \to 0$ η $x = 0$ 2) $E(\alpha) = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$ 3) $\frac{1}{2}$

1150 $\frac{\nu-1}{\nu+1}$

1151 $4e - 6e^{-1}$

1153 $\frac{1}{2}$

1155 $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$

1156 $p = ln\frac{1+e}{2}$

1157 $\lambda = 1$

1159 1

1160 (3 (α′) Α $(2,2)$, Β $(3,3)$ (β′) $\frac{1}{3}$

1161

1. $y = -\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$
2. $E = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$

1162 $\lambda = \pm\sqrt[3]{36}$

1163 1) $t(x) = 2x^2 - 4x$, 2) $E = \int_0^2 |t(x)|\, dx = \frac{8}{3}$

1164 $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{2} + 1$

1165 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\pi$

1168 Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = cx^3,\ c > 0,\ x \geq 0$

1172 $\sqrt{2}$, $\frac{13}{27}\sqrt{13} - \frac{8}{27}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$

1173

1. $f(x) + c$
2. $f(x)$
3. $f(x)$
4. 0
5. $f(\beta) - f(\alpha)$
6. $f(x) - f(\alpha)$

1175 $\frac{1}{3} + \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{3}\ln^3 x + c$

1178 $\alpha = 1, 2, 3$

1179 $+\infty$, $+\infty$

1180 0

1181 $f(x) = e^2 x^2$

1182 (3 0

1183 (1 $\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{y^2+1}\right)$ (2 $\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2} + 1$

1184 1. Κοίλη για $x \leq 1$, κυρτή για $x \geq 1$

2. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = x$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{27}{4}$

1187 2) i.: $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$

1188 3)

1189 $\frac{1}{3}$

1191 $\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$

1192 $x = 1$ και για $x \to +\infty$ η $y = x - 4$

1193 1. $f(x) = \ln(x+1)$

2. $F(x) = x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x$

3. $A(0,0), B(e-1,1)$

1194 $-\frac{1}{3}$

1195 $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$, $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

1196 $+\infty$

1198 2) $1 - \frac{1}{e^3} + 2\ln 2$

1200 1. Συνεχής σε κάθε $x_0 \neq -1$

2. (α′) Είναι $-2 \leq f(x) \leq 2$ για όλα τα x.

   (β′) Βρίσκουμε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = \begin{cases} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & x < -2 \\ 2x^2 + x + \frac{2}{3} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3 + 2\ln(x+1) & 0 < x < 1 \\ 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & x \geq 1 \end{cases}$$

   Η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{12}} - 1}$

1201 2, 4, 5

1203 2) $y = 2x + 5$

1205 $f(x) = -x + \alpha$

1207

1. $f(x) = \ln(x+1)$
2. $\int_0^x f(t)\,dt = \ln(x+1)\,x + \ln(x+1) - x$

1209

1. Γνησίως φθίνουσα
2. 4

1213 4) $\frac{25}{12}$

1215

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
2. $\ln\left(e^x + e^{-x}\right) + c$

1218 Είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επομένως το όριο είναι $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^{-x^2}}{1} = \frac{1}{e}$

1220 1) $f(x) = e^{1-x^2}$ 3) $F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{1-x^2}}{x}$, $x > 1$

1221 Να εργασθείτε με τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x tf^3(t)\,dt - \left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2$, $x \geq 0$

1223 2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

1225 2) $I(\alpha) = 7 - \left(2\alpha^2 - 7\alpha + 7\right)e^{\alpha}$ 3) 7

1227

1.

1228

1. $g'(x) = 3x^2\,|z|\,f\left(x^3\right) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$

1229 4) $+\infty$

1230 2) 8

1231 1) $t = -\frac{2}{3}$

1233 2) 0

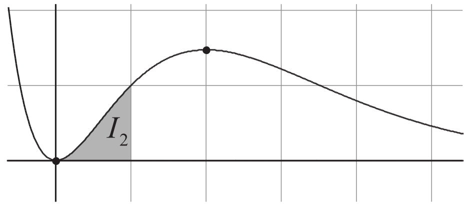
1234 2) Η h έχει μέγιστο το $h\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}\right) = 2^{10}\frac{\alpha-4}{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-4}}}$ 3) $x_2 = 2x_1$ 4) 2004

1236 1) ii. 1 2) (b) $2 = 3J - 2I$, $\frac{4}{3}$

1237 1) α $+\infty$, 0 1 1) b $f'(x) = -xe^{1-x}(x-2)$

1) γ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0



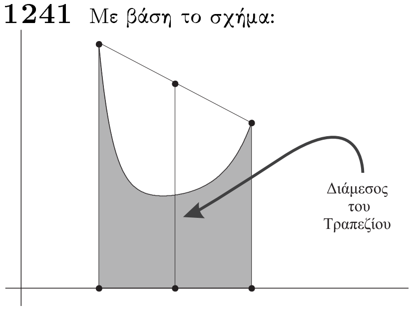
2) α $I_{\nu+1} = (\nu+1)\, I_\nu - 1$ 2)β $e-2,\ 2e-5$

3) β 0

1238 $\frac{\pi \ln 2}{8}$

1239 $f(x) = 2007x$

1241 Με βάση το σχήμα:



κ.τ.λ.

1242 Το πεδίο ορισμού απαρτίζεται από τα $x > 4$ και τα $0 < x < 1$

1245

1. $\frac{49}{8}\left(1-k^2\right)$ για $x = \frac{49}{4}k\sqrt{1-k^2}$
2. Για δοθέν k το εμβαδόν είναι

$$E(k) = \int_0^{\frac{49}{2}\sqrt{(1-k^2)k}} f_k(x)\,dx = \frac{2401}{24}\left(1-k^2\right)\sqrt{(1-k^2)k}$$

Είναι $E'(k) = \frac{2401}{24}\sqrt{1-k^2}\,(1-2k)(2k+1)$ και επομένως το $E(k)$ γίνεται μέγιστο για $k = \frac{1}{2}$. Επομένως μέγιστο εμβαδό με τον $x'x$ σχηματίζει η $f_{\frac{1}{2}}(x)$.

1247 4) 0

1249 0

1250 13

1252

1. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
2. $x = 1,\ x = 2$.
3. Η f παρουσιάζει καμπή στα $-1, 1$ και οι εφαπτομένες στα σημεία καμπής είναι $y = x - 1 + \ln 2$ και $y = 3x - 1 + \ln 2$

4. $\frac{3}{4}$

1254 $F''(x) = f(x+1) - f(x) - f\prime(x)$

1258 4) $\frac{1}{2}(e-1)$

1259 1) Σύνολο Τιμών: $[-1, +\infty)$ 4) $\frac{e^2-3}{4}$.

1260

1261 1) $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ 2) 0.